Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática

PROFMAT

Quadrados mágicos de ordem ímpar a partir de quadrados latinos

Roberto Dias Cahú

TCC de Mestrado

Recife
junho de 2013

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática

Roberto Dias Cahú

Quadrados mágicos de ordem ímpar a partir de quadrados latinos

Trabalho apresentado ao Programa PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Rodrigo José Gondim Neves*

Recife
junho de 2013

Comissão Julgadora

Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves - DM UFRPE
Presidente (orientador)

Prof. Dr. Claudio Tadeu Cristino - DEINFO UFRPE
Membro

Prof. Dra. Cleide Soares Martins Gomes - DMat UFPE
Membro

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão - DMat UFPE
Membro

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pois sem ele, eu não teria chegado até aqui.

À minha esposa Cláudia e à minha filha Raquel pela paciência e compreensão que tiveram ao longo de todo o mestrado, diante dos poucos momentos de lazer, sem nunca terem deixado de me incentivar.

Aos meus pais, Sílvio e Vera, pela educação e incentivo que sempre me deram.

Aos meus irmãos André e Rodrigo pelo incentivo e pela nossa grande amizade.

Ao meu orientador Rodrigo Gondim, que teve uma participação fundamental nesse trabalho, incentivando, orientando, solicitando melhorias, e principalmente por sua disponibilidade para conversar sobre o trabalho. Isso tudo só fez aumentar o meu respeito e admiração.

Aos meus professores do PROFMAT: Eulália, Jorge, Gondim, Paulo Santiago, Maité e Adriano, pela empolgação que demonstraram durante as aulas.

Aos meus colegas do PROFMAT, que tornaram o ambiente agradável, descontraído, com muita colaboração e estudo.

Ao nosso coordenador Paulo Santiago, por ser sempre muito solícito em relação aos nossos pedidos burocráticos.

Ao PROFMAT, pela grande oportunidade de cursar um mestrado.

À CAPES pela bolsa de estudo que me foi concedida.

“Não fui eu que lhe ordenei? Seja forte e corajoso! Não se apavore, nem desanime, pois o Senhor, o seu Deus, estará com você por onde você andar”.

—JOSUÉ 1,9

Resumo

Euler, em 1782, mostrou como obter, pela soma de dois quadrados latinos ortogonais, um quadrado, cuja soma dos elementos de qualquer linha ou coluna é a mesma, sem garantias sobre a soma dos elementos de cada diagonal. Neste trabalho, analisamos o famoso algoritmo apresentado por De La Loubère para construção de quadrados mágicos de ordem ímpar, e mostramos que estes quadrados mágicos podem ser obtidos pela soma de dois quadrados latinos ortogonais.

Palavras-chave: Quadrados Mágicos, Quadrados Latinos Ortogonais, De La Loubère

Abstract

Euler, in 1782, showed how to obtain, by the sum of two orthogonal latin squares, a square, whose sum of elements in any row or column is the same, with no guarantees about the sum of elements of each diagonal. In this work, we explore the famous algorithm presented by De La Loubère for the construction of magic squares of odd order, and we show that these magic squares can be obtained by the sum of two orthogonal latin squares.

Keywords: Magic Squares, Orthogonal Latin Squares, De La Loubère

Sumário

Lista de Tabelas

Introdução

Um quadrado mágico normal de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n, contendo n^2 valores inteiros distintos, numerados de 1 a n^2, sendo n um número natural maior do que ou igual a 3. Além disso, todas as linhas, colunas e diagonais deste quadrado apresentam a mesma soma M, denominada constante mágica. A origem do quadrado mágico foi provavelmente na China, no terceiro milênio antes de Cristo. De acordo com a lenda, o rei Yu estava às margens do rio Luo, um afluente do rio Amarelo, quando emergiu uma tartaruga com o quadrado mágico de ordem 3, desenhado simbolicamente em seu casco. O referido quadrado ficou conhecido como Luoshu, que significa escrita do rio Luo. Os primeiros registros sobre ele foram feitos por Zhuang Zi (369 - 286 A.C.). No Luoshu, a soma dos elementos de cada linha, coluna ou diagonal, é igual a 15, fato que o levou a ser usado como um símbolo de harmonia (SWETZ, 2008).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Tabela 1 Luoshu.

Um quadrado latino de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n, contendo n elementos distintos, de forma que cada linha ou coluna não possua elementos repetidos. A partir do conceito de quadrado latino, Euler (1782) criou o conceito de quadrados latinos ortogonais, ou quadrados greco-latinos. Dois quadrados latinos de mesma ordem são denominados ortogonais se os pares ordenados, formados por elementos em posições correspondentes, forem todos distintos. O conceito surge para lidar com o problema dos 36 oficiais, de 6 diferentes regimentos e igual número de patentes, sendo cada regimento representado por 6 oficiais de patentes diferentes. Estes oficiais devem ser colocados numa matriz quadrada de ordem 6, de modo que, em cada linha ou coluna estejam representados todos os regimentos e todas as patentes. Caso encontrasse um par de quadrados latinos ortogonais de ordem 6, o problema estaria resolvido. Como não conseguiu, Euler conjecturou que não existiam quadrados latinos ortogonais de ordem $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$.

Em 1900, o matemático amador Tarry mostrou que realmente não existem quadrados greco-latinos de ordem 6, o que estava de acordo com a conjectura de Euler. Mas, em 1959, os matemáticos Bose, Shrikhande e Parker provaram que a conjectura estava errada, mostrando que é possível encontrar quadrados latinos ortogonais para qualquer ordem $n = 4k+2$ com $k > 1$. O fato de uma conjectura feita por Euler ter sido rejeitada 177 anos após seu surgimento gerou, por exemplo, matéria de primeira página numa edição de domingo do The New York Times (1959), e também a capa da revista Scientific American (1959).

Euler já sabia que a soma, de dois quadrados latinos ortogonais apropriadamente escolhidos, gera, pelo menos, um quadrado semimágico. Neste trabalho, denominamos quadrado semimágico de ordem n, uma matriz quadrada de ordem n, com n^2 elementos naturais distintos, numerados de 1 a n^2, em que a soma dos elementos de cada linha e de cada coluna é igual à constante mágica M. Se conseguirmos garantir que a soma dos elementos de cada diagonal também é igual a M, estaremos diante de um quadrado mágico.

Como existem algoritmos para construção de quadrados mágicos de qualquer ordem $n \geq 3$ (ANDRADE, 1999), e por outro lado Tarry mostrou que não existem quadrados latinos ortogonais de ordem 6, fica claro que, nem sempre é possível usar quadrados greco-latinos para construção de um quadrado mágico.

Neste trabalho, ao analisarmos o algoritmo apresentado pelo matemático Simon De La Loubère para construção de quadrados mágicos de ordem ímpar (KRAITCHIK, 1942), percebemos que os quadrados mágicos de ordem 3, 5 e 7, poderiam ter sido obtidos utilizando-se pares de quadrados latinos ortogonais L_1 e L_2. Os elementos que utilizamos nos quadrados L_1 e L_2 são os mesmos elementos usados por Euler (1849) na construção de quadrados mágigos. O quadrado L_1 tem os elementos $0.n$, $1.n$, $2.n$, ..., $(n-1).n$. Já os elementos de L_2 são 1, 2, 3, ..., n.

