**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

# Construção de Sólidos: Uma Aplicação de Atividades.

por

**Bruno Augusto Eloi da Costa[1]**

sob orientação do

**Prof. Jorge Antonio Hinojosa Vera**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT DM-UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Julho/2013
Recife – PE

______________________

[1]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Ficha Catalográfica

C837c Costa, Bruno Augusto Eloi da

Construção de sólidos: uma aplicação de atividades / Bruno Augusto Eloi da Costa. – Recife, 2013.

89 f. : il.

Orientadora: Jorge Antonio Minojosa Vera.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Matemática, Recife, 2013.

Inclui anexo(s) e referências.

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Sólidos 3. Poliedro I. Vera, Jorge Antonio Minojosa, orientador II. Título

CDD 510.7

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

# Construção de Sólidos: Uma Aplicação de Atividades.

por

**Bruno Augusto Eloi da Costa**

Dissertação julgada adequada para obtenção do titulo de mestre em Matemática, defendida e aprovada por unanimidade em **09/07/2013** pela Comissão Examinadora.

Orientador

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera
PROFMAT, DM-UFRPE

Banca Examinadora

Anete Soares Cavalcanti

Profa. Dra. Anete Soares Cavalcanti
PROFMAT, DM-UFRPE

Profa. Dra. Anna Paula de Avelar Brito Lima
DED-UFRPE

Vicente F. de Sousa Neto

Prof. Dr. Vicente Francisco de Sousa Neto
Universidade Católica de Pernambuco – Unicap.

**julho - 2013**

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, e também à minha família que sempre está ao meu lado em todos os momentos da minha vida, não podendo esquecer também dos amigos que fiz no Programa, PROFMAT.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a minha família a equipe de professores que muito contribuiu para o meu aperfeiçoamento na área de matemática, e em especial ao professor Jorge Antônio Hinojosa Vera e a banca.

Agradeço também aos meus colegas de sala que propiciaram quase dois anos de muito companheirismo e amizade.

# RESUMO

As dificuldades de visualizar sólidos geométricos por parte de alunos do segundo ano do ensino médio faz com que muitos deles não se sintam atraídos por esse conteúdo tão importante e interessante. Quando o aluno vê, por exemplo, um cubo desenhado em perspectiva no quadro, muitas vezes ele não está entendendo de fato a figura, e para ter certeza disso basta pedir para ele contar o número de arestas ou vértices do poliedro, o que em muitos casos ele não consegue imediatamente. Podemos dar outro exemplo, que são as alturas e apótemas que quando são traçadas no quadro geram muitas dúvidas nos estudantes. Com base nisso decidimos aplicar uma atividade que fizesse o estudante construir os sólidos que estudamos, trazendo uma parte prática ao assunto dos sólidos geométricos. Iremos permitir que os alunos usem quaisquer materiais para fazer a construção, pois o intuito dessa atividade é fazer com que o aluno no ato da construção do seu sólido ou na observação do sólido construído tire suas dúvidas quanto às figuras ou segmentos não visualizadas de outrora. Essa atividade foi feita em sala de aula ou em outro ambiente, como em casa ou biblioteca da escola, com supervisões periódicas para auxiliar os alunos na construção. Essa atividade contribuiu muito para dirimir as dificuldades que os educandos têm na visualização de um sólido geométrico trazendo assim uma maior facilidade no aprendizado do referido assunto.

Palavras-chave: Construção, Sólidos geométricos, Poliedro, Parte prática, facilidade no aprendizado.

## ABSTRACT

The difficulties of visualizing geometric solids by students of the second year of high school means that many of them do not feel attracted to such content as important and interesting. When the student sees, for example, a cube drawn in perspective in the context he often does not understand in fact the figure, and to make sure that just ask him to count the number of edges or vertices of the polyhedron, which in many cases it fails immediately. We can give another example which are the heights and when apótemas are drawn within generate many doubts in students. Based on this we decided to implement an activity that makes the student build the solids studied, bringing a practical part of the subject geometric solids. We will let students use materials which wants to build, since the purpose of this activity is to make the student at the time of its solid construction or observation of the solid built ask your questions about the figures, or segments not visualized once. This activity was done in the classroom or in another setting, such as at home or school library, with periodic supervision to assist students in building. This activity contributed much to resolve the difficulties that students have in view of a geometric solid thus bringing greater ease in learning the said issue.

Keywords: Construction, Geometric solids, Polyhedron, Practice, ease of learning.

# Sumário

## Introdução

O ensino do conteúdo de sólidos geométricos nos dias de hoje, na maioria das escolas de Pernambuco, está limitado ao uso de recurso didático, tais como livros ou apostilas, e ao uso do quadro branco, onde todos esses meios são regiões planas. Então, como ensinar um conteúdo tridimensional no plano? Só fazendo figuras em perspectiva, que em muitos casos o aluno não consegue visualizar sua forma tridimensional adequadamente, deixando de observar aspectos relevantes do conteúdo, como por exemplo, uma face, ou um segmento como a altura ou apótema de uma face. No intuito de diminuir essas dificuldades iremos aplicar uma atividade para que os alunos construam esses sólidos no espaço tridimensional de modo que os mesmos tenham uma aprendizagem mais eficaz. Nessa atividade iremos dividir em cinco grupos uma sala com 40 alunos do 2º ano do ensino médio, cinco grupos de oito estudantes cada, e delimitar a cada um desses grupos sólidos geométricos para que os estudantes possam trabalhar na construção dos mesmos. Não espera-se que nessa atividade existam problemas de falta de estrutura adequada a aplicação da atividade, visto que a maioria dos alunos da escola tem a estrutura física oferecida pela escola e os materiais usados podem ser recicláveis. A atividade consistirá de que os alunos façam as construções em tempo complementar fora da sala de aula, sem supervisão mas podendo usar a estrutura da escola, deixando para as aulas o momento de aprendizado dos conteúdos e direcionamentos das construções, ou seja: O professor que orienta esses alunos tem o papel de mediador do conhecimento, fazendo a ponte entre os referidos conhecimentos e os alunos, preenchendo as lacunas quando necessário. Ao final das construções os grupos que foram formados na sala inicialmente, farão uma apresentação para o grande grupo mostrando aos demais os meios aos quais fizeram suas construções, tais como em que momento, quais os materiais usados, que sequência usada para fazer os sólidos. E também devem fazer uma ponte com conteúdo que se ministra em sala, ou seja: devem calcular os comprimentos, áreas e volumes dos sólidos que eles mesmos construíram. E finalmente iremos fazer uma avaliação geral sobre os impactos dessa atividade sobre a aprendizagem dos estudantes, tais como se o aluno se sentiu mais atraído pelo conteúdo visto que podemos chamar de uma atividade lúdica o que foi posto, e também se as dificuldades que podemos constatar em alguns alunos quanto à visualização de partes dos sólidos no plano foi minimizada ou extinta. Iremos mensurar esses aspectos através do contato com o aluno durante todo o processo e ao final com uma avaliação escrita.

## Capitulo 1: Descrição da atividade

### Fundamentação teórica

Iniciamos este tópico, destacando a seguinte questão:

Porque estudamos geometria? Para Freudenthal (1973) a geometria começou bem antes de Euclides, quando o homem começou a organizar as suas experiências espaciais. Buscando a natureza destas experiências, poder-se-ia admitir as ideias de Eves (1969), que afirma que o homem, através da percepção, reconhecia e comparava as formas existentes na natureza como, por exemplo, o contorno circular da Lua, as teias de aranha, que se parecem com polígonos. Assim , ao observar a natureza e perceber regularidades nas formas, a mente reflexiva do homem construía uma geometria intuitiva, que depois viria a se tornar uma geometria científica. Logo, para responder a pergunta inicial deve-se ter em mente que a geometria é uma ciência aplicável ao nosso cotidiano, onde se pode apreciar esse fato quando queremos melhorar a produtividade de uma plantação ou quando queremos calcular o consumo médio do veículo para calcular sua rentabilidade através do volume de combustível e distância percorrida pelo carro. Engels (1975) também afirma a importância da geometria no cotidiano quando afirma que a capacidade do homem de geometrizar a realidade nasceu da necessidade do trabalho, em outras palavras, o homem por necessidade de se desenvolver procura aperfeiçoar a geometria para usa-la a seu favor.

Segundo as Orientações Curriculares para o ensino Médio (2006):

> O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes. (BRASIL, 2006, p.75)

Com base nas ideias acima de que o interesse pela geometria primeiro atende pelo visual e em seguida a normatização de regras, a atividade proposta visa colocar o aluno em contato com o sólido geométrico para que o mesmo possa, com o contato da figura espacial, começar a desenvolver uma teoria sobre ela.

**1.1-Descrição da atividade**

A sala destinada ao nosso experimento, foi dividida em 5 grupos que teriam de fazer construções de sólidos geométricos divididos em 5 temas: prismas, pirâmides, cilindro, cone e esfera. Os alunos deveriam construir os referidos sólidos de forma artesanal, ou seja, deveriam construir todas as figuras que formam o sólido, não podendo comprá-las prontas, todavia poderiam usar quaisquer materiais que achassem necessários. Algumas sugestões para usar como matérias primas foram: papelão, palitos, plástico, cartolina, papel veludo e também poderiam usar fita durex, cola, e papéis coloridos para destacar algo que achassem interessantes.

Outro tópico da atividade foi que, depois de confeccionados os sólidos, os estudantes deveriam calcular suas dimensões tais como: sua altura, áreas e volumes. E ficaria à critério dos mesmos escolherem o tamanho de cada sólido e as medidas utilizadas, porém foram exigidas algumas construções de cada grupo, em outras palavras: cada grupo deveria construir, no mínimo, os sólidos relatados na lista abaixo.

| | |
|---|---|
| Grupo de prismas<br>(8 alunos) | i) Cubo<br>ii) Paralelepípedo<br>iii) Prisma de base triangular ou Hexagonal |
| Grupo de Pirâmides<br>(8 alunos) | i) Tetraedro regular<br>ii) Pirâmide de base quadrangular<br>iii) Octaedro. |
| Grupo de Cilindros<br>(8 alunos) | i) Cilindro de base e altura qualquer<br>ii) Formar dois cilindros com medidas distintas e mesmo volume |
| Grupo de Cones<br>(8 alunos) | i) Cone de raio e altura qualquer<br>ii) Cone equilátero |
| Grupo de Esfera(*)<br>(8 alunos) | i) Esfera de raio qualquer<br>ii) Esfera inscrita em um cubo |

*Para o grupo de esfera vamos considerar uma aproximação da construção da mesma. Visto que a construção deste sólido geométrico é um tanto quanto complexa, levando-se em conta que a construção será feita de modo artesanal.

Essa atividade foi feita em um mês, da seguinte forma: levando-se em consideração que a disciplina de matemática do ensino médio no Estado de Pernambuco conta com 4 aulas semanais, dividimos nossa atividade em três partes e usamos um total de 16 aulas ou 4 semanas. Pode-se considerar mais 2 aulas, além das 16, para avaliação mensal que dará a resposta se esta atividade melhorou o desempenho dos alunos com relação a experiências do proponente dessa dissertação em anos anteriores em relação a mesma série.

O quadro a seguir, resume o cronograma de atividades:

| | |
|---|---|
| 4 aulas (uma por semana) | Para juntar os grupos em sala e verificar como estavam os andamentos das construções e ajudar os grupos com dúvidas. |
| 10 aulas (três em cada uma das primeiras semanas e uma na última semana) | Para conduzir os conteúdos, calculando os comprimentos, áreas e volumes e fazendo exercícios que estão em anexo nessa dissertação. |
| 2 aulas (na última semana) | Para apresentação de cada um dos grupos para os demais alunos da sala dos resultados obtidos. |
| 2 aulas (aulas depois da atividade) | Para fazer a avaliação mensal que consta como nota curricular para os alunos. |

A fim de auxiliar na construção dos sólidos também foi permitido aos estudantes o uso de régua, compasso, transferidor e demais utensílios matemáticos. Os estudantes também deveriam fazer a apresentação dos sólidos construídos para a turma e mostrar como construíram os mesmos, calculando suas medidas, áreas e volumes. Essa apresentação seria feita em uma hora e trinta minutos, o correspondente a duas aulas de referencio no colégio.

## 1.2-Objetivos

O principal objetivo dessa atividade é a de estimular a imaginação do espaço tridimensional do estudante do 2º ano e faze-lo participar da montagem dos sólidos. Além disso, incentivar à pesquisa, visto que eles devem procurar formas das mais variadas para fazer as construções. Também permitiremos inserir ao conteúdo de sólidos geométricos uma parte prática e lúdica fazendo com que essa parte do conteúdo de geometria não fique restrita aos desenhos com perspectiva em sala de aula. Com isso, queremos diminuir as dificuldades que os alunos possuem quando não conseguem visualizar um solido na lousa, aumentando a possibilidade de um melhor entendimento do conteúdo.

## 1.3-Justificativa da escolha

Conforme sabemos a geometria espacial é um ramo da geometria com uma infinidade de aplicações, e em geral podemos constatar a todo o momento um sólido geométrico seja em um campo de futebol quando observamos uma bola que tem formato esférico, seja numa lanchonete ao pegarmos latinha de refrigerante, o qual é semelhante a um cilindro, ou em casa quando pegamos um livro que tem a forma de um paralelepípedo.

Nossa atividade proposta “construção de sólidos da geometria espacial” consiste em fazer com que o aluno entre em contato com os sólidos geométricos construídos pelos próprios, no intuito de que o aluno compreenda melhor o conteúdo tendo a oportunidade de ver um sólido que, em muitos casos, só é visto através de figuras planas desenhadas em quadros ou livros. Deste modo, esperamos que conceitos de medidas tais como: altura, arestas, faces, volumes e outras sejam bem assimilados com essa atividade.

Para levar adiante essa atividade os estudantes devem usar a teoria de sólidos geométricos (prismas, pirâmides, cone, cilindro e esfera) que será ministrada em sala de aula, ou seja, será vista no decorrer da atividade. Serão necessários também conhecimentos matemáticos aprendidos em series anteriores, Assim em breve estaremos fazendo uma retomada dos conteúdos anteriormente vistos o que facilita a justificar seu aprendizado.

