



Nome legível: \_\_\_\_\_

### Observações:

- Apresente todos os cálculos e as justificativas de todas as questões, as respostas só serão aceitas com as devidas justificativas.
- Escolha questões para responder de maneira que a soma da pontuação seja 10,00 (dez). Não responda questões de modo que a pontuação seja maior que 10,00; pois suas respostas serão desconsideradas.
- Pode usar calculadora em seus cálculos, no entanto é **proibido o uso do celular**.

### Series de Fourier

**Questão 1** (2,0 pontos) A função  $f$  cuja definição no intervalo  $[-\pi, \pi]$  é

$$f(x) = x; \quad -\pi < x < \pi,$$

é suposta  $2\pi$ -periódica. Encontre sua série de Fourier.

**Sugestão:** Use o seguinte

$$\int x \cos(nx) dx = \frac{nx \sin(nx) + \cos(nx)}{n^2} + C$$
$$\int x \sin(nx) dx = \frac{\sin(nx) - nx \cos(nx)}{n^2} + C$$

**Questão 2** (2,0 pontos) Considere a função  $f(x) = \sin(x)$  definida no intervalo  $[0, \pi]$ .

a) (1,0 ponto)

- Defina a extensão par  $f_p$  desta função entre  $[-\pi, \pi]$ .
- Defina a extensão ímpar  $f_i$  desta função entre  $[-\pi, \pi]$ .

b) (1,0 ponto) Use uma das funções do item acima para encontrar uma série de cossenos que represente a função  $f$ .

**Sugestão:** Use o fato que se  $n \neq 1$

$$\int \cos(x) \cos(nx) dx = \frac{(n \cos(x) \sin(nx) - \sin(x) \cos(nx))}{(n^2 - 1)} + C$$

e se  $n = 1$

$$\int \cos(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x)) + C$$

### Equações Separáveis

**Questão 3** (2,0 pontos)

- (1,0 ponto) Resolva a equação diferencial  $y' = (1 - 2x)y^2$ ,  $y(0) = -\frac{1}{6}$ , se possível determine explicitamente a solução.
- (1,0 ponto) Diga qual o intervalo de validade da solução:

### Equações Lineares

**Questão 4** (2,0 pontos) Um tanque contém 1000L uma solução com concentração salina de 0,5kg/L é adicionada a taxa de 10L/min. A solução é mantida misturada e é retirada do tanque na taxa de 5L/min. Calcule a quantidade de sal depois de 80 minutos.

### Equações Exatas

**Questão 5** (2,0 pontos) Considere a equação

$$\left(\frac{y}{x} + \frac{1}{2}y^2x\right)dx + \left(\ln(x) + \frac{1}{2}x^2y\right)dy = 0, \quad x > 0$$

- (0,5 ponto) Determine se a equação é exata.
- (0,5 ponto) Caso seja exata encontre uma solução.
- (1,0 ponto) Encontre explicitamente  $y$  como uma função de  $x$ . (Sugestão: Use Bhaskara ou então complete quadrados.)

### Equações Diferenciais de Segunda Ordem

**Questão 6** (2,0 pontos) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

### Equações Não Homogêneas, Coeficientes Indeterminados

**Questão 7** (2,0 pontos) Encontre a solução da equação diferencial

$$2y'' + 3y' + y = t^2 + 4 \cos(t)$$

### Método da Variação de Parâmetros

**Questão 8** (2,0 pontos) Encontre a solução da seguinte equação diferencial  $y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}$ .  $t > 0$ .

### Referências

- [1] MATOS, Marivaldo P. Séries e Equações Diferenciais. Prentice Hall, 1998.