Após uma análise dos quadrados latinos ortogonais utilizados, conjecturamos um algoritmo para a construção de um quadrado mágico normal de ordem n ímpar, utilizando quadrados latinos ortogonais. Após a conjectura, demonstramos que a mesma estava correta.

Este trabalho inicia-se com um capítulo sobre definições e teoremas preliminares, onde, por sinal, as definições apresentadas nesta introdução são exemplificadas. A partir daí, a ordem dos capítulos é a mesma com que as ideias sobre o tema se desenvolveram. Começando com um capítulo sobre a construção de um quadrado mágico normal de ordem 3. Seguido por outro sobre a construção de um quadrado mágico normal de ordem 3, utilizando quadrados latinos ortogonais. O capítulo seguinte é o principal deste trabalho, apresentando um algoritmo para construção de um quadrado mágico normal de ordem ímpar, utilizando quadrados latinos ortogonais. Apresentamos em seguida uma proposta didática para o assunto abordado neste trabalho. Há também um apêndice com um exemplo de construção de um quadrado mágico normal de ordem 4, utilizando quadrados latinos ortogonais. Finalizamos com as referências bibliográficas.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, além de exemplificarmos as quatro definições presentes na introdução, também demonstramos um teorema que já era conhecido por Euler, e foi apresentado, em sua essência, no artigo *De quadratis magicis*, de sua obra *Commentationes arithmeticae* 2, publicada originalmente em 1849.

Definição 1.1. Um quadrado mágico normal de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n, contendo n^2 valores inteiros distintos, numerados de 1 a n^2, sendo n um número natural maior do que ou igual a 3. Além disso, todas as linhas, colunas e diagonais deste quadrado apresentam a mesma soma M, denominada constante mágica.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Tabela 1.1 Quadrado mágico normal de ordem 3.

O quadrado mágico acima tem constante mágica M igual a 15.

Definição 1.2. Um quadrado latino de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n, contendo n elementos distintos, de forma que cada linha ou coluna não possua elementos repetidos.

2	4	1	3	5
3	5	2	4	1
4	1	3	5	2
5	2	4	1	3
1	3	5	2	4

Tabela 1.2 Exemplo de um quadrado latino de ordem 5.

Definição 1.3. Dois quadrados latinos de mesma ordem são denominados ortogonais, se os pares ordenados, formados por elementos em posições correspondentes, forem todos distintos.

1	0	2
2	1	0
0	2	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

Tabela 1.3 Exemplo de um par de quadrados latinos ortogonais.

Os pares ordenados, formados pelos elementos em posições correspondentes nos dois quadrados latinos acima, são: $(1,1)$; $(0,3)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(1,2)$; $(0,1)$; $(0,2)$; $(2,1)$; $(1,3)$. Como os mesmos são todos distintos, os quadrados latinos acima são ortogonais.

Definição 1.4. Denominamos quadrado semimágico de ordem n, uma matriz quadrada de ordem n, com n^2 elementos naturais distintos, numerados de 1 a n^2, em que a soma dos elementos, de cada linha e de cada coluna, é igual à constante mágica M.

1	6	8
9	2	4
5	7	3

Tabela 1.4 Exemplo de um quadrado semimágico de ordem 3.

O quadrado, acima, apresenta $M = 15$, mas a diagonal principal da matriz não apresenta soma 15, portanto esse é um quadrado semimágico de ordem 3.

Teorema 1.5 (Euler). *Sejam L_1 e L_2 dois quadrados latinos ortogonais de ordem n, tais que os elementos de L_1 são $0.n$; $1.n$; $2.n$; $\dots$; $(n-1).n$; e os elementos de L_2 são $1, 2, 3, \dots, n$. A matriz $Q = L_1 + L_2$ é um quadrado semimágico de ordem n.*

Demonstração. É importante perceber que ao adicionarmos um elemento de L_1 a um elemento de L_2, obtemos um elemento do conjunto C={ 1, 2, 3, $\dots$, n^2 }. Se $c \in C$, $c \neq kn$, $k \in \mathbb{N}$, a divisão Euclidiana de c por n nos permite escrever $c = q.n + r$, $r \in \{1,2,3,...,n-1\}$, $q.n \in \{0.n;1.n;2.n;...;(n-1).n\}$, e nos garante a unicidade de q e r. Então $q.n \in L_1$ e $r \in L_2$ também são únicos.

Se $c \in C$ e $c = (q+1)n, q \in \mathbb{N}$, então $c = (q+1).n = (q+1).n + r$, sendo mais uma vez garantida, pela divisão Euclidiana, a unicidade de $q+1$ e r, então $c = (q+1).n = q.n+n$, onde $q.n \in L_1$ e $n \in L_2$ também são únicos. Portanto, como L_1 e L_2 são quadrados latinos ortogonais de ordem n, a matriz $Q = L_1 + L_2$ tem n^2 elementos distintos, isto é, os elementos da matriz Q são todos os elementos do conjunto { 1, 2, 3, $\dots$, n^2 }.

Além disso, num quadrado latino, a soma dos elementos, de uma linha ou coluna, é sempre a mesma, pois seus elementos são sempre os mesmos. Sejam, S_1 a soma dos elementos de uma linha ou coluna de L_1, e S_2 a soma dos elementos de uma linha ou coluna de L_2. Então, a soma M dos elementos de uma linha ou coluna da matriz Q é $M = S_1 + S_2$. Além disso, como os termos de L_1 formam uma progressão aritmética de razão n então,

$$S_1 = \frac{[0.n + (n-1).n]n}{2} = \frac{n^3 - n^2}{2}$$

Já os termos de L_2 formam uma progressão aritmética de razão 1 então,

$$S_2 = \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n+n^2}{2}$$

Desta maneira,

$$M = S_1 + S_2 = \frac{n^3 - n^2}{2} + \frac{n+n^2}{2} = \frac{n^3+n}{2} = \frac{(1+n^2).n}{2}$$

Este valor de M é, segundo Euler, a constante mágica de um quadrado mágico normal de ordem n. Portanto, o quadrado Q é um quadrado semimágico de ordem n. $\square$

CAPÍTULO 2

Construção de um quadrado mágico normal de ordem 3

Neste capítulo, apresentamos um algoritmo para construção de um quadrado mágico normal de ordem 3, sem utilizar quadrados latinos ortogonais. Após a apresentação, justificamos porque o mesmo funciona.

Nas representações dos elementos dos quadrados, utilizamos a mesma nomenclatura dos elementos das matrizes.

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

Tabela 2.1 Elementos de um quadrado mágico normal de ordem 3.

Para construirmos um quadrado mágico normal de ordem 3, basta conhecermos as seguintes propriedades:

- Sua constante mágica é $M = 15$.
- Seu termo central vale 5, isto é, $a_{22} = 5$
- Os valores, nos cantos do quadrado, são todos números pares, isto é, $\{a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}\} = \{2, 4, 6, 8\}$

Iniciaremos a construção colocando o termo central igual a 5, e um dos números pares numa extremidade do quadrado.

6		
	5	

Tabela 2.2 Primeiro passo da construção de um quadrado mágico normal de ordem 3.

Como a constante mágica M vale 15 e $a_{11} = 6$, então o número 4 deve estar na terceira linha e terceira coluna.

6		
	5	
		4

Tabela 2.3 Segundo passo da construção de um quadrado mágico normal de ordem 3.