Destacamos no quadro a seguir, alguns conteúdos e suas respetivas séries de estudo:

| Conteúdo | Série referente e justificativa do uso. |
|---|---|
| Áreas de figuras planas | Conteúdo visto na 8º série ou 9º ano do ensino fundamental, será necessário para calcularmos às áreas das faces dos poliedros (*) ou de sólidos tais como cilindro, cone.<br>Quando falamos de áreas de figuras planas estamos falando de áreas de polígonos regulares, trapézios, círculo. |
| Teorema de Pitágoras e relações métricas no triângulo retângulo | Conteúdo também visto na 8º serie ou 9º ano do ensino fundamental, será necessário para cálculo de comprimentos como alturas e apótemas (**). |
| Ângulos e polígonos | Conteúdo visto no 6º e 8º anos, antigas 5º e 6º séries, respectivamente, serão necessários para construção dos polígonos que formarão nossos poliedros |
| Circunferência | Visto no 9º ano do ensino fundamental, será necessário quando usarmos a área lateral de um cone e relacionarmos suas medidas com as de um setor circular. |

A definição de poliedro é a que se segue:

(*) Considere um número finito n ($n \geq 4$) de polígonos convexos, tal que:

i) dois desses polígonos não estejam no mesmo plano;

ii) cada lado de qualquer um desses polígonos seja comum a dois e somente dois polígonos;

iii) O plano de cada polígono deixe os demais polígonos em um mesmo semiespaço.

Desse modo, ficam determinados n semiespaços, cada um com sua origem no plano de um dos polígonos e contendo os demais polígonos. Chamamos de poliedro convexo a intersecção desses semiespaços.

Temos a seguir a seguinte definição:

(**) Apótema: Apótema da base é a distância do centro do polígono da base regular até um de seus lados, e apótema de uma pirâmide é a altura de um dos triângulos das faces laterais.

## Capítulo 2: Avaliação prévia

### 2.1-Avaliação dos resultados previamente esperados

De acordo com nossa divisão dos estudantes, em 5 grupos, destacamos a seguir, as funções explicitas a serem desenvolvidas por cada um destes grupos.

#### 2.1.1-Prismas

Espera-se que o grupo de prismas consiga fazer o cubo, paralelepípedo e prisma de base hexagonal, primeiramente fazendo as figuras planas que os formam e em seguida façam uma colagem usando cola ou fita durex. Logo se entende que os sólidos serão feitos usando palitos, cartolina, papelão ou outro material similar.

#### 2.1.2-Pirâmides

O grupo de pirâmides deve fazer o tetraedro, prisma de base triangular e octaedro da mesma forma que o grupo de prismas, usando-se primeiro da construção das faces desses sólidos para depois vir a sua montagem. Esperamos sólidos feitos de papelão, cartolina ou palitos, visto que eles podem escolher quaisquer materiais para sua construção, desde que os sólidos sejam construídos.

#### 2.1.3-Cilindros

O grupo de cilindros deve construir um cilindro de raio e altura qualquer e dois cilindros de medidas distintas e mesmo volume. Então se espera que usem um material mais flexível para fazer a área lateral tal com a cartolina ou um plástico flexível podendo ser garrafas pet.

#### 2.1.4-Cones

O grupo de cones deve seguir a linha do grupo de cilindros, visto que eles precisarão de material flexível para a construção da área lateral. Então para a construção do cone equilátero e do cone de medidas quaisquer, espera-se que usem cartolinas, papeis plásticos ou similares.

#### 2.1.5-Esferas

No grupo de esfera espera-se a utilização de um material diferenciado dos demais grupos, tais como massa de modelar, gesso ou similares e utilização de uma forma pronta em formato esférico. Espera-se também que eles usem em algum momento uma esfera já pronta tais aquelas que se vendem em papelarias de isopor. Essa esfera pronta pode servir de molde para construção de outra esfera ou construir outro cubo circunscrito a ela com base nos sólidos solicitados no capítulo anterior. O grupo também deve adotar palitos ou similares na construção do cubo circunscrito a esfera para facilitar a inserção da esfera.

### 2.2-Avaliação das dificuldades previamente esperadas

Com base nas experiências do proponente desta dissertação, elencaremos a seguir, uma série de dificuldades que em geral são apresentadas pelos estudantes quando as suas primeiras tentativas de construir sólidos geométricos.

#### 2.2.1-Prismas

Avalia-se que a principal dificuldade para os alunos desse grupo será o corte das figuras, pois demanda alguma precisão, ou seja, se depois de desenhado um hexágono regular na cartolina o corte será feito de forma linear, sem ondulações . Há também a preocupação com a utilização do material adequado para que as figuras fiquem rígidas ao ponto de não prejudicar as junções.

#### 2.2.2-Pirâmides

Já no grupo de pirâmides além das dificuldades similares às do grupo de prismas temos também que observar que pode haver dúvidas de como construir uma pirâmide reta, ou seja, lidando com a projeção do vértice da pirâmide. Também se espera alguma dificuldade na construção do octaedro, para que se forem feitas duas pirâmides de base quadradas idênticas elas tenham as mesmas medidas e formas para que tenhamos um octaedro regular.

#### 2.2.3-Cilindros

Nos cilindros, a maior dificuldade esperada será lidar com o número irracional $\pi$ na base e na área lateral principalmente, pois se usarmos uma aproximação de $\pi$ como recomendam os livros 3,14 ao fazermos a área lateral do cone irá ter uma falha de cm como na figura 1 abaixo.

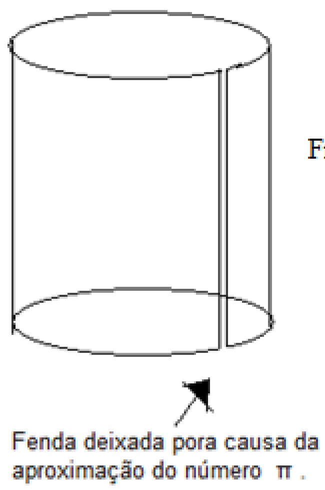



Fig 1

**2.2.4-Cones**

No cone aponta-se para dificuldade primeiramente a construção da área lateral, pois teremos que relacionar um ângulo de certo setor circular e seu comprimento com comprimento do círculo da base, e também temos o mesmo problema do uso aproximado do $\pi$ que pode gerar uma pequena fenda ou fazer com que o círculo da base não encaixe perfeitamente com a base circular (Veja a figura 2).

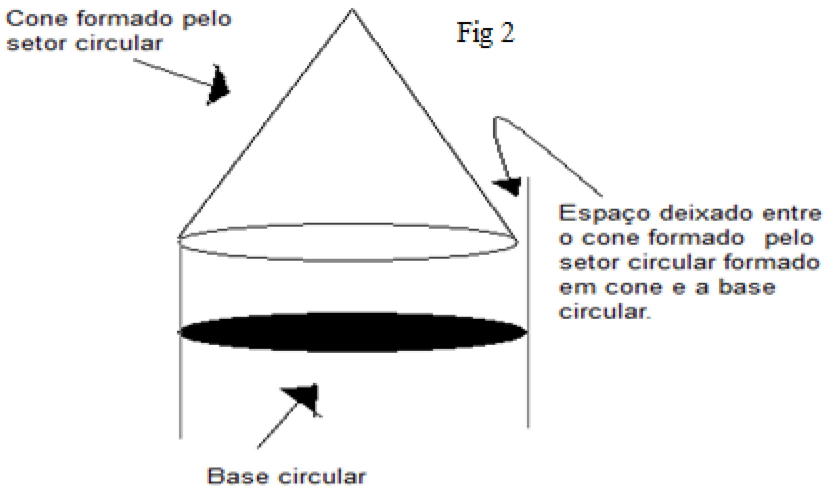



Fig 2

**2.2.5-Esferas**

Para esse grupo espera-se que as dificuldades iniciais de procurar meios de formar uma esfera sejam muitas, pois não há maneiras como dos demais grupos. Além disso, entende-se que haverá dificuldade na formação do cubo que circunscreva a esfera visto que eles deverão calcular uma relação entre o raio do cubo e o raio da esfera e esse assunto será abordado por último, por causa da sequencia cronológica dos tópicos ministrados em sala de aula.

## Capitulo 3: Metodologia de aplicação

Neste capítulo iremos primeiro formalizar alguns conceitos básicos que os alunos devem já ter consigo para que possamos aprimorar a teoria geométrica, em seguida iremos dar segmento à metodologia de aplicação.

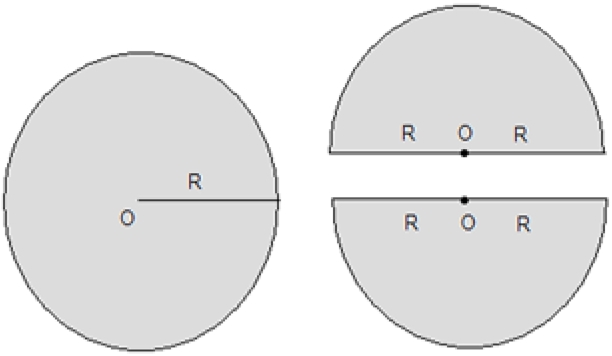
### 3.1-Definições e cálculos teóricos

**3.1.1-Círculo**

Sabe-se que o número $\pi$ é a razão entre o comprimento de um circunferência e seu diâmetro, logo $\pi = \frac{C}{R}$ o que podemos concluir que $C = 2.\pi$.R.

Se reunirmos a circunferência e todos os seus pontos internos, obteremos uma figura chamada **círculo**. Para calcularmos a área de um circulo primeiramente divide-se o círculo em duas partes iguais.

Fig 3




E em seguida divide-se cada metade do círculo em um número de setores circulares de mesma área e em uma quantidade muito grande.

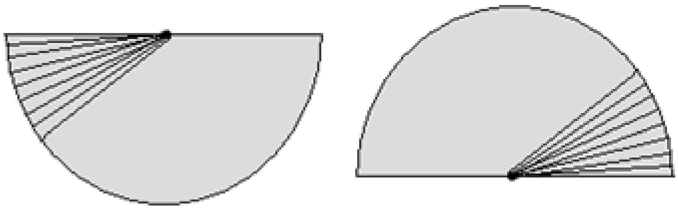
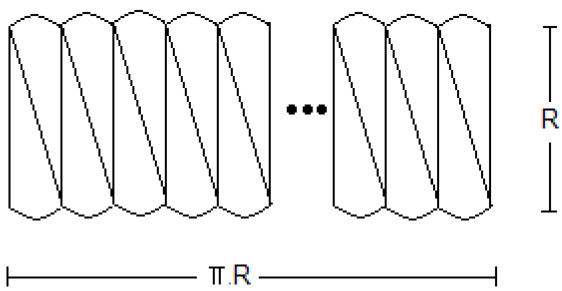


Fig 4

Agora vamos colocar alternadamente cada setor circular de cada semicírculo com um vértice virado para cima e outro com vértice virado para baixo, em outras palavras: vamos pegar um semicírculo e colocar todos os seus setores juntos com vértices virados para cima e os setores do outro semicírculo com os vértices virados para baixo encaixando com os já postos. Veja a figura 5:

Fig 5




Quanto maior a quantidade de setores menor a curvatura e mais próximo a uma reta na parte inferior e superior da figura A, formando então um retângulo de base $\pi.R$ e altura $R$. logo a áreas de todos os setores corresponde a área do circulo que também corresponde a área do retângulo de base $\pi.R$ e altura que é dada por $A = \pi.R^2$

### 3.1.2-Polígonos

Denominaremos um polígono de convexo quando: Dados dois pontos distintos pertencentes ao interior do polígono o segmento formado por esses pontos também estiver totalmente incluso ao mesmo.

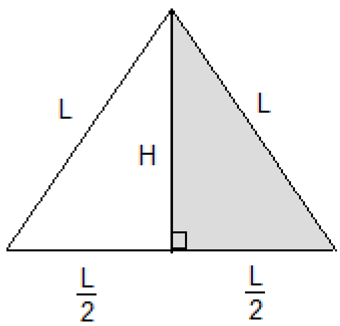
Dado um polígono convexo de n lados, temos que:

| Numero de lados | Em quantos triângulos pode ser formado | Soma dos ângulos internos |
|---|---|---|
| *n = 3* | *1* | *1.180º* |
| *n=4* | *2* | *2.180º* |
| *n=5* | *3* | *3.180º* |
| *n=6* | *4* | *4.180º* |
| .<br>.<br>.<br>*n* | .<br>.<br>.<br>*n-2* | .<br>.<br>.<br>*(n-2).180º* |

Então, se pode dizer que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de *n* lados é dada por $s_n = 180°(n-2)$

**<u>Área do triangulo equilátero:</u>**

Triângulo equilátero é o polígono de três lados cuja media é a mesma e todos os ângulos medem 60º.

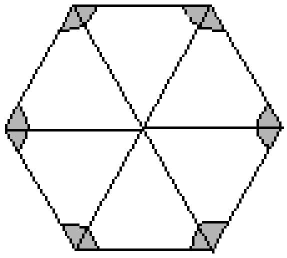



Calculando primeiro a altura do triângulo equilátero através de Pitágoras, temos que: $\mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{L}^2 - \left(\frac{\mathrm{L}}{2}\right)^2}$ daí concluímos que $H = \frac{\mathrm{L}\sqrt{3}}{2}$. Então a área do triângulo será dada por

$$A = \frac{\frac{\mathrm{L}\sqrt{3}\,.L}{2}}{2} = \frac{\mathrm{L}^2\sqrt{3}}{4}$$

**<u>Área de um hexágono regular</u>**: para calcularmos a área de um hexágono regular basta mostrarmos que ele pode ser dividido em seis triângulos equiláteros, logo sua área será dada por $A = \frac{3.\mathrm{L}^2\sqrt{3}}{2}$.