Como os cantos deste quadrado são formadas por números pares, temos por exemplo:

6		8
	5	
2		4

Tabela 2.4 Terceiro passo da construção de um quadrado mágico normal de ordem 3.

Devido ao valor de M, o resultado final é:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Tabela 2.5 Quarto passo da construção de um quadrado mágico normal de ordem 3.

Os outros resultados possíveis utilizando este algoritmo são:

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Tabela 2.6 Outros resultados possíveis para um quadrado mágico normal de ordem 3.

Estes oito resultados encontrados são considerados equivalentes, pois é possível, a partir de um deles, encontrar os outros sete, utilizando rotações ou simetrias.

Vamos agora demonstrar cada uma das propriedades que utilizamos.

Proposição 2.1. *A constante mágica de um quadrado mágico normal de ordem* 3 *é* $M = 15$.

Demonstração. Vamos primeiro encontrar uma fórmula geral, para qualquer $3 \leq n \in \mathbb{N}$. Os valores 1, 2, 3, ..., n^2 formam uma progressão aritmética de razão 1, primeiro termo $a_1 = 1$, último termo $a_n = n^2$, e número de termos igual a n^2. Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética finita, temos:

$$S = \frac{(1+n^2).n^2}{2}$$

Ou, demonstrando a fórmula:

$$S = 1+2+3+\cdots+(n^2-2)+(n^2-1)+n^2 \quad (I)$$

Que também pode ser escrita da seguinte forma:

$$S = n^2+(n^2-1)+(n^2-2)+\cdots+3+2+1 \quad (II)$$

Adicionando (I) e (II), temos:

$$2.S = (1+n^2).n^2$$

pois temos n^2 parcelas iguais a $(1+n^2)$. Então,

$$S = \frac{(1+n^2).n^2}{2}$$

Como a soma dos termos de um quadrado mágico de ordem n é $n.M$, pois são n linhas e cada linha tem soma dos termos igual a M, temos:

$$S = \frac{(1+n^2).n^2}{2} = n.M \Longrightarrow M = \frac{(1+n^2).n}{2}$$

No nosso caso, $n = 3$, portanto

$$M = \frac{(1+3^2).3}{2} = 15$$

□

Proposição 2.2. *O termo central, de um quadrado mágico normal de ordem* 3*, é igual a* 5*, isto é,* $a_{22} = 5$.

Demonstração. A soma dos elementos das 3 linhas é 3 vezes o valor da constante mágica M, então:

$$3M = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{31} + a_{32} + a_{33}$$
$$3.M = (a_{11} + a_{33}) + (a_{13} + a_{31}) + (a_{12} + a_{22} + a_{32}) + (a_{21} + a_{23})$$
$$3M = (M - a_{22}) + (M - a_{22}) + M + (M - a_{22})$$
$$3.a_{22} = M = 15$$
$$a_{22} = 5$$

□

Proposição 2.3. *Num quadrado mágico normal de ordem* 3, $\{a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}\} = \{2, 4, 6, 8\}$.

Demonstração. Já sabemos que $a_{22} = 5$. Vamos agora supor que a_{11} é ímpar.

ímpar		
	5	

Tabela 2.7 Primeira figura da demonstração que $\{a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}\} = \{2, 4, 6, 8\}$.

Como $M = 15$ (ímpar), então a_{33} também será ímpar, pois:
$I + I + I = I$
$P + P + I = I$
$P + I + I = P$
$P + P + P = P$; onde P e I representam números pares e ímpares, respectivamente.

ímpar		
	5	
		ímpar

Tabela 2.8 Segunda figura da demonstração que $\{a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}\} = \{2, 4, 6, 8\}$.

Ainda temos que posicionar mais dois números ímpares, pois os elementos desse quadrado são: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Vamos supor que a_{12} é ímpar.

ímpar	ímpar	
	5	
		ímpar

Tabela 2.9 Terceira figura da demonstração que $\{a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}\} = \{2, 4, 6, 8\}$.

Isto obrigará a_{13} e a_{32} a também serem ímpares.

ímpar	ímpar	ímpar
	5	
	ímpar	ímpar

Tabela 2.10 Quarta figura da demonstração que $\{a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}\} = \{2, 4, 6, 8\}$.

O que é um absurdo, pois só dispomos de 5 números ímpares, e na figura acima aparecem 6. Portanto, se a_{11} for ímpar, a_{12} não pode ser ímpar, isto é, se a_{11} for ímpar, a_{12} será par. Consequentemente a_{13} também será par, pois a constante M é ímpar.

ímpar	par	par
	5	
		ímpar

Tabela 2.11 Quinta figura da demonstração que $\{a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}\} = \{2, 4, 6, 8\}$.

Isto obrigará a_{23}, a_{31} e a_{32} a serem pares.

ímpar	par	par
	5	par
par	par	ímpar

Tabela 2.12 Sexta figura da demonstração que $\{a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}\} = \{2, 4, 6, 8\}$.

Mas isto é um absurdo, pois só dispomos de 4 números pares. Então a_{11} não pode ser ímpar, isto é, a_{11} é par.

Analogamente, podemos mostrar que a_{13}, a_{31} e a_{33} também são pares.

Portanto, $\{a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}\} = \{2, 4, 6, 8\}$. $\square$

CAPÍTULO 3

Quadrado mágico normal de ordem 3 via quadrados latinos

Vamos mostrar como é possível obter os 8 quadrados mágicos normais de ordem 3, equivalentes, utilizando quadrados latinos ortogonais, sem utilizar rotações ou simetrias.

1. Construiremos um quadrado latino L_1 de forma que uma das diagonais seja formada pelos elementos 0, 3 e 6; e a outra diagonal deve ter os três elementos iguais a 3.
2. Construiremos um quadrado latino L_2 de forma que uma das diagonais seja formada pelos elementos 1, 2 e 3; e a outra diagonal deve ter os três elementos iguais a 2. Mas a diagonal escolhida para possuir três elementos iguais, de L_1, deve ser diferente da diagonal escolhida para possuir três elementos iguais, de L_2.
3. Adicionando as matrizes L_1 e L_2, obtemos um dos 8 quadrados mágicos normais de ordem 3, equivalentes.

   Existem 4 resultados possíveis para o primeiro passo, isto é, para a construção de L_1, que apresentamos aqui.

3		0
	3	
6		3

3		6
	3	
0		3

0		3
	3	
3		6

6		3
	3	
3		0

Tabela 3.1 Possíveis diagonais do quadrado L_1 de ordem 3.

Completando os elementos dos quadrados latinos, temos:

3	6	0
0	3	6
6	0	3

3	0	6
6	3	0
0	6	3

0	6	3
6	3	0
3	0	6

6	0	3
0	3	6
3	6	0

Tabela 3.2 Possíveis quadrados L_1 de ordem 3.

Na construção de L_2, também existem 4 resultados possíveis para as diagonais:

2		1
	2	
3		2

1		2
	2	
2		3

2		3
	2	
1		2

3		2
	2	
2		1

Tabela 3.3 Possíveis diagonais do quadrado L_2 de ordem 3.

Completando os elementos dos quadrados latinos, temos:

2	3	1
1	2	3
3	1	2

1	3	2
3	2	1
2	1	3

2	1	3
3	2	1
1	3	2

3	1	2
1	2	3
2	3	1

Tabela 3.4 Possíveis quadrados L_2 de ordem 3.