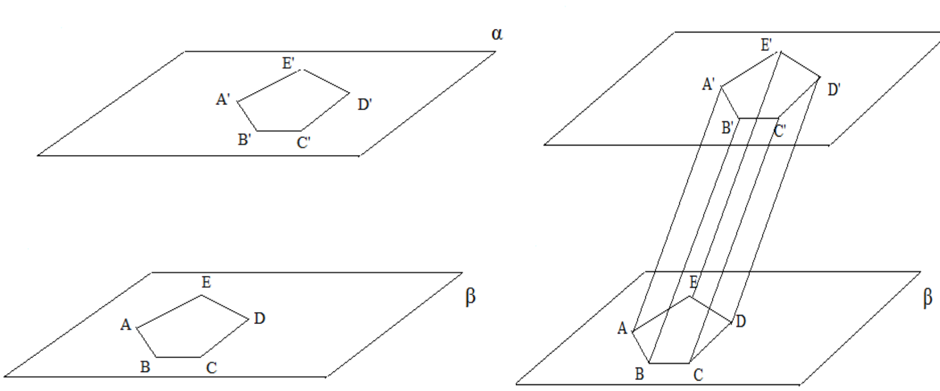
Em um hexágono regular, se traçarmos uma diagonal que divida o hexágono em dois trapézios iguais, logo essa diagonal servirá de bissetriz de um dos ângulos do hexágono. Como já sabemos, a soma de todos os ângulos de um polígono é dada por $s_n = 180°(n-2)$, logo um ângulo interno do hexágono valerá 120º. Logo, os ângulos assinalados na figura abaixo serão todos iguais a 60º.



Concluindo assim que todos os triângulos têm três ângulos iguais a 60º graus e mostrando que um hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos equiláteros.

### 3.1.3-Prismas

Dados dois planos paralelos $\alpha$ e $\beta$ e dois polígonos iguais ABCDE e A'B'C'D'E' contidos respectivamente em $\beta$ e $\alpha$, se traçarmos os segmentos paralelos AA', BB', CC', DD' e EE' iremos formar um prisma que será a união de dos cinco quadriláteros formados A'B'BA, B'C'BC, C'D'CD, D'E'DE e E'A'EA e os polígonos contidos nos planos.

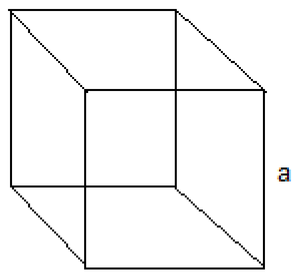



Para definir prisma basta generalizar o que foi dito acima para um polígono de n lados n natural maior que 2.

Para calcular a área lateral de um prisma reto basta calcular o perímetro da base e multiplicar pela altura: $A_l = 2p.h$

Para calcular o volume de um prisma reto basta calcular a área de sua base e multiplicar pela altura: $V = A_b.h$

**Para um hexaedro regular de aresta a.**




Temos:

Área da base = $a^2$ (pois é a área de um quadrado).

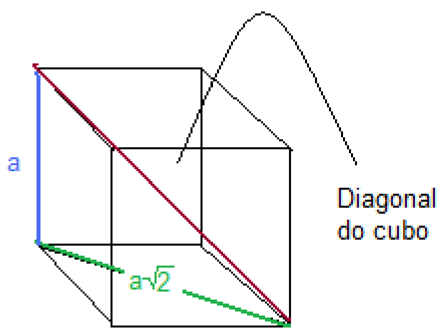
Área lateral = $4a^2$ (pois é a área de quatro quadrados que formam sua área lateral).

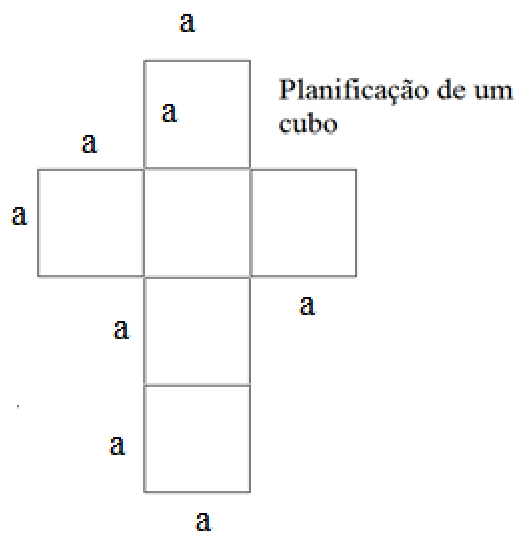
Área total = $6a^2$ (pois é a área de seis quadrados que forma todas as suas áreas).

Diagonal da face = $a\sqrt{2}$ (pois é a diagonal de um quadrado e hipotenusa de um triângulo isósceles de catetos ***a***).

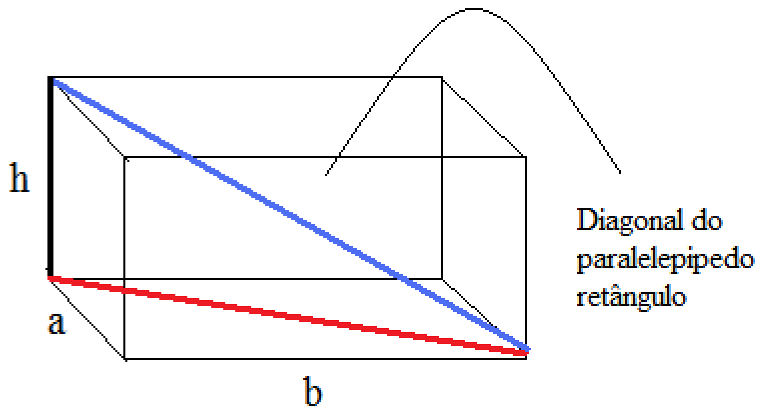
Diagonal do cubo = $a\sqrt{3}$

Na diagonal do cubo basta calcular Pitágoras no triangulo abaixo.



**Para um paralelepípedo retângulo de arestas a, b e h.**




Área da base = $a.b$ (pois é a área do retângulo da base).

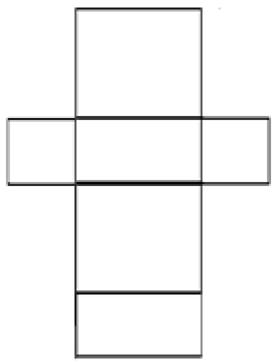
Área lateral = $2h.(a+b)$ (pois é o somatório de todas as áreas laterais formadas por retângulos de altura h e bases a e b respectivamente).

Área Total = $2.(h.a+h.b+a.b)$ (que equivale a duas vezes a área da base mais a área lateral).

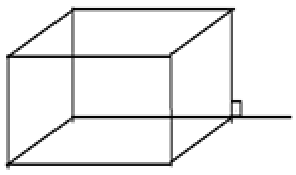
Volume = $a.b.c$ (pois o volume vale o produto da área da base pela altura).

Diagonal do paralelepípedo = $\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{h}^2}$, (basta usar o teorema de Pitágoras duas vezes uma para descobrir a diagonal da base que esta em vermelho, e outra no triângulo com lados preto, vermelho e azul).

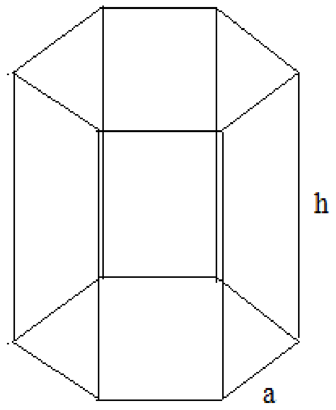
Planificação do paralelepipedo reto



Parelelepipedo reto retângulo



**Para um prisma de base hexagonal regular.**




Área da base = $\frac{3.a^2\sqrt{3}}{2}$ (pois é a área de um hexágono regular).

Área lateral = $6.a.h$ (que são os seis retângulos que foram à área lateral).

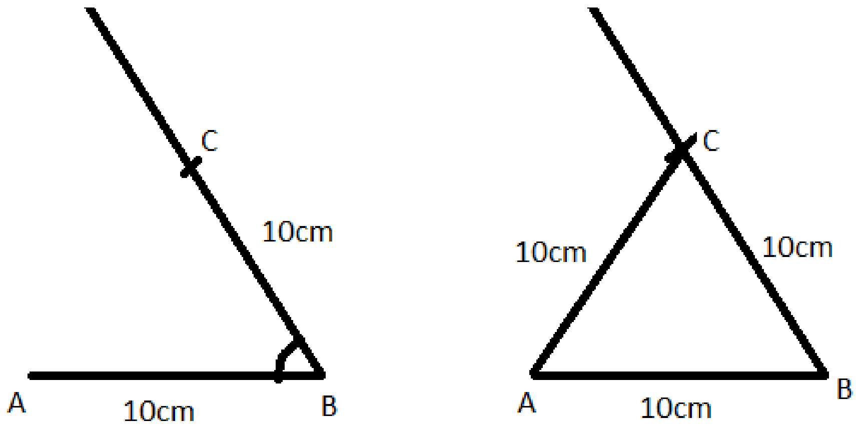
Volume do hexágono = $\frac{3.a^2\sqrt{3}}{2}.h$ (Onde calculamos a área da base $h$ vezes).

Na planificação de um prisma de base hexagonal encontramos dois hexágonos de aresta a qualquer e seis retângulos de base a e altura $h$.

**<u>Forma de construir um prisma de base triangular regular</u>**

Construindo um triângulo equilátero de lado 10 cm usando régua e transferidor:

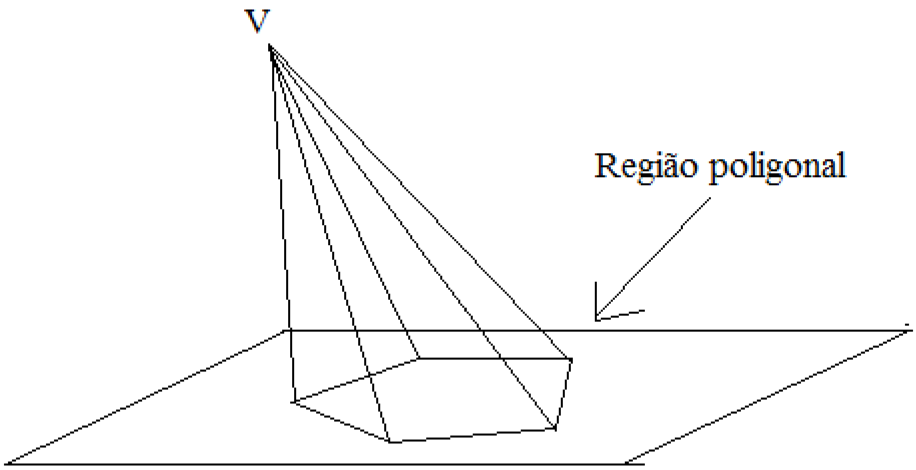
Sabe-se que os ângulos internos de um triângulo equilátero valem 60º graus, basta usar a formula $s_n = 180°(n-2)$. Então primeiro constrói-se na cartolina o lado AB de 10 cm com a régua e em seguida usando o transferidor no vértice B constrói-se uma semirreta fazendo um ângulo de 60º. Sobre essa semirreta construímos um ponto C a 10 cm de B e em seguida ligam-se os vértices A e C formado um triângulo equilátero de lado 10 cm.



Com a construção do triângulo equilátero feito, pode-se então construir as faces laterais que serão retângulas com um dos lados 10 cm e o outro lado qualquer, onde este outro lado será a altura do nosso prisma de base triangular. Note que para construir um hexágono regular usa-se a mesma ideia, contudo marca-se com o transferidor um ângulo de 120° o que será feito a posteriormente.

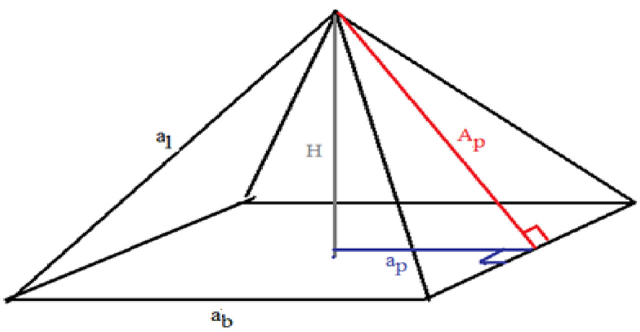
**3.1.4-Pirâmides**

Dada uma região poligonal (um polígono com número de lados quaisquer ) de n lados e um ponto V fora do plano que contenha esse polígono, chamamos de pirâmide a reunião das semirretas de origem em V e que passam pelos pontos da região poligonal.




Uma pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Numa pirâmide regular as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

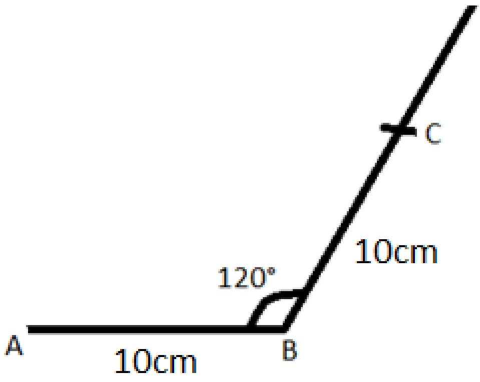
Elementos da pirâmide



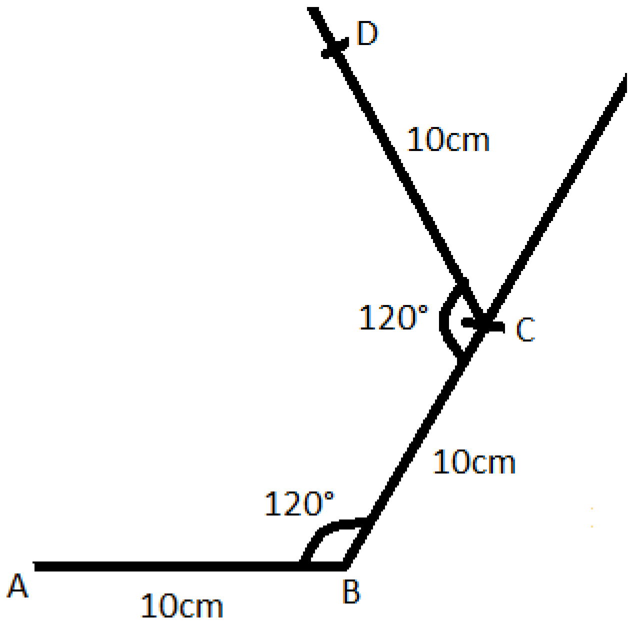

$a_b$ = Aresta da base; $a_l$= Aresta lateral; H = altura da pirâmide; $a_p$ = Apótema da base ; $A_p$= Apótema da pirâmide.

**Forma de construir uma pirâmide de base Hexagonal:**

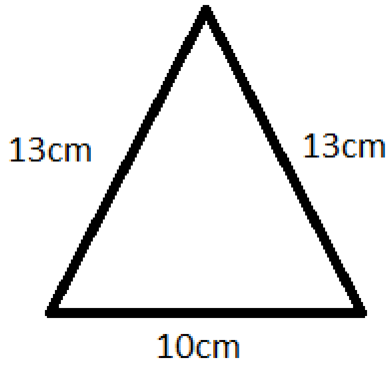
Construindo um hexágono usando a mesma ideia do triângulo equilátero feito em prismas: um ângulo interno de um hexágono regular vale 120º usando o calculo $s_n = 180°(n-2)$ com isso em uma cartolina escreveremos um lado AB com 10 cm de comprimento e em seguida do vértice B com o auxilio do transferidor marcaremos um ângulo de 120º fazendo uma semirreta partindo de B. Em seguida marca-se com auxilio de uma régua o ponto C na semirreta partindo 10 cm de B.




E então repete-se o mesmo processo partido de C, ou seja, com o auxílio de um transferidor marcar-se em C um ângulo de 120º e nessa direção se faz outra semirreta, e em seguida marca-se um ponto D a 10 cm de C.

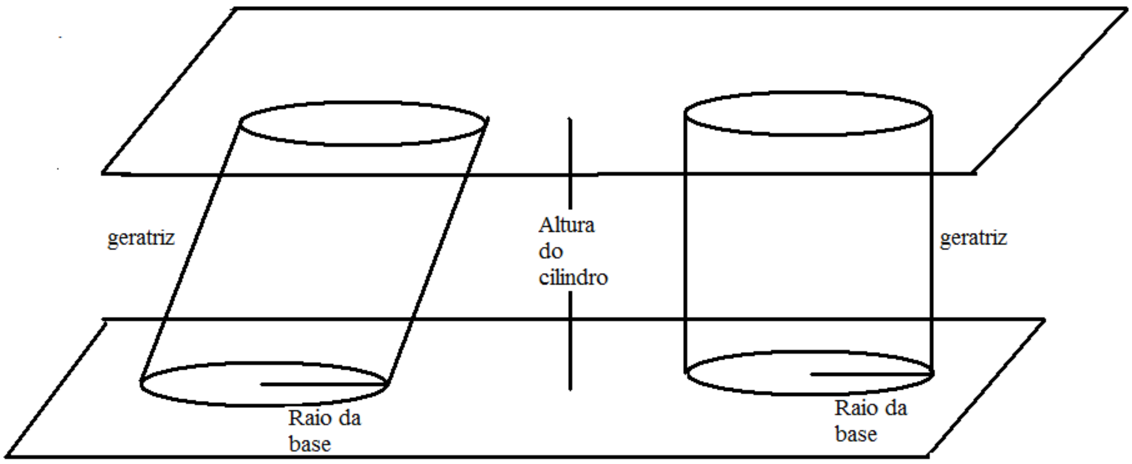



Fazendo o mesmo processo mais uma vez em relação ao ponto D, encontra-se o ponto E, e em seguida ligando o ponto E ao ponto A formando o hexágono regular. Já para construir os triângulos que serão nossas faces laterais deve-se construir triângulos isósceles de base 10 cm (que são os lados do hexágono regular) como, por exemplo, um triângulo de lados 13cm, 13cm e 10cm.

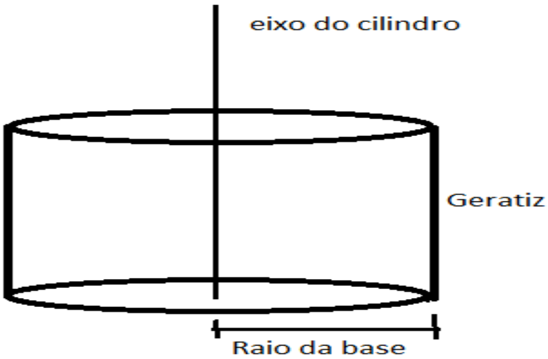


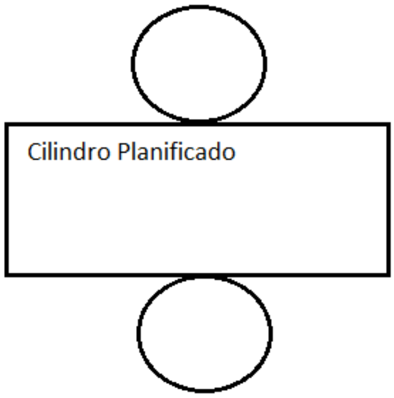

### 3.1.5-Cilindro

Define-se cilindro usando a mesma definição do prisma, contudo ao invés de usar polígonos para as bases usamos círculo de raio r > 0. Então temos a seguinte definição de cilindro: dados dois planos paralelos e dois círculos iguais que pertencem a cada um dos planos se unirmos todos os pontos correspondentes do círculo e juntarmos as áreas dos círculos teremos um cilindro. Eixo de um cilindro e a reta que passa pelos centros das bases e geratriz por qualquer segmento paralelo ao eixo, cujas extremidades pertencem às circunferências das bases. O cálculo da altura do cilindro é dado pela distância entre os planos paralelos que contém as bases, e no caso de cilindro ser reto temos que a geratriz é igual à altura.




O cilindro é reto quando a geratriz faz um ângulo reto com o plano da base e oblíquo quando não faz.



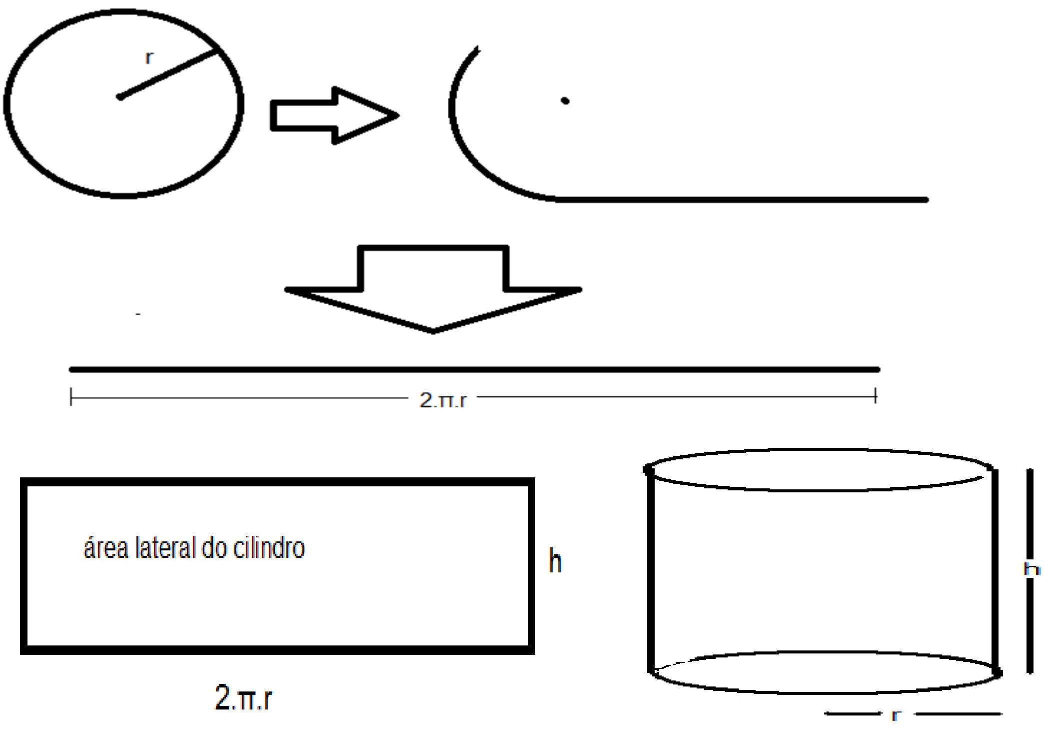



Fórmulas para o cilindro

A área da base de um cilindro é dada pela área de um circulo de raio r, logo $A_b = \pi r^2$, enquanto a área lateral do cilindro reto será formada por um retângulo cujos lados serão a altura do cilindro e o comprimento do circulo da base então $A_l = 2\pi.\mathrm{r}.\mathrm{h}$ .

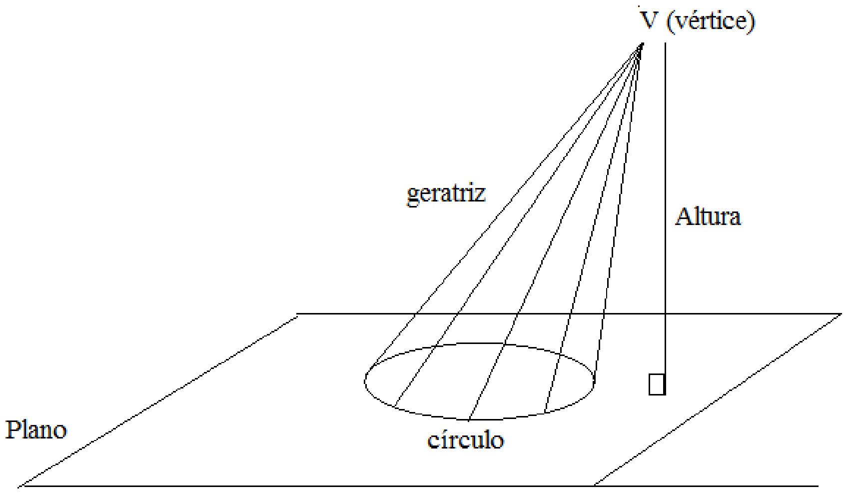
**Forma de construir um cilindro:**

Primeiramente constrói-se em uma cartolina um círculo de raio r cm com o auxilio de um compasso. Marca-se um ponto O e abrindo o compasso com a medida r cm e centro em O se faz o círculo. Em seguida calcula-se o comprimento do perímetro do círculo usando a relação $C = 2.\pi.r$ , onde $C$ é o comprimento do círculo e $r$ seu raio. Então construímos um retângulo de base $2.\pi.r$ e altura qualquer, que será a altura do cilindro. Então depois de ter as figuras planificadas monta-se o cilindro.

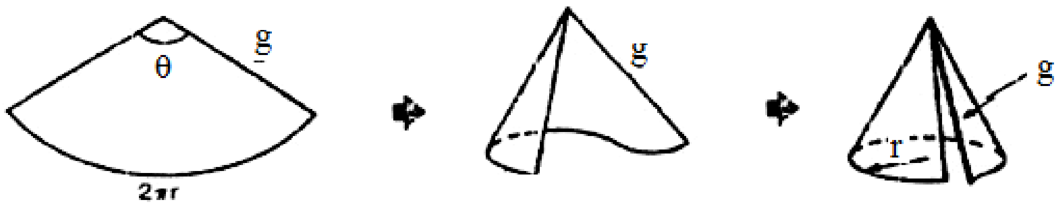


### 3.1.6-Cone

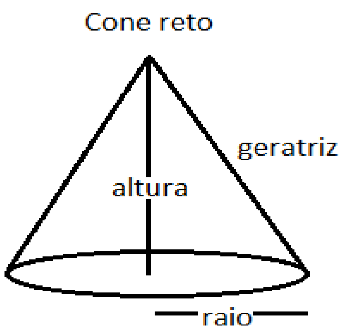
Dada uma região circular (círculo de raio r > 0) e um ponto V fora do plano que contenha esse círculo, chamamos de cone à reunião das semirretas de origem em V e que passam pelos pontos da região circular.




Relação entre o raio do setor circular e a raio da base do cone: se um setor circular de ângulo central $\theta$ e raio g vai ser transformado em um cone de raio da base r, então o contorno circular do setor tem a mesma medida do contorno do círculo da base do cone a ser formado. Logo $\left(\frac{\theta}{360°}\right).2\pi.g = 2.\pi.r$, então $\left(\frac{\theta}{360°}\right).g = r$. Com θ < 2π:



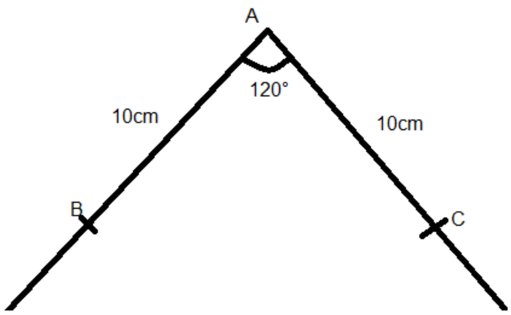

Usa-se Pitágoras para relacionar a geratriz, o raio e a altura do cone.