Porém, como não podemos ter a mesma diagonal com elementos iguais em ambos os quadrados, e supondo que construiremos primeiro L_1 e depois L_2, temos 4 opções de construção para L_1, e apenas 2 opções de construção para L_2.

Pelo princípio multiplicativo temos $4.2 = 8$ maneiras possíveis de construir o par de quadrados L_1 e L_2. Representamos abaixo os 8 resultados possíveis da seguinte maneira: à esquerda, L_1; ao centro, L_2; à direita $L_1 + L_2$.

3	6	0		1	3	2		4	9	2
0	3	6		3	2	1		3	5	7
6	0	3		2	1	3		8	1	6

3	6	0		3	1	2		6	7	2
0	3	6		1	2	3		1	5	9
6	0	3		2	3	1		8	3	4

3	0	6		3	1	2		6	1	8
6	3	0		1	2	3		7	5	3
0	6	3		2	3	1		2	9	4

3	0	6		1	3	2		4	3	8
6	3	0		3	2	1		9	5	1
0	6	3		2	1	3		2	7	6

0	6	3		2	3	1		2	9	4
6	3	0		1	2	3		7	5	3
3	0	6		3	1	2		6	1	8

0	6	3		2	1	3		2	7	6
6	3	0		3	2	1		9	5	1
3	0	6		1	3	2		4	3	8

6	0	3
0	3	6
3	6	0

2	3	1
1	2	3
3	1	2

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	0	3
0	3	6
3	6	0

2	1	3
3	2	1
1	3	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Tabela 3.5 Possíveis quadrados L_1, L_2 e $L_1 + L_2$, respectivamente, de ordem 3.

Os 8 quadrados mágicos normais equivalentes, obtidos acima, são os mesmos que foram obtidos no capítulo anterior, sendo que, no referido capítulo, não utilizamos quadrados latinos ortogonais para obtê-los.

Vejamos agora, porque o algoritmo funciona.

Por que utilizamos quadrados latinos em que uma das diagonais possui 3 elementos iguais?

Por se tratar de um quadrado latino, se um elemento X for colocado na posição a_{22}, o mesmo não poderá ser colocado nas posições a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}.

	-	
-	X	-
	-	

Tabela 3.6 Primeira figura da justificativa do uso de 3 elementos iguais numa diagonal.

Como este quadrado latino possui mais 2 elementos X, vamos supor que o segundo elemento X esteja em a_{11}.

X	-	-
-	X	-
-	-	

Tabela 3.7 Segunda figura da justificativa do uso de 3 elementos iguais numa diagonal.

O fato de ser latino obriga o outro elemento X a estar em a_{33}. Desta maneira, os 3 elementos de uma das diagonais, são iguais.

Se ao invés de termos colocado o segundo elemento X em a_{11}, o tivéssemos colocado em a_{13}, a_{31} ou a_{33}, a demonstração seria análoga.

X	-	-
-	X	-
-	-	X

Tabela 3.8 Terceira figura da justificativa do uso de 3 elementos iguais numa diagonal.

Portanto, em um quadrado latino de ordem 3, uma das diagonais possui três elementos iguais.

Por que no quadrado latino L_1, os elementos da diagonal, com elementos iguais, são iguais a 3? Por que no quadrado latino L_2, os elementos da diagonal, com elementos iguais, são iguais a 2?

Num quadrado latino, a soma dos elementos de uma linha ou coluna é sempre a mesma, pois os elementos são os mesmos. Como os elementos de L_1 são 0, 3 e 6, então, a soma dos elementos de uma linha ou coluna desse quadrado é $0+3+6=9$. Como é do nosso interesse que a soma dos elementos das diagonais seja igual à soma dos elementos de uma linha ou coluna, e os três elementos de uma das diagonais são iguais, então, o referido elemento tem que ser 3, pois $3.3=9$.

Analogamente, como os elementos de L_2 são 1, 2 e 3, então, a soma dos elementos de uma linha ou coluna desse quadrado é $1+2+3=6$. Então, o elemento que aparece três vezes numa mesma diagonal de L_2 tem que ser 2, pois $3.2=6$.

Por que os elementos da outra diagonal de L_1 são 0, 3 e 6? Por que os elementos da outra diagonal de L_2 são 1, 2 e 3?

Em L_1, já sabemos que o elemento central é 3 e que o 3 não pode aparecer novamente na outra diagonal, pelo fato do quadrado ser latino. Ver figuras abaixo:

3		
	3	
		3

		3
	3	
3		

Tabela 3.9 Primeira figura da justificativa do uso de 3 elementos diferentes numa diagonal.

Além disso, queremos que a soma dos elementos de cada diagonal seja igual à soma dos elementos de cada linha ou coluna, isto é, 9. Então, os dois elementos restantes da diagonal são 0 e 6. Portanto, as possíveis diagonais de L_1 são:

3		0
	3	
6		3

3		6
	3	
0		3

0		3
	3	
3		6

6		3
	3	
3		0

Tabela 3.10 Segunda figura da justificativa do uso de 3 elementos diferentes numa diagonal.

Completando os elementos dos quadrados latinos, temos:

3	6	0
0	3	6
6	0	3

3	0	6
6	3	0
0	6	3

0	6	3
6	3	0
3	0	6

6	0	3
0	3	6
3	6	0

Tabela 3.11 Terceira figura da justificativa do uso de 3 elementos diferentes numa diagonal.

Analogamente, em L_2, já sabemos que o elemento central é 2 e que o 2 não pode aparecer novamente na outra diagonal, pelo fato do quadrado ser latino. Ver figuras abaixo:

2		
	2	
		2

		2
	2	
2		

Tabela 3.12 Quarta figura da justificativa do uso de 3 elementos diferentes numa diagonal.

Além disso, queremos que a soma dos elementos da diagonal seja igual à soma dos elementos de cada linha ou coluna de L_2, isto é, 6. Então, os dois elementos restantes da diagonal são 1 e 3. Portanto, as possíveis diagonais de L_2 são:

2		1
	2	
3		2

1		2
	2	
2		3

2		3
	2	
1		2

3		2
	2	
2		1

Tabela 3.13 Quinta figura da justificativa do uso de 3 elementos diferentes numa diagonal.

Completando os quadrados latinos, temos:

2	3	1
1	2	3
3	1	2

1	3	2
3	2	1
2	1	3

2	1	3
3	2	1
1	3	2

3	1	2
1	2	3
2	3	1

Tabela 3.14 Sexta figura da justificativa do uso de 3 elementos diferentes numa diagonal.

Por que a diagonal escolhida para ter os três elementos iguais de L_1 deve ser diferente da diagonal escolhida para possuir os três elementos iguais de L_2?

Caso contrário, os quadrados latinos L_1 e L_2 não seriam ortogonais.

O que me garante que os quadrados latinos L_1 e L_2 são ortogonais?

São ortogonais pois os 8 quadrados $L_1 + L_2$, obtidos por esse algoritmo, possuem os nove elementos distintos dois a dois (Se dois quadrados latinos L_1 e L_2 não são ortogonais, então a soma $L_1 + L_2$ apresenta pelo menos um elemento repetido).

CAPÍTULO 4

Quadrado mágico de ordem ímpar via quadrados latinos

Para efetuarmos esta construção, utilizaremos dois quadrados latinos ortogonais L_1 e L_2. O quadrado L_1 terá os elementos $0.n$, $1.n$, $2.n$, $\ldots$, $(n-1).n$. Já os elementos de L_2 serão 1, 2, 3, $\ldots$, n. O algoritmo consiste em três passos:

1. A construção de cada quadrado latino deve ser iniciada pela coluna central, colocando os elementos em ordem crescente.