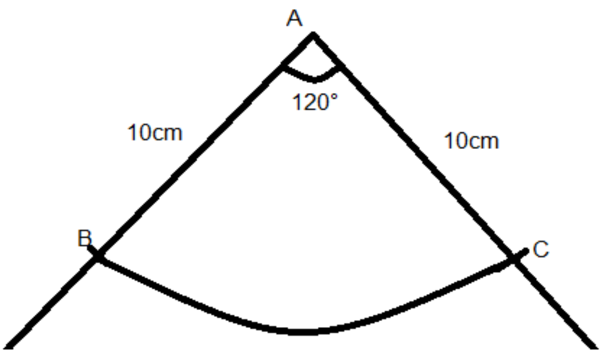

$$\boxed{\text{geratriz}^2 = \text{raio}^2 + \text{altura}^2}$$

Vejamos a construção de um cone:

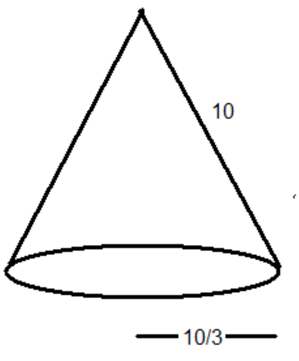
Primeiro deve-se construir um setor circular usando transferidor, régua e compasso: escreve-se em cartolina uma reta e marca-se o segmento AB de 10 cm, e em seguida, com o auxilio de um transferidor, marca-se um ângulo de, por exemplo, 120° partindo de A. Em seguida, com o ângulo marcado, desenha-se o segmento AC de também de 10 cm, de forma que ângulo <BAC seja de 120°.



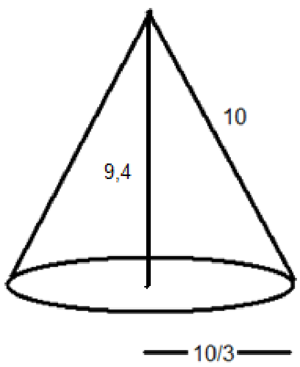

E com o auxílio de um compasso fixo em A e com abertura em C faremos o arco BC.




Agora usa-se a relação $(\theta /360^o)g = r$ para descobrir o raio r do círculo da base do cone a ser construído, onde $g = 10$ e $\theta = 120°$. Fazendo os cálculos iremos encontrar um raio $r = 10/3$. E agora basta fazer a montagem do nosso cone, pois temos a área lateral que é o setor circular e temos também a área da base que e um círculo de raio 10/3.



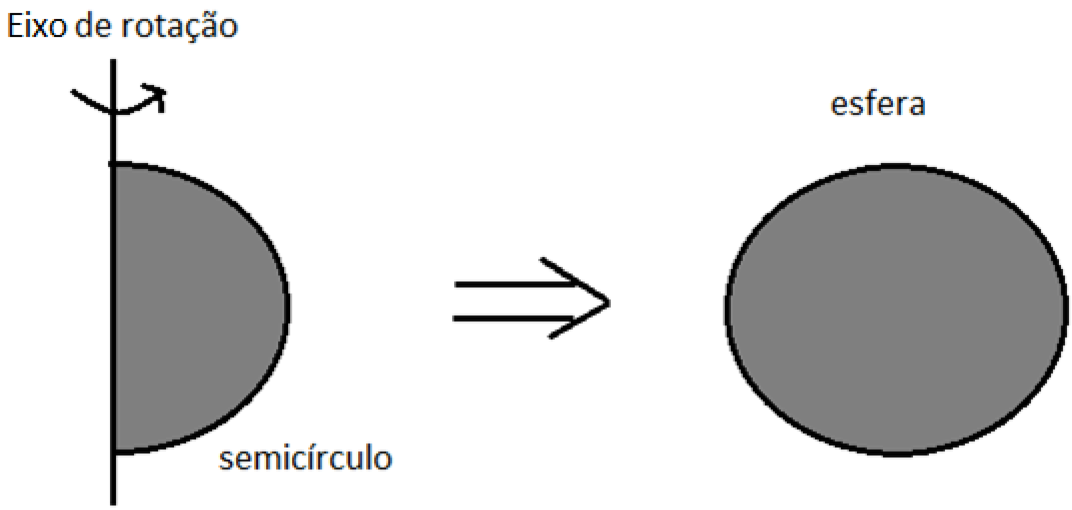
Para calcular a altura basta usar o teorema de Pitágoras onde $h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2}$ $\cong \sqrt{88{,}8} \cong 9{,}4$

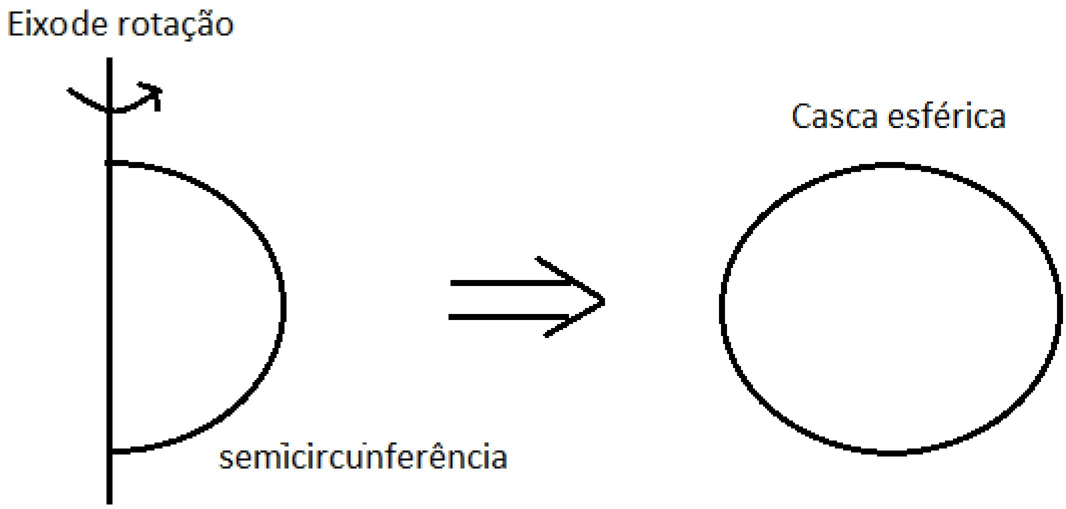



**3.1.7-Esfera**

Dado um ponto O e uma distância R, chama-se *esfera* o conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são menores ou iguais a R. O ponto O é o *centro* da esfera e R é o seu *raio*. Já para a superfície esférica basta definir distâncias iguais a R.

Para um melhor entendimento a esfera pode ser formada pela rotação de um semicírculo em torno do seu eixo e a superfície esférica pode ser formada pela rotação de uma semicircunferência em torno do seu eixo, veja as ilustrações:

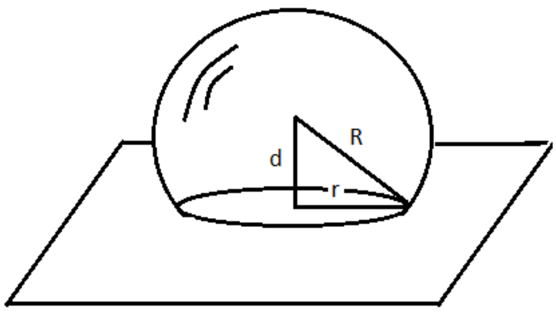




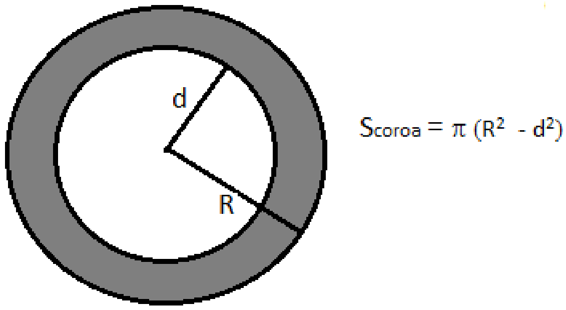

Cálculo do volume da esfera

Primeiramente vamos mostrar a área de uma secção esférica em termos do raio da esfera e da distância do seu centro à secção.

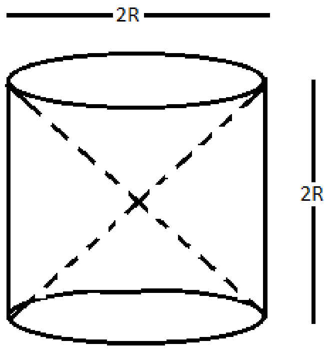
Qualquer plano que intercepte uma esfera, não sendo tangente a ela, a intercepta segundo um círculo. O raio **r** desse círculo depende da distância **d** do centro da esfera ao plano de secção.



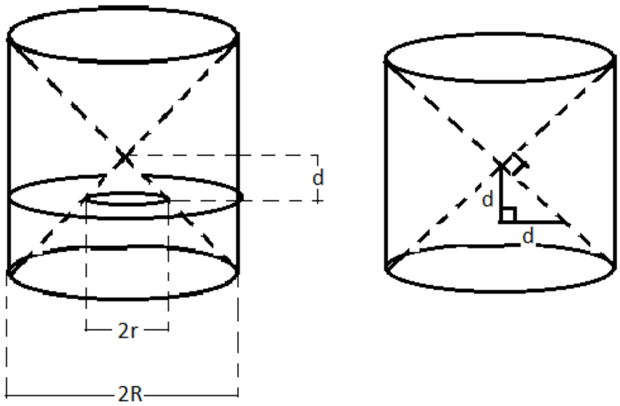

Observe que, sendo **S** a área da secção, temos: $S = \pi r^2$. Por outro lado, pelo teorema de Pitágoras, obtemos: $r^2 = R^2 - d^2$. Logo, $S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi (R^2 - d^2)$. Esse resultado, que expressa a área da secção em função do raio **R** da esfera e da distância **d**, será de grande valia para determinar o volume da esfera. Desde já vamos guardar a informação que: $S = \pi (R^2 - d^2)$. Outra informação importante é a da área da coroa circular raios **R** e **d**.




Agora vamos calcular o volume da esfera com o auxílio do *princípio* de *Cavalieri:* sólidos geométricos de mesma altura terão o mesmo volume se suas respectivas secções planas forem de áreas iguais. Para tanto, vamos utilizar o seguinte sólido, conhecido como *anticlepsidra*.

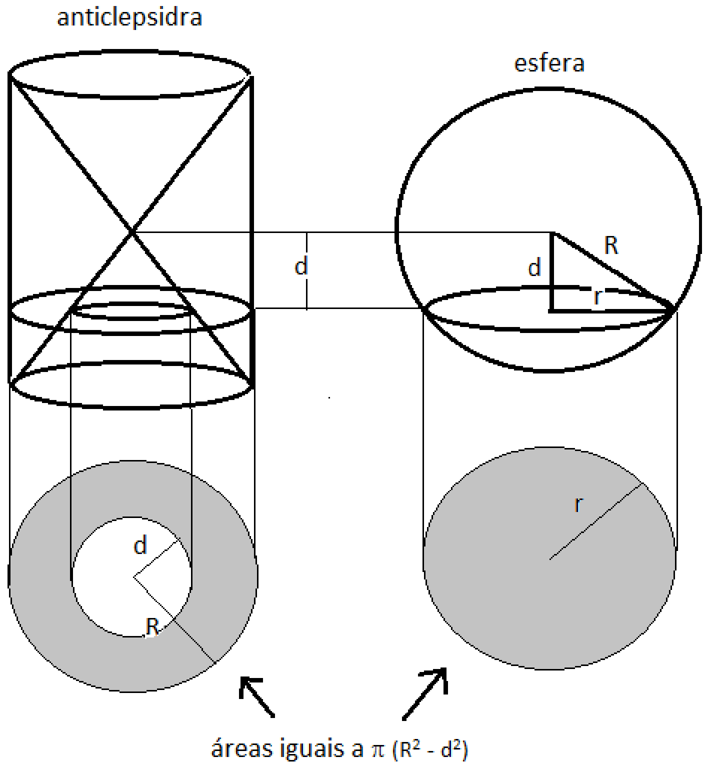



Trata-se de um cilindro equilátero, do qual foram “eliminados” dois cones cujas bases são as próprias bases do cilindro e cujas alturas são iguais à metade da altura do cilindro. O centro do cilindro é o vértice dos dois cones. Nesse sólido, vamos considerar uma secção transversal determinada por um plano situado a uma distância **d** do vértice dos cones.

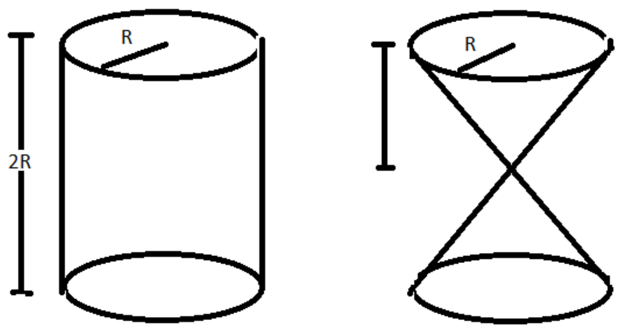


Essa secção é uma coroa circular. Nela, é imediato que o raio da circunferência menor é igual à distância d. O raio da circunferência maior é o próprio raio R da base do cilindro. Assim, a área da secção é: $S = \pi (R^2 - d^2)$.

Então, o *princípio de Cavalieri* nos permite concluir que o volume da anticlepsidra é igual ao volume de uma esfera de raio R. Veja as figuras:




Por outro lado, o volume da anticlepsidra é fácil de ser determinado. Para isso basta subtrair os volumes dos dois cones do volume do cilindro eqüilátero.




$V - \pi R^2.2R - 2.\frac{1}{3}.\pi R^2.R$

$V = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

## 3.2-Contexto

A Escola de Aplicação do Recife como se chama hoje, fundada em 14 de agosto de 1984, é unidade organizacional da Faculdade de Ciências da Administração de Pernambuco, vinculada a Universidade de Pernambuco. Aos 28 anos de existência a escola ocupa um lugar de destaque na educação de Pernambuco, acumulando conquistas e resultados fantásticos, por exemplo, já conquistou por duas vezes o troféu da OBMEP (Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas) em 2009 e 2011, além de ótimas colocações na OBM e outras olimpíadas como, por exemplo, as de física e história. A última grande conquista foi o 2º lugar geral da Olimpíada Brasileira de História.

A escola se localiza na Av. Sport Club do Recife (Antiga abdias de Carvalho), número 252 e funciona no prédio da FCAP-UPE, no turno da tarde, onde o ensino fundamental começa as 13:20min e termina de 17:25min, quando há 5 aulas, e 18:10min quando há 6 aulas. Já o ensino médio funciona todas as tardes de 13h20min às 18h10min e na segunda de manhã de 7:20min às 12:10min. Atuando do ensino fundamental (6º ano) até o ensino médio (3º ano), a escola conta com a estrutura da faculdade para proporcionar um ambiente propício ao estudo. A escola conta com uma boa biblioteca, sala de informática, refeitório e ambiente para o recreio.

Para ingressar na escola os alunos fazem uma prova de seleção contendo as disciplinas de português e matemática com 16 questões de cada, que abordam conteúdos sobre as séries iniciais do ensino fundamental. As turmas têm em média 40 alunos por sala e as mesmas são climatizadas e com boa estrutura, propiciando um bom ambiente e desembocando num ensino de qualidade. Os professores são oriundos da Rede Estadual de Ensino (Secretaria de Educação de Pernambuco) e da própria UPE.

## 3.3-Participantes

A turma do 2º ano do ensino médio e composta por 40 alunos que são extremamente esforçados e focados nos estudos na maioria são alunos de classe média e média alta em que os pais investem maciçamente em educação. Eles, os alunos, participam de olimpíadas das mais diversas; como as de Física, Química, História e Matemática é claro.

Dentre os 40 alunos não existem foras de faixa e a média de idade varia entre 15 e 16 anos e os que têm não tem um bom desempenho fazem reforço particular. Todos os alunos participaram da atividade.

**3.4-Condução**

Conforme já descrito da atividade, usamos 16 aulas para fazer a atividade e horas extraclasses, contando ainda com dois aulas para a apresentação dos sólidos construídos pelos grupos aos demais alunos da sala e mais duas aulas para a avaliação geral sobre o assunto. Abaixo segue uma tabela discriminando cada aula:

| | |
|---|---|
| 1º aula | A sala com 40 alunos foi separada em cinco grupos de 8 alunos cada, e definimos através de sorteio qual grupo ficaria com qual tema, o que levou aproximadamente 20min. Com relação aos 25min que restaram os grupos começaram a estabelecer estratégias para a construção dos sólidos. |
| 2º aula | Explanação do conteúdo de prismas e resolução de exercícios do livro que consta na biografia (Livro Dante volume 2). Mostra de como construir um prisma. |
| 3º aula | Continuação da resolução de exercícios sobre prismas, incluindo resolução de exercícios de uma ficha própria que se encontra como anexo. |
| 4º aula | Explanação do conteúdo de pirâmides e resolução de exercícios do livro já mencionado e de fichas. Mostra de como construir uma pirâmide. |
| 5º aula | Encontro para analisar o andamento das construções dos referidos grupos e dar sugestões ou fazer correções: Nesse dia apareceram muitas dúvidas dos grupos de cilindro, cone e esfera. Referentes a irracionalidade do $\pi$ por exemplo. |
| 6º aula | Explanação do conteúdo de cilindro e resolução de questões do livro e da ficha, e mostra de como fazer construções de cilindro. |
| 7º aula | Resolução de questões referentes a cilindros e pirâmides (algumas dúvidas) |
| 8º aula | Explanação do conteúdo de cone, resolução de exercícios do livro e da ficha. |
| 9º aula | Encontro para tirar dúvidas e ver os encaminhamentos das construções:<br>O grupo de esferas expôs algumas dúvidas de como iriam fazer a construção da esfera, e solicitaram fazer uma aproximação da construção, o que foi aceito. Também foi informado ao grupo que poderiam usar uma |

| | |
|---|---|
| | esfera pronta para o tópico referente a esfera inscrita no cubo. |
| 10º aula | Mostra de como fazer a construção de um cone: usamos o quadro para mostrar a relação entre o raio e ângulo de um setor circular e o raio do cone formado por esse setor. |
| 11ºaula | Resolução de exercícios sobre cones e cilindros no livro e na ficha. |
| 12ºaula | Explanação sobre esfera e resolução de exercícios sobre o assunto (uso do livro e das fichas). |
| 13ºaula | Encontro para ver encaminhamentos e tirar dúvidas: Nesse encontro a maioria dos grupos só faltava detalhes mínimos e o grupo de esfera fez a aproximação solicitada no encontro anterior. (Adquiriram uma bola de festa, a mais esférica possível e colaram varias camadas de jornal, retirando depois a bola de festa através de um furo feito pelos estudantes). |
| 14º aula | Tira dúvidas sobre qualquer um dos tópicos ou exercícios |
| 15ºaula<br>16ºaula | Apresentação dos grupos para os demais alunos da sala: nessa apresentação os alunos informaram:<br>1)O material usado para fazer a construção<br>2) Os passos que fizeram até finalizar cada sólido<br>3)Os cálculos necessários a calcular a medidas de comprimentos tais como arestas, alturas e apótemas. Além de mostrar os cálculos das áreas das faces e o volume. |

### 3.5-Instrumentos e método da coleta de dados

Os dados foram coletados através de anotações que foram feitas pelo professor enquanto o processo de construção estava em curso, usando as 4 aulas destinadas a observações e tira dúvidas. Também foram usadas fotografias, como forma de registro, captadas pelos alunos enquanto os mesmos produziam, em ambiente externo a sala de aula, e onde algumas delas consta nessa dissertação. Além disso, foi usada a avaliação mensal, curricular da escola, para medir o nível de eficácia da atividade para a aprendizagem dos estudantes.

## Capitulo 4: Análise dos resultados

### 1.1-Métodos da análise

A análise dos resultados teve como base o aprendizado do aluno quanto ao conteúdo dos sólidos estudados no ensino médio. Tendo em vista esse fato, temos vários aspectos que incidiram nessa analise tais como: a participação dos alunos nos momentos destinados a introdução de ideias e dicas para as construções, esses momentos ficam divididos da seguinte forma:

1) Momento em que o professor faz alguma explicação no quadro de como fazer tal construção do sólido. Daí ver-se a participação e ideias provenientes dos alunos.
2) Momento em que os grupos se dividem na sala e estabelecem estratégias, métodos ou caminhos para fazer a construção. Onde o professor age como mero observador vendo as saídas propostas pelos próprios alunos.

Em outras palavras, a análise das construções feitas pelos alunos foi posta em prática em nível visual do trabalho, dedicação e esforço dos alunos no decorrer da atividade.

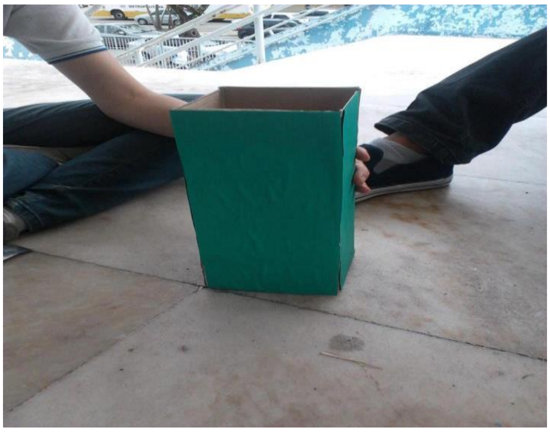
Também foi usada uma avaliação para verificar se os alunos atingiram o objetivo proposto que era o de diminuir as dificuldades com relação à visualização das figuras em três dimensões no plano. Iremos analisar essa avaliação mais a seguir.

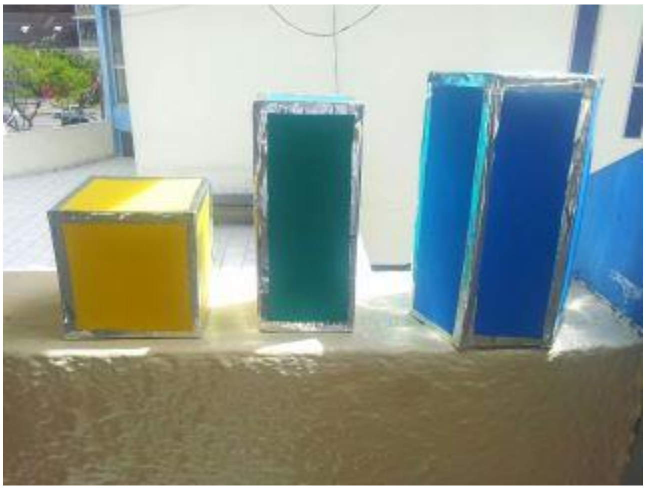
### 1.2-Resultados

Com relação à execução dos projetos nenhum grupo apresentou grandes dificuldades, com a exceção do grupo de esfera que apresentou dificuldades claramente compreensíveis na sua construção. Vamos destacar um pouco de cada um dos projetos e colocar algumas ilustrações de como o processo foi desenvolvido.

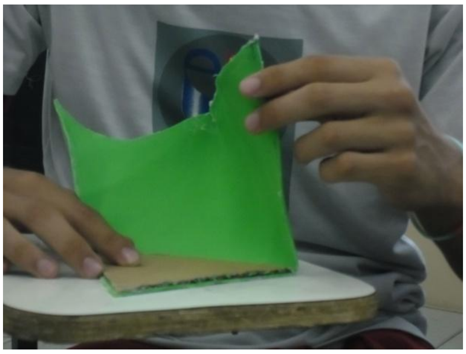
Com relação ao **grupo de prismas** temos que no dia 04/10 eles foram ao colégio no turno da manhã e levaram os seguintes materiais: 4 caixas de sapato, tesouras, cola, estilete, régua, cartolina colorida e papel laminado. Neste dia eles fizeram a construção do prisma de base hexagonal e o princípio usado para fazer a construção foi: primeiro fazer as figuras planas em cartolina e em seguida recortar em cima de papelão (que foi a caixa de sapato) para que as figuras planas ficassem mais rígidas, o que ajudaria em seguida na montagem. Eles colaram a cartolina no papelão para que a exposição do sólido ficasse mais agradável. A construção do hexágono ficou um pouco a desejar, pois eles usaram um estilete para cortar o papelão, e o corte não ficou perfeito. Como observação a tesoura é mais adequada para cortar o papelão. O hexágono possui lado 10 cm e os retângulos da área lateral 10 cm x 15 cm.

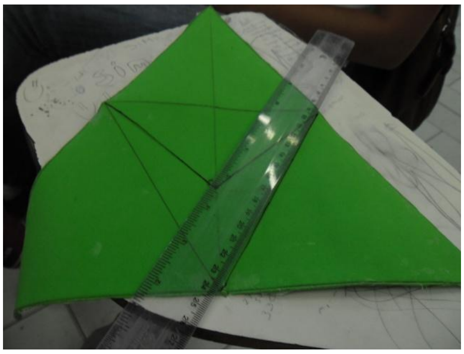

No dia19/10 eles começaram a fazer o paralelepípedo reto de dimensões (10 cm x 11 cm x 27 cm) e o cubo de aresta 15 cm. O procedimento foi o mesmo: fizeram as figuras planas na cartolina e em seguida colaram em um papelão para deixar as figuras mais rígidas e em seguida fizeram a montagem dos sólidos, onde a construção do cubo só veio a ser concluída em 20/10.



Com relação ao **grupo de pirâmides** eles construíram um tetraedro de uma forma bem simples; primeiro eles construíram um triângulo equilátero em uma cartolina e em seguida ligaram os pontos médios dos lados desse triângulo formando quatro triângulos equiláteros, e em seguida juntaram os vértices do triângulo formando o tetraedro. Os alunos usaram papelão para fazer com que os lados ficassem mais rígidos.

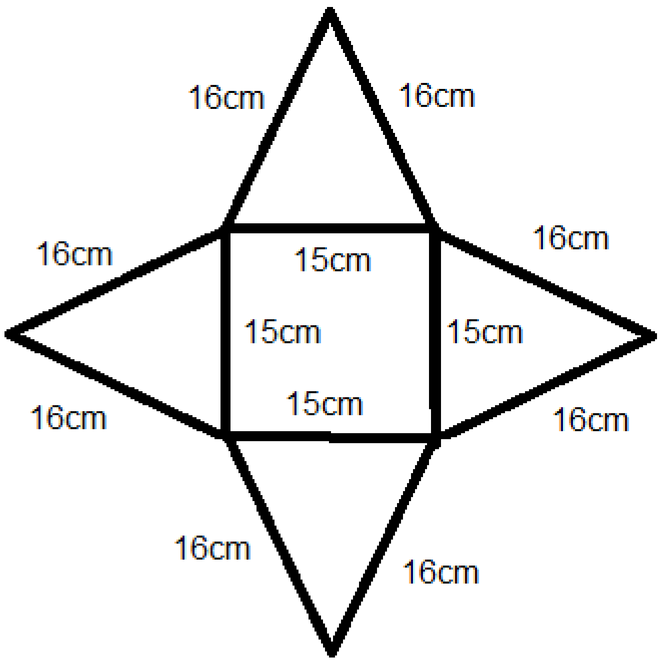




A medida para fazer o tetraedro foi 15 cm.

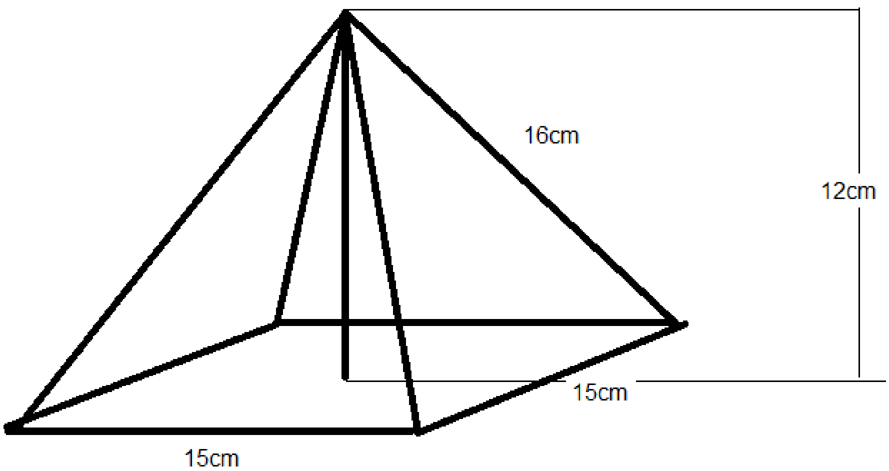
Já no octaedro regular eles fizeram duas pirâmides de base quadradas iguais e em seguida juntaram-nas para formar o octaedro essas pirâmides tinham arestas da base 15 cm e arestas laterais 16cm.