2. Em L_1, ao avançarmos uma coluna para a direita, os elementos devem sofrer um deslocamento de uma linha para cima.
   Em L_2, ao avançarmos uma coluna para a direita, os elementos devem sofrer um deslocamento de duas linhas para cima.

3. Adicionando os elementos correspondentes de L_1 e L_2, obtemos um quadrado mágico normal de ordem n.

Para um melhor entendimento, realizaremos os três passos acima, nos exemplos abaixo, com $n = 5$.

Passo (1)

L_1=

		0		
		5		
		10		
		15		
		20		

L_2=

		1		
		2		
		3		
		4		
		5		

Tabela 4.1 Primeiro passo do algoritmo com $n = 5$.

Passos (2) e (3):

A fim de executarmos o segundo passo, consideraremos uma ordem cíclica. Desta maneira, à direita da coluna n está a coluna 1 e acima da linha 1 está a linha n.

15	20	0	5	10
20	0	5	10	15
0	5	10	15	20
5	10	15	20	0
10	15	20	0	5

2	4	1	3	5
3	5	2	4	1
4	1	3	5	2
5	2	4	1	3
1	3	5	2	4

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Tabela 4.2 Quadrados L_1, L_2 e $L_1 + L_2$, respectivamente, com $n = 5$.

O quadrado mágico normal, obtido acima, tem constante mágica $M = 65$.

Afim de provarmos que o algoritmo está correto, vamos, inicialmente, provar que L_1 e L_2 são quadrados latinos e provar que os mesmos são ortogonais.

Proposição 4.1. *L_1 e L_2 são quadrados latinos.*

Demonstração. Na construção do quadrado L_1 de ordem n, utilizando o algoritmo proposto, são utilizados n símbolos distintos. Ao avançarmos uma coluna para a direita, os elementos sofrem um deslocamento de uma linha para cima. Devido a ordem cíclica, cada símbolo estará presente em todas as colunas e em todas as linhas, sem que haja símbolos repetidos numa mesma linha ou coluna. Isto garante que L_1 é um quadrado latino.

15	20	0	5	10
20	0	5	10	15
0	5	10	15	20
5	10	15	20	0
10	15	20	0	5

Tabela 4.3 Exemplo de L_1 com $n = 5$.

Na construção, através do algoritmo proposto, do quadrado L_2 de ordem n, são utilizados n símbolos distintos. Ao avançarmos uma coluna para a direita, os elementos sofrem um deslocamento de duas linhas para cima. Ou seja, um deslocamento de uma coluna para a direita provoca uma diminuição de 2 unidades na ordem da linha. Devido à ordem cíclica, cada símbolo estará presente em todas as colunas. Para garantirmos que o mesmo estará presente em todas as linhas, consideraremos a seguinte função:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{Z}_n & \longrightarrow \mathbb{Z}_n \\ \bar{k} & \longrightarrow \bar{i} - 2\bar{k} = \overline{i - 2k} \end{aligned}$$

onde:

$\bar{i}$ é a linha em que se encontra um determinado elemento, numa coluna inicial. Esta pode ser escolhida de forma arbitrária, devido à ordem cíclica das linhas e das colunas.

$\overline{k}$ é o deslocamento orientado para a direita em relação à coluna inicial.

Queremos mostrar que f é bijetiva, pois, sendo assim, deslocamentos diferentes em relação à coluna inicial, estariam relacionados à linhas diferentes, (injetiva). Além disso, cada elemento estaria presente em todas as linhas, (sobrejetiva). Isto garantiria que L_2 é um quadrado latino.

Como $\mathbb{Z}_n$ é um conjunto finito, a função f é bijetiva se, e somente se, f é injetiva.

Vamos supor que $f(\overline{k_1}) = f(\overline{k_2})$, então:

$$f(\overline{k_1}) = \overline{i - 2k_1} = \overline{i - 2k_2} = f(\overline{k_2})$$

Então:

$$i - 2k_1 \equiv i - 2k_2 \mod (n)$$

$$-2k_1 \equiv -2k_2 \mod (n)$$

$$2k_1 \equiv 2k_2 \mod (n).$$

Como n é ímpar, então $(2, n) = 1$. Isto nos permite concluir que:

$$k_1 \equiv k_2 \mod (n) \Longrightarrow \overline{k_1} = \overline{k_2}.$$

Como $f(\overline{k_1}) = f(\overline{k_2}) \Longrightarrow \overline{k_1} = \overline{k_2}$, então f é injetiva. Consequentemente, f é bijetiva. Portanto, L_2 também é um quadrado latino. □

No exemplo abaixo, podemos visualizar que, um elemento representado por X está presente em todas as linhas de um quadrado L_2, com $n = 7$.

col. $\overline{0}$	col. $\overline{1}$	col. $\overline{2}$	col. $\overline{3}$	col. $\overline{4}$	col. $\overline{5}$	col. $\overline{6}$	
					X		linha $\overline{1}$
	X						linha $\overline{2}$
				X			linha $\overline{3}$
X							linha $\overline{4}$
			X				linha $\overline{5}$
						X	linha $\overline{6}$
		X					linha $\overline{0}$

Tabela 4.4 Exemplo de um possível posicionamento para um elemento X, num quadrado L_2 com $n = 7$.

Na coluna $\overline{0}$ do exemplo acima, o elemento X está na linha $\overline{4}$, na coluna seguinte vai para linha $\overline{2}$, em seguida para linha $\overline{0}$, depois $\overline{-2} = \overline{5}$, $\overline{-4} = \overline{3}$, $\overline{-6} = \overline{1}$ e termina na linha $\overline{-8} = \overline{6}$.

Proposição 4.2. *L_1 e L_2 são quadrados latinos ortogonais.*

Demonstração. Sejam $x \in L_1$ e $y \in L_2$. Se x e y são elementos que estão em posições correspondentes, representaremos por (x,y) o elemento correspondente da matriz $L_1 + L_2$. No exemplo abaixo, estão representados L_1, L_2 e $L_1 + L_2$, respectivamente.

6	0	3
0	3	6
3	6	0

2	1	3
3	2	1
1	3	2

$(6,2)$	$(0,1)$	$(3,3)$
$(0,3)$	$(3,2)$	$(6,1)$
$(3,1)$	$(6,3)$	$(0,2)$

Tabela 4.5 L_1, L_2 e $L_1 + L_2$, respectivamente.

Observando a matriz $L_1 + L_2$, com os elementos na forma (x,y), representaremos por d_{xy} a distância orientada para cima, da linha ocupada por x, à linha ocupada por y. A ideia é que, em cada coluna, consideramos que x ocupa a linha zero, e as demais linhas são numeradas em ordem crescente, à medida que subimos. Então, d_{xy} é igual ao número da linha ocupada por y. Na matriz $L_1 + L_2$, do exemplo acima, os valores de d_{31} nas colunas 1, 2 e 3 são 0, 1 e 2, respectivamente.

No caso de um elemento (x,y) de uma matriz $L_1 + L_2$ de ordem n, x e y estão numa mesma linha, então $d_{xy} = 0$. Uma coluna à direita, de acordo com o algoritmo, x está uma linha acima, enquanto y está duas linhas acima, então $d_{xy} = 1$. Na coluna seguinte, temos $d_{xy} = 2$, e assim sucessivamente.

Independentemente da coluna em que iniciamos a verificação, pois a ordem é cíclica, ao chegarmos na última coluna antes de retornarmos à coluna inicial, temos $d_{xy} = n - 1$. Isto nos garante que dentre os pares ordenados formados por elementos em posições correspondentes, de L_1 e L_2, existe um único par (x,y), (caso contrário, existiria uma coluna diferente da inicial com $d_{xy} = bn$, b$\in \mathbb{N}$). Portanto L_1 e L_2 são quadrados latinos ortogonais. □

Já provamos que os quadrados L_1 e L_2, utilizados no algoritmo, são quadrados latinos ortogonais. Resta-nos provar que $L_1 + L_2$ é um quadrado mágico normal de ordem n.

Teorema 4.3. *Utilizando os quadrados latinos ortogonais L_1 e L_2, de acordo com o algoritmo sugerido, o quadrado $Q = L_1 + L_2$ é um quadrado mágico normal de ordem n.*

Demonstração. Devido ao teorema 1.5 (Euler), resta-nos mostrar que as diagonais do quadrado $Q = L_1 + L_2$ também tem soma igual a constante mágica M.

No quadrado latino L_1, os elementos de cada linha ou coluna são: $0.n$; $1.n$; $2.n$; $\dots$; $(n-1).n$. Já vimos no teorema 1.5, que a soma dos elementos de cada linha ou coluna de L_1 é

$$S_1 = \frac{n^3 - n^2}{2}.$$

De acordo com o algoritmo sugerido, ao escrevermos a coluna central de L_1 em ordem crescente, de $0.n$ até $(n-1).n$, os termos da coluna central também formam uma progressão aritmética de razão n. Como n é ímpar, a coluna central possui um termo central que é a média aritmética dos extremos. Então:

$$TC = \frac{0.n+(n-1).n}{2} = \frac{(n-1).n}{2}.$$

Onde TC = termo central da progressão.

			0			
			7			
			14			
			21			
			28			
			35			
			42			

Tabela 4.6 Exemplo do termo central de L_1 com $n = 7$.

No quadrado acima,

$$TC = \frac{(n-1).n}{2} = \frac{(7-1).7}{2} = 21.$$

O passo (2) do algoritmo sugerido diz que, em L_1, ao avançarmos uma coluna para a direita, os elementos devem sofrer um deslocamento de uma linha para cima. Isto faz com que os elementos da diagonal secundária de L_1 sejam todos iguais ao termo central.

28	35	42	0	7	14	21
35	42	0	7	14	21	28
42	0	7	14	21	28	35
0	7	14	21	28	35	42
7	14	21	28	35	42	0
14	21	28	35	42	0	7
21	28	35	42	0	7	14

Tabela 4.7 Exemplo de L_1 com $n = 7$.

Então, a soma dos elementos da diagonal secundária é

$$n.\left[\frac{(n-1).n}{2}\right] = \frac{n^3-n^2}{2} = S_1.$$

Queremos mostrar que na diagonal principal de L_1, seus elementos são: $0.n$; $1.n$; $2.n$;...; $(n-1).n$. Com este objetivo, vamos representar os elementos de L_1 da seguinte forma: $T_i = (i-1).n$, isto é, $T_1 = 0.n$; $T_2 = 1.n$; ...; $T_n = (n-1).n$.

Devido aos passos (1) e (2), ao avançarmos para a direita, o índice do termo, posicionado na diagonal principal, aumenta de duas em duas unidades.

T_5			T_1			
	T_7		T_2			
		T_2	T_3			
			T_4			
			T_5	T_6		
			T_6		T_1	
			T_7			T_3

Tabela 4.8 Elementos da diagonal principal de L_1 com $n = 7$.

Para garantirmos que não há termos repetidos na diagonal principal de L_1, consideraremos a seguinte função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}_n & \longrightarrow & \mathbb{Z}_n \\ & \overline{k} & \longrightarrow & \overline{i} + 2\overline{k} = \overline{i+2k} \end{array}$$

onde:

$\overline{i}$ é o índice do termo que se encontra na diagonal principal, numa coluna inicial. Esta pode ser escolhida de forma arbitrária, devido a ordem cíclica das linhas e das colunas.

$\overline{k}$ é o deslocamento orientado para direita em relação à coluna inicial.

Queremos mostrar que f é bijetiva, pois, dessa maneira, deslocamentos diferentes em relação à coluna inicial, estariam associados à termos diferentes, (injetiva). Além disso, todos os termos estariam presentes na diagonal principal, (sobrejetiva). Isto garantiria que não há elementos repetidos na diagonal principal.

Como $\mathbb{Z}_n$ é um conjunto finito, a função f é bijetiva se, e somente se, f é injetiva.

Vamos supor que $f(\overline{k_1}) = f(\overline{k_2})$, então:

$$f(\overline{k_1}) = \overline{i+2k_1} = \overline{i+2k_2} = f(\overline{k_2}).$$

Então:

$$i + 2k_1 \equiv i + 2k_2 \mod (n)$$

$$2k_1 \equiv 2k_2 \mod (n).$$

Como n é ímpar, então $(2, n) = 1$. Isto nos permite concluir que:

$$k_1 \equiv k_2 \mod (n) \Longrightarrow \overline{k_1} = \overline{k_2}.$$

Como $f(\overline{k_1}) = f(\overline{k_2}) \Longrightarrow \overline{k_1} = \overline{k_2}$, então f é injetiva. Consequentemente, f é bijetiva. Dessa maneira, os elementos da diagonal principal são: $0.n$; $1.n$; $2.n$;...; $(n-1).n$.

Então, a soma dos elementos da diagonal principal de L_1 é $0.n+1.n+2.n+\cdots+(n-1).n = S_1$. Portanto, em L_1, cada linha, coluna ou diagonal tem soma igual a

$$\frac{n^3-n^2}{2} = S_1.$$

Com relação ao quadrado L_2, o passo (2) do algoritmo sugerido diz que: ao avançarmos uma coluna para a direita, os elementos devem sofrer um deslocamento de duas linhas para cima.

De acordo com os passos (1) e (2) do algoritmo proposto, é possível perceber que os elementos da diagonal secundária são os mesmos elementos de cada linha ou coluna. Isto é: 1, 2, 3, ..., n.

2	4	6	1	3	5	7
3	5	7	2	4	6	1
4	6	1	3	5	7	2
5	7	2	4	6	1	3
6	1	3	5	7	2	4
7	2	4	6	1	3	5
1	3	5	7	2	4	6

Tabela 4.9 Exemplo de L_2 com $n = 7$.

Portanto, a soma dos elementos da diagonal secundária de L_2 é:

$$S_2 = \frac{(1+n).n}{2} = \frac{n+n^2}{2}.$$

Em relação aos elementos da diagonal principal de L_2, vamos dividir a análise em dois casos:

1. Se n é ímpar e ($n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$).

   Queremos mostrar que os elementos da diagonal principal de L_2 são 1, 2, 3,..., n. Com esse objetivo, vamos representar os elementos de L_2 da seguinte forma: $T_i = i$, isto é, $T_1 = 1$; $T_2 = 2$;... ; $T_n = n$.