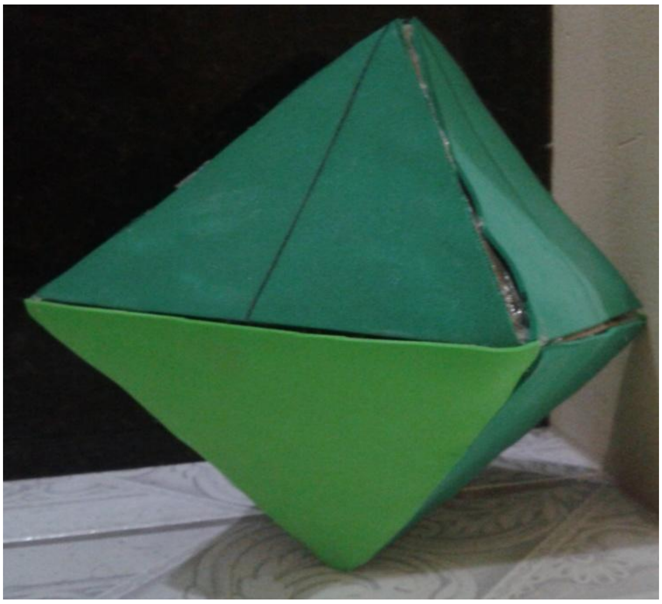
Vejamos a construção do octaedro pelos alunos. Eles desenharam em papel veludo um quadrado de lado 15 cm e a partir se seus lados triângulos isósceles com lados 15 cm por 16cm por 16cm.




Em seguida colaram papelão recortado na forma do quadrado e dos triângulos das respectivas faces. Para que a pirâmide fosse reta eles calcularam a altura dela e fixaram um palito com essa medida no centro do quadrado e com ajuda de um esquadro mantiveram esse palito perpendicular a base. Em seguida colaram as faces laterais.

A altura do palito foi calculada por Pitágoras em $h = \sqrt{16^2 - \left(\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)^2}$ logo h é aproximadamente 12 cm.

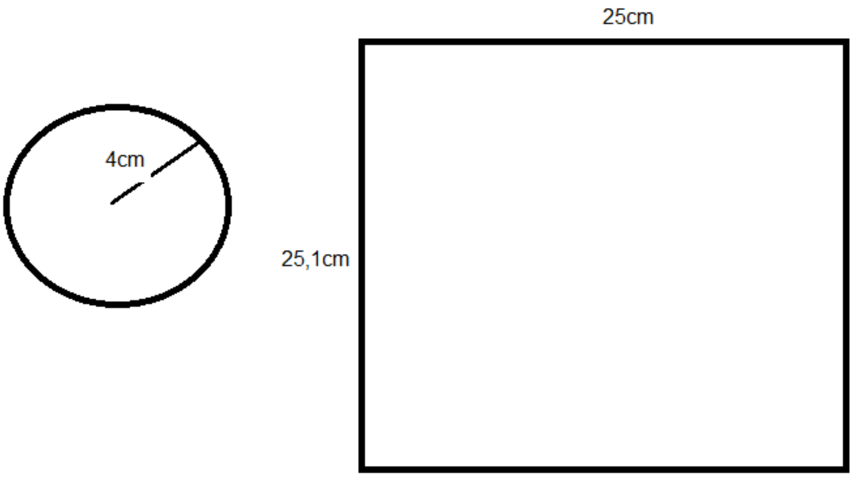


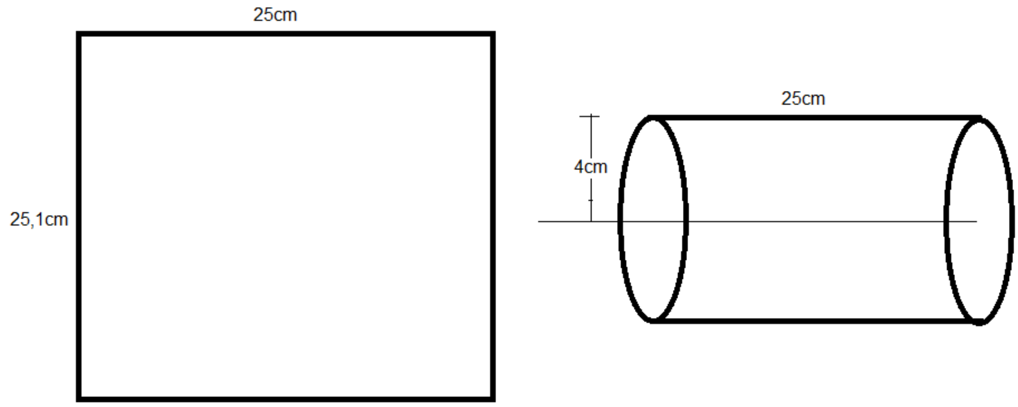


O **grupo de cilindro** escolheu como material principal a cartolina e fita, e eles construíram dois cilindros de medidas diferentes e de mesmo volume um com 4cm de raio e 25cm de altura e o outro com 5cm de raio e 16cm de altura.

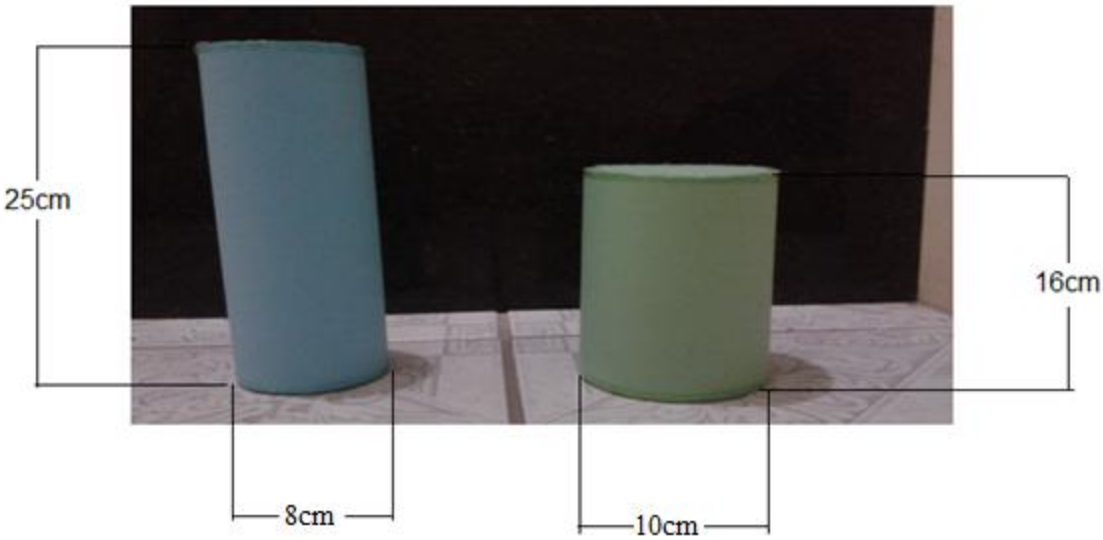
Para a construção do cilindro eles usaram também régua e compasso usando os seguintes procedimentos:

Primeiro construíram um círculo de 4cm de raio usando o compasso, e em seguida construíram usando régua e um retângulo de lados $2.\pi.4 = 25{,}1$ e 25cm usando $\pi = 3{,}14$.

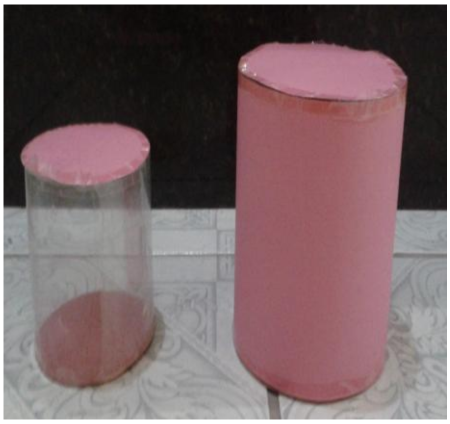




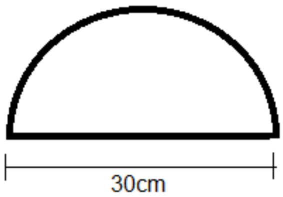

O segundo cilindro para ter mesmo volume foi construído da mesma forma e com dimensões r = 5cm por h = 16cm. Eles usaram o fato que $h = r^2$, a altura de um cilindro fosse igual ao raio ao quadrado do outro, para que os primas tivessem o mesmo volume.

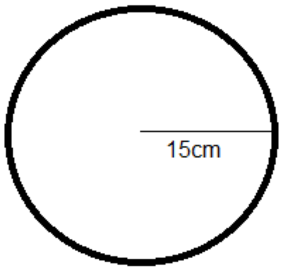


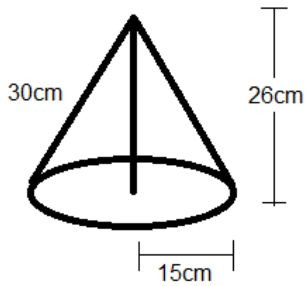

Além disso, construíram mais dois cilindros um com 6cm de raio e 12cm de altura, ou seja um cilindro equilátero, e o outro com 4,25cm de raio e altura 8,5cm usando os mesmo método mas usando plástico e cartolina.



O **grupo de cones** construiu um cone equilátero que é aquele em que g=2r usando a seguinte ideia: eles calcularam que para ter um cone equilátero precisariam ter um setor circular com ângulo central de 180°, ou um semicírculo, e construíram um semicírculo de raio 30cm. Então depois construíram um círculo de raio 15cm



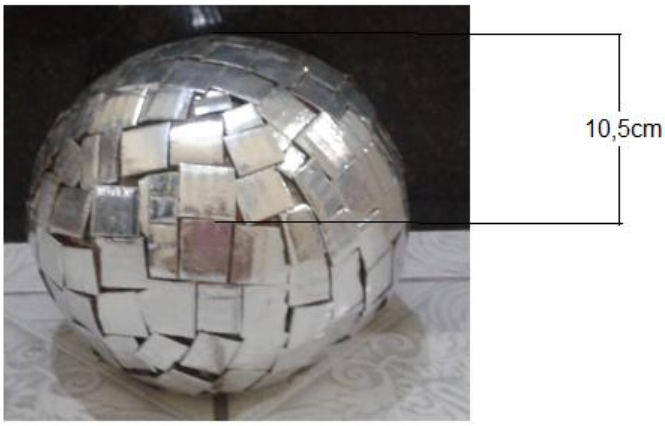




Com o semicírculo fizeram a área lateral e com o círculo a área da base, depois bastou colar tudo com fita e calcular sua altura usando o teorema de Pitágoras que vale aproximadamente 26cm. A altura foi calculada como h = $\sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} = 25{,}98$cm.

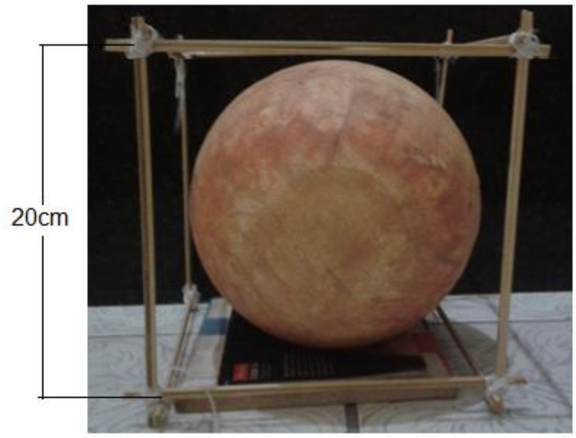
Além disso, foi construído dois cones, um usando jornal e outro usando papelão e papel laminado.

O grupo de esfera fez sua construção da seguinte forma: Adquiriram uma bola que se usa em festa de crianças, a mais esférica possível. Os estudantes encheram a bora até certo volume que visualmente se percebesse uma esfera, e em seguida colaram varias camadas de jornal sobre a bola com ar. Depois de varias camadas coladas estouraram a bola e a retiraram de dentro das camadas de jornal. Para calcular o raio aproximado da esfera construída usaram uma fita flexível e calcularam o diâmetro máximo médio fazendo varias medições, onde encontraram medidas que variaram entre 64cm e 68 cm de comprimento. Então adotaram 66 cm de comprimento e calcularam o raio como sendo $\mathrm{r} = \frac{66}{2\pi} \cong 10{,}5\mathrm{cm}$. Além disso, colaram vários pedaços de papeis cartolina laminados para dar uma imagem melhor.




Para construir uma esfera inscrita em um cubo os alunos usaram uma esfera já pronta comprada em uma papelaria em com base nela construíram um cubo com varetas de madeira. Para construir o cubo fizeram primeiro dois quadrados de aresta 20cm usando o transferidor para verificar o ângulo reto, e em seguida ligaram os vértices dos quadrados com outras varetas de medida congruente. Como a esfera tem comprimento da maior circunferência igual a 63 cm então seu diâmetro será igual a $D = \frac{63}{\pi} \cong 20$ cm. Logo o lado do quadrado também será 20 cm.



## Capítulo 5: Avaliação geral e conclusões

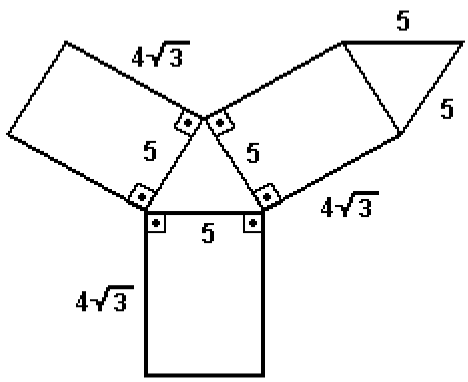
### 5.1.1-Comparação dos resultados com a analise prévia

Os grupos apresentaram seus trabalhos, construção de sólidos, de forma previsível e adequada ao que foi previamente pedido, como exemplo pode-se citar o grupo de esfera que não conseguiu fazer a construção legitima, mas fez uma boa aproximação com uma ideia original. Com relação aos demais grupos as dificuldades encontradas e soluções esperadas estavam dentro do previsível, tais como algumas falhas nas junções das construções por causa do número irracional $\pi$, no caso do cilindro por exemplo.