   Como em L_2, ao avançarmos uma coluna para a direita, os elementos devem sofrer um deslocamento de duas linhas para cima. Ao avançarmos para a coluna da direita, na diagonal principal, o índice do termo aumenta de três em três unidades.

T_2			T_1			
	T_5		T_2			
		T_1	T_3			
			T_4			
			T_5	T_7		
			T_6		T_3	
			T_7			T_6

T_2		T_1		
	T_5	T_2		
		T_3		
		T_4	T_1	
		T_5		T_4

Tabela 4.10 Exemplos dos elementos da diagonal principal de L_2, com $n = 7$ e $n = 5$, respectivamente.

Para garantirmos que não há termos repetidos na diagonal principal de L_2, consideraremos a seguinte função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}_n & \longrightarrow & \mathbb{Z}_n \\ & \overline{k} & \longrightarrow & \overline{i} + 3\overline{k} = \overline{i + 3k} \end{array}$$

onde:

$\overline{i}$ é o índice do termo que se encontra na diagonal principal, numa coluna inicial. Esta pode ser escolhida de forma arbitrária, devido a ordem cíclica das linhas e das colunas.

$\overline{k}$ é o deslocamento orientado para direita em relação à coluna inicial.

Vamos supor que $f(\overline{k_1}) = f(\overline{k_2})$, então:

$$f(\overline{k_1}) = \overline{i + 3k_1} = \overline{i + 3k_2} = f(\overline{k_2}).$$

Então:

$$i + 3k_1 \equiv i + 3k_2 \mod (n)$$

$$3k_1 \equiv 3k_2 \mod (n).$$

Como $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$, então $(3, n) = 1$. Isto nos permite concluir que:

$$k_1 \equiv k_2 \mod (n) \Longrightarrow \overline{k_1} = \overline{k_2}.$$

Como $f(\overline{k_1}) = f(\overline{k_2}) \Longrightarrow \overline{k_1} = \overline{k_2}$, então f é injetiva. Consequentemente, f é bijetiva. Sendo assim, os elementos da diagonal principal neste caso são: 1, 2, 3,..., n. Isto faz com que a soma dos elementos da diagonal principal, neste caso, também seja igual a S_2. Assim, toda linha, coluna ou diagonal de L_2, nesse caso, tem soma:

$$S_2 = \frac{(1 + n).n}{2} = \frac{n + n^2}{2}.$$

2. Se n é ímpar e $3 \leq n = 3k$.

Como $3 \leq n = 3k$ e n é ímpar, então $k = 2b+1$, $b \in \mathbb{N}$. O elemento da diagonal principal que está localizado na coluna central, de acordo com o algoritmo utilizado, é o termo central, isto é,

$$TC = \frac{n+1}{2} = \frac{(3k)+1}{2} = \frac{3(2b+1)+1}{2} = \frac{6b+4}{2} = 3b+2.$$

Já sabemos que ao avançarmos para a coluna da direita, na diagonal principal, o índice do termo aumenta de três em três unidades. Como o termo central é da forma T_{3b+2} e n é da forma $3k$, ao atingir T_{n-1}, o termo seguinte será $T_{n+2} = T_2$. Dessa maneira, todos os elementos da diagonal principal são da forma T_{3b+2}. Neste caso, só aparecem $\frac{n}{3}$ números distintos na diagonal principal, e cada um deles aparece 3 vezes.

T_2				T_1				
	T_5			T_2				
		T_8		T_3				
			T_2	T_4				
				T_5				
				T_6	T_8			
				T_7		T_2		
				T_8			T_5	
				T_9				T_8

Tabela 4.11 Exemplo dos elementos da diagonal principal de L_2 com $n = 9$.

Dessa forma, a soma dos elementos da diagonal principal S_D é:

$$S_D = 3.\sum_{i=0}^{\frac{n}{3}-1}(2+3i)$$

$$S_D = 3.\left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{3}-1} 2 + \sum_{i=0}^{\frac{n}{3}-1} 3i\right) = 3.\left[\frac{2n}{3} + \left(3.0+3.1+\cdots+3\left(\frac{n}{3}-1\right)\right)\right]$$

$$= 3.\left[\frac{2n}{3} + \frac{\left(3.0+3\left(\frac{n}{3}-1\right)\right).\frac{n}{3}}{2}\right] = 3.\left[\frac{2n}{3} + \frac{(n-3).n}{3.2}\right] = 2n + \frac{n^2-3n}{2} =$$

$$= \frac{4n+n^2-3n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = S_2.$$

Então, a soma dos elementos de uma linha, coluna ou diagonal de L_2 é:

$$\frac{n^2+n}{2}.$$

Sendo assim, a soma dos elementos correspondentes de L_1 e L_2 gera um quadrado com constante mágica

$$M = S_1 + S_2 = \frac{n^3 - n^2}{2} + \frac{n + n^2}{2} = \frac{n^3 + n}{2} = \frac{\left(1 + n^2\right).n}{2}.$$

O resultado encontrado para a constante M é justamente o valor apresentado por Euler, para a constante mágica de um quadrado mágico normal de ordem n. Portanto, o quadrado gerado pelo algoritmo apresentado é um quadrado mágico normal de ordem n.

$\square$

CAPÍTULO 5

Proposta didática

Os objetivos desta proposta são:

Apresentar para os estudantes os seguintes conceitos:

- Quadrado latino
- Quadrados latinos ortogonais
- Quadrado mágico

Apresentar os seguintes algoritmos:

- Algoritmo para construção de um quadrado mágico normal de ordem 3, utilizando quadrados latinos ortogonais.
- Algoritmo para construção de um quadrado mágico normal de ordem ímpar, utilizando quadrados latinos ortogonais.

Caso queira, o professor pode:

- Explorar o conceito de par ordenado.
- Utilizar conhecimentos sobre matrizes.

O tempo necessário para a execução da proposta vai depender da maturidade e do interesse dos estudantes, assim como do conteúdo a ser explorado, ficando esta decisão a critério do professor.

A linguagem utilizada, na proposta didática apresentada a seguir, necessita de conhecimentos sobre pares ordenados e matrizes, mas o professor pode, caso queira, utilizar uma linguagem mais acessível, permitindo que outros estudantes tenham acesso aos conteúdos presentes nesta proposta.

Muitos estudantes, provavelmente sem ter consciência disto, já tiveram contato com quadrados latinos através do Sudoku, que consiste em preencher um quadrado latino, porém, com exigências adicionais.

Proposta didática:

1. Apresentar a definição de quadrado latino.

   Um Quadrado Latino de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n, contendo n elementos distintos, de forma que cada linha ou coluna não possua elementos repetidos.

2. Apresentar alguns exemplos de quadrados latinos.

2	0	1
0	1	2
1	2	0

2	4	1	3	5
3	5	2	4	1
4	1	3	5	2
5	2	4	1	3
1	3	5	2	4

Tabela 5.1 Exemplos de quadrados latinos de ordem 3 e 5, respectivamente.

3. Desafiar os alunos a construirem um quadrado latino L_1 com os elementos 0, 3 e 6.

4. Após os estudantes terem realizado o item anterior, perguntar se o quadrado latino que eles encontraram possui uma diagonal com elementos iguais.

5. Pedir para os estudantes verificarem se é possível construir um quadrado latino com os elementos 0, 3 e 6, sem que todos os elementos de uma das diagonais sejam iguais.

6. Desafiar os alunos a construirem um quadrado latino L_2 com os elementos 1, 2 e 3.

7. Perguntar qual a diagonal do quadrado L_1, encontrado, que possui elementos iguais.

8. Perguntar qual a diagonal do quadrado L_2, encontrado, que possui elementos iguais.

9. Perguntar se os quadrados L_1 e L_2, encontrados, possuem a mesma diagonal com elementos iguais.

10. Pedir para os estudantes formarem pares ordenados com os elementos correspondentes de L_1 e L_2, nessa ordem.

11. Apresentar a definição de quadrados latinos ortogonais.

    Dois quadrados latinos de mesma ordem são denominados ortogonais se, os pares ordenados, formados por elementos em posições correspondentes, forem todos distintos.

12. Perguntar quem encontrou quadrados latinos L_1 e L_2 ortogonais.

13. Pedir aos estudantes que adicionem os elementos correspondentes de L_1 e L_2, obtendo $L_1 + L_2$.

14. Apresentar a definição de quadrado mágico normal de ordem n.

    Um quadrado mágico normal de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n, contendo n^2 valores inteiros distintos, numerados de 1 a n^2, sendo n um número natural maior do que ou igual a 3. Além disso, todas as linhas, colunas e diagonais deste quadrado apresentam a mesma soma M, denominada constante mágica.

15. Apresentar um exemplo de quadrado mágico normal de ordem 3.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Tabela 5.2 Quadrado mágico normal de ordem 3.

16. Pedir aos alunos que verifiquem se, o quadrado $L_1 + L_2$ encontrado, é um quadrado mágico normal de ordem 3.

17. Apresentar o algoritmo para construção de um quadrado mágico normal de ordem 3, utilizando quadrados latinos ortogonais.

    - Construir um quadrado latino L_1 de forma que, uma das diagonais seja formada pelos elementos 0, 3 e 6; e a outra diagonal possua os três elementos iguais a 3.
    - Construir um quadrado latino L_2 de forma que, uma das diagonais seja formada pelos elementos 1, 2 e 3; e a outra diagonal possua os três elementos iguais a 2. Mas a diagonal escolhida para ter os três elementos iguais, de L_1, deve ser diferente da diagonal escolhida para possuir os três elementos iguais, de L_2.
    - Adicionando as matrizes L_1 e L_2, obtemos um quadrado mágico normal de ordem 3.

18. Propor que os alunos usem o algoritmo apresentado no item anterior, para construir um quadrado mágico normal de ordem 3.

19. Apresentar o algoritmo para construção de um quadrado mágico normal de ordem n ímpar, utilizando quadrados latinos ortogonais.

    São utilizados dois quadrados latinos ortogonais L_1 e L_2. O quadrado L_1 tem os elementos $0.n$, $1.n$, $2.n$, $\ldots$, $(n-1).n$. Já os elementos de L_2 são 1, 2, 3, $\ldots$, n. O algoritmo consiste em três passos:

    (a) A construção de cada quadrado latino deve ser iniciada pela coluna central, colocando os elementos em ordem crescente.

(b) Em L_1, ao avançarmos uma coluna para a direita, os elementos devem sofrer um deslocamento de uma linha para cima.
Em L_2, ao avançarmos uma coluna para a direita, os elementos devem sofrer um deslocamento de duas linhas para cima.

(c) Adicionando os elementos correspondentes de L_1 e L_2, obtemos um quadrado mágico normal de ordem n.

20. Propor que os alunos usem o algoritmo, apresentado no item anterior, para construir um quadrado mágico normal de ordem 5.

Apêndice A

Exemplo de construção de um quadrado mágico normal de ordem 4 utilizando quadrados latinos ortogonais

De acordo com a fórmula sobre a constante mágica, demonstrada no capítulo 2, temos que o valor da mesma para $n = 4$ é:

$$M = \frac{(1+n^2).n}{2} = \frac{(1+4^2).4}{2} = 34$$

Utilizaremos dois quadrados latinos ortogonais L_1 e L_2. Os elementos de L_1 serão 0.4, 1.4, 2.4 e 3.4, isto é, 0, 4, 8 e 12. Os elementos de L_2 serão 1, 2, 3 e 4. A utilização destes quadrados latinos L_1 e L_2 garante que $L_1 + L_2$ é um quadrado semimágico de ordem 4, conforme o teorema de Euler, apresentado e demonstrado no capítulo 1.

Para que $L_1 + L_2$ seja um quadrado mágico normal de ordem 4, precisamos de alguma maneira garantir que as diagonais também apresentem soma 34. Uma maneira de conseguirmos isto é impondo que os elementos 0, 4, 8 e 12 estejam presentes nas duas diagonais de L_1, e os elementos 1, 2, 3 e 4 estejam presentes nas duas diagonais de L_2.

No exemplo abaixo conseguimos as condições relatadas acima.

0	8	12	4
12	4	0	8
4	12	8	0
8	0	4	12

1	4	2	3
3	2	4	1
4	1	3	2
2	3	1	4

1	12	14	7
15	6	4	9
8	13	11	2
10	3	5	16

Tabela A.1 Exemplos de quadrados L_1, L_2 e $L_1 + L_2$, de ordem 4.

Como L_1 e L_2, do exemplo acima, são quadrados latinos e podemos constatar que o quadrado $L_1 + L_2$, acima, é um quadrado mágico normal de ordem 4, podemos garantir que os quadrados L_1 e L_2 utilizados são ortogonais (Se dois quadrados latinos L_1 e L_2 não são ortogonais, então a soma $L_1 + L_2$ apresenta pelo menos um elemento repetido). Então, podemos garantir que, nesse exemplo utilizamos um par de quadrados latinos ortogonais para gerar um quadrado mágico normal de ordem 4.

Referências Bibliográficas

[1] EULER, L. - *Investigations on a new type of magic square* translation of the original "Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques", Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen 9, Middelburg 1782, pp. 85–239

[2] EULER, L. - *On Magic Squares* translation of the original "De quadratis magicis", Commentationes arithmeticae 2 (1849).

[3] KRAITCHIK, M. - *Mathematical recreations* W.W. Norton and Company, 1942.

[4] SWETZ, F. - *Legacy of the Luoshu : the 4,000 year search for the meaning of the magic square of order three* A K Peters ltd, Wellesley, 2008.

[5] ANDRADE, L.N. - *Mais sobre Quadrados Mágicos* Revista do professor de matemática 41, SBM, 1999.

[6] HEFEZ, A. - *Elementos de Aritmética* Coleção Textos Universitários SBM, Rio de Janeiro, 2005.

[7] CAMERON, P.J. - *Combinatorics: topics, techniques, algorithms* Cambridge University Press, 1994.

[8] OSMUNDSEN, J.A. - *Major Mathematical Conjecture Propounded 177 Years Ago Is Disproved; 3 Mathematicians Solve Old Puzzle* The New York Times, april 26, 1959.
http://select.nytimes.com/gst/abstract.html?res=F50613FB355C1A7B93C4AB
178FD85F4D8585F9

[9] *Graeco-Latin Square* Scientific American, november, 1959.

[10] GONÇALVES, A.O. - *Quadrados mágicos* 3*x*3*: um novo olhar* Revista do professor de matemática 59, SBM, 2006.

[11] - *Quadrados Mágicos* Revista do professor de matemática 39, SBM, 1999.