### 5.1.2- Avaliação do conhecimento adquirido com a atividade

Ao final da atividade, na aula seguinte, foi aplicada uma avaliação para verificar se os conhecimentos adquiridos pelos alunos foram bem assimilados. Seguem abaixo os exercícios para avaliação, a justificativa para aplicação do exercício e a resolução por parte de alguns deles.

Exercicio 01. A figura a seguir representa a planificação de um sólido. Calcule a área total e o volume desse sólido.




Nesse exercício quer-se avaliar:

1)Se o aluno consegue distinguir que solido é formado com esses polígonos;

2)Se ele sabe calcular suas áreas e volumes

Exercício 02. A base de uma pirâmide reta é um quadrado cujo lado mede $8\sqrt{2}$ cm. Se as arestas laterais da pirâmide medem 17 cm, então desenhe a pirâmide e calcule a altura e seu volume.

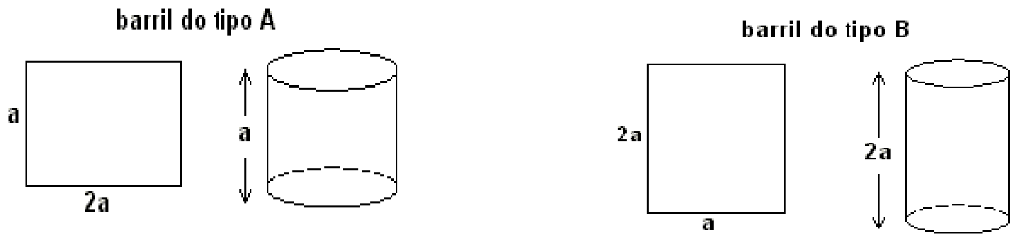
Nesse exercício quer-se avaliar:

1)Se o aluno consegue desenhar e reconhecer os elementos de uma pirâmide;

2)Se ele consegue relacionar a altura da pirâmide com as demais arestas;

3)Se ele consegue calcular o volume da pirâmide.

03. Uma metalúrgica fabrica barris cilindricos de dois tipos, A e B, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metáticas retangulares de lados a e 2a, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado abaixo. Se Va e Vb indicam os volumes dos barris do tipo A e B, qual a relação entre Va e Vb:




Nesse exercício quer-se avaliar:

1)Que ele consiga visualizar o problema;

2)Que o aluno saiba o que é um cilindro e saiba usar suas relações (de volume);

3)Que ele perceba que o volume depende do quadrado do raio e da altura.

04.Um tanque cônico tem 4m de profundidade e seu topo circular tem 6m de diâmetro. Então:

a) O volume máximo, em litros, que esse tanque pode conter de líquido é:
b) O ângulo forma do pelo setor circular ao planificar sua área lateral.

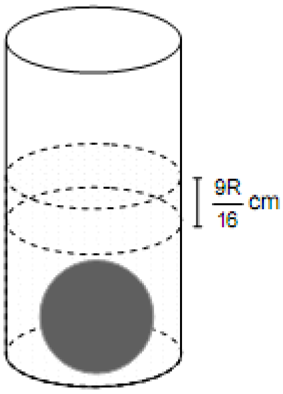
Nesse exercício quer-se avaliar:

1)Que ele consiga visualizar o problema;

2)Que o aluno consiga calcular o volume do cone, distinguindo altura de geratriz;

3)Que o aluno saiba planificar o cone.

05.(UFPR) Um recipiente com água tem, internamente, o formato de um cilindro reto com base de raio R cm. Mergulhando nesse recipiente um esfera de metal de raio r cm, o nível da água sobre $\frac{9R}{16}$ cm. Qual é o raio dessa esfera?




a) $r = \frac{3R}{4}$ cm

b) $r = \frac{9R}{16}$ cm

c) $r = \frac{3R}{5}$ cm

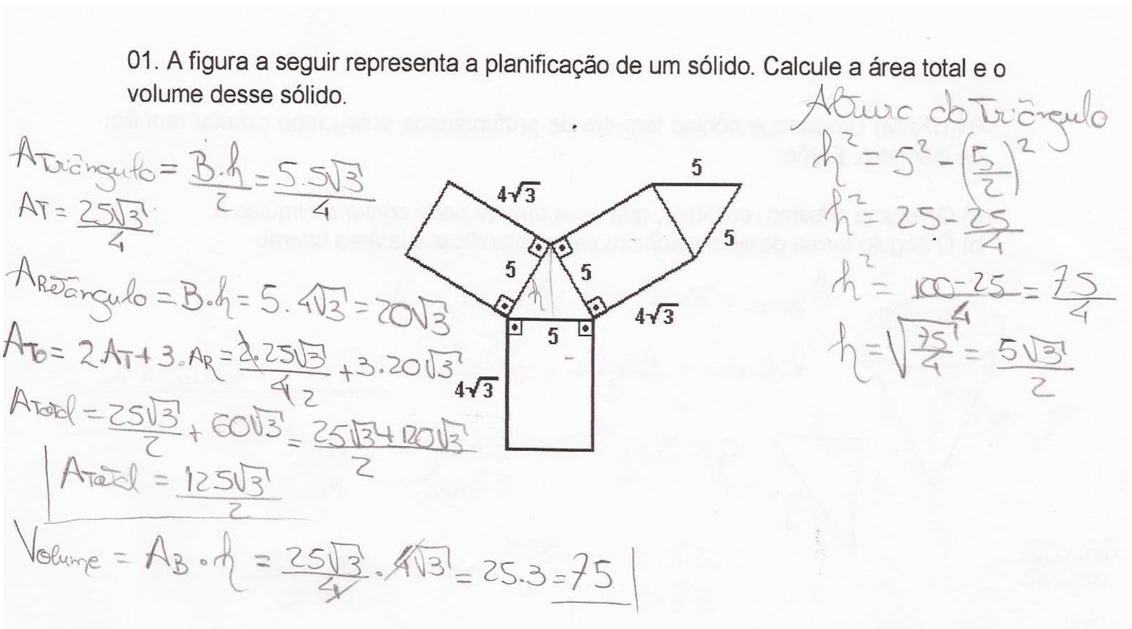
d) $r = \frac{R}{2}$ cm

e) $r = \frac{2R}{3}$ cm

Nesse exercício quer-se avaliar:

1)Que o aluno consiga visualizar o problema;
2) Que o aluno saiba calcular o volume da esfera e comparar com o volume do cilindro formado pelo deslocamento de água.

Seguem agora algumas resoluções feitas por alunos:



01. A figura a seguir representa a planificação de um sólido. Calcule a área total e o volume desse sólido.

$A_{Triângulo} = \frac{B.h}{2} = \frac{5.5\sqrt{3}}{4}$

$A_T = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$A_{Retângulo} = B.h = 5.4\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$

$A_{To} = 2A_T + 3.A_R = \frac{2.25\sqrt{3}}{4} + 3.20\sqrt{3}$

$A_{Total} = \frac{25\sqrt{3}}{2} + 60\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3} + 120\sqrt{3}}{2}$

$A_{Total} = \frac{125\sqrt{3}}{2}$

$Volume = A_B . h = \frac{25\sqrt{3}}{4} . 4\sqrt{3} = 25.3 = 75$

Altura do Triângulo

$h^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$

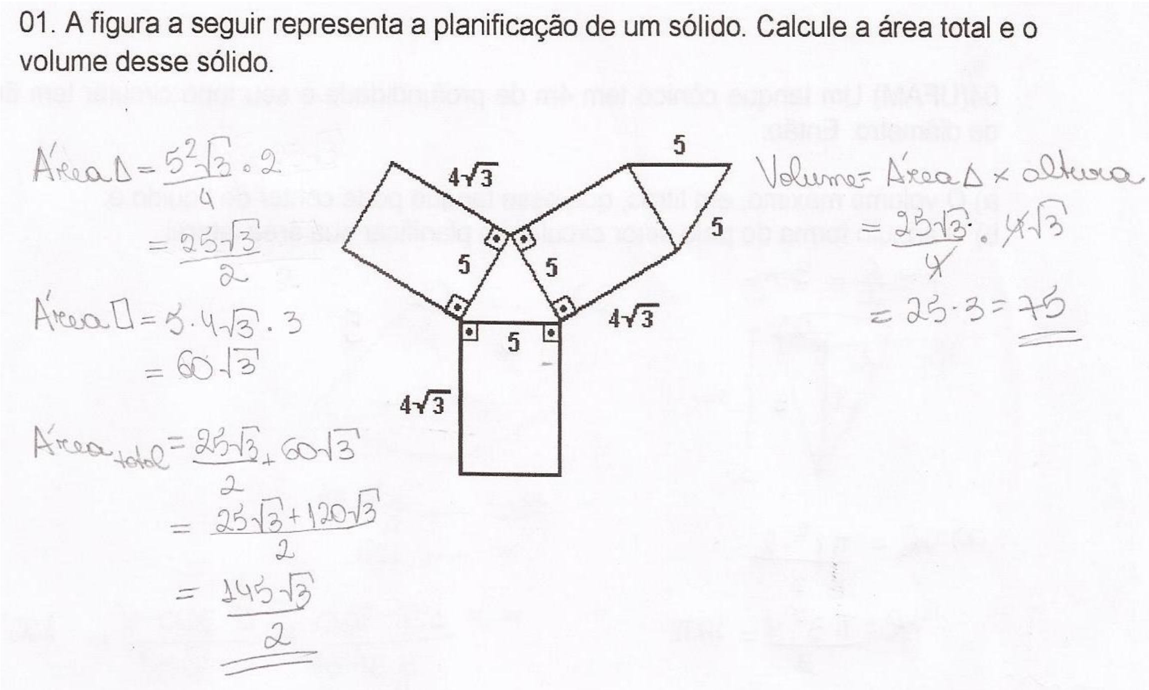
$h^2 = 25 - \frac{25}{4}$

$h^2 = \frac{100-25}{4} = \frac{75}{4}$

$h = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$



No caso acima o aluno conseguiu fazer todos os passos adequadamente, calculando a área da base sem usar fórmulas, mas usando Pitágoras. Calculou todas as áreas e em seguida somou-as. O volume também o fez corretamente.



01. A figura a seguir representa a planificação de um sólido. Calcule a área total e o volume desse sólido.

$$\text{Área}_{\Delta} = \frac{5^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2 = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

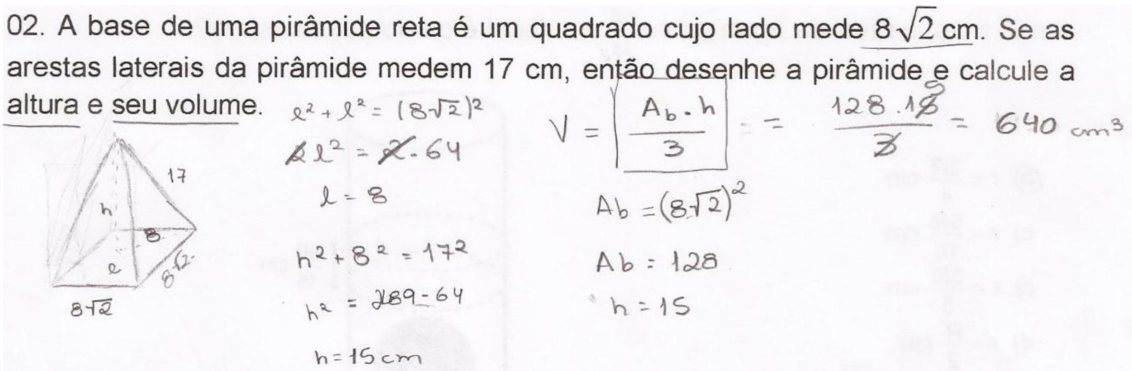
$$\text{Área}_{\square} = 5\cdot 4\sqrt{3}\cdot 3 = 60\sqrt{3}$$

$$\text{Área}_{total} = \frac{25\sqrt{3}}{2} + 60\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}+120\sqrt{3}}{2} = \frac{145\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Volume} = \text{Área}_{\Delta} \times \text{altura} = \frac{25\sqrt{3}}{\cancel{4}}\cdot \cancel{4}\sqrt{3} = 25\cdot 3 = 75$$



Já nesse outro exemplo o aluno não percebeu o que esqueceu de calcular a área do triângulo duas vezes, e por isso errou a área total do prisma.



02. A base de uma pirâmide reta é um quadrado cujo lado mede $8\sqrt{2}$ cm. Se as arestas laterais da pirâmide medem 17 cm, então desenhe a pirâmide e calcule a altura e seu volume.

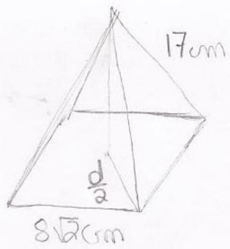
$$\ell^2+\ell^2=(8\sqrt{2})^2$$
$$\cancel{2}\ell^2=\cancel{2}\cdot 64$$
$$\ell=8$$
$$h^2+8^2=17^2$$
$$h^2=289-64$$
$$h=15\text{ cm}$$

$$V=\boxed{\frac{A_b\cdot h}{3}} = \frac{128\cdot 1\cancel{5}}{\cancel{3}} = 640\text{ cm}^3$$
$$A_b=(8\sqrt{2})^2$$
$$A_b=128$$
$$h=15$$



Na questão acima o aluno faz a questão corretamente, desenhando a figura e efetuando os cálculos.

02. A base de uma pirâmide reta é um quadrado cujo lado mede $8\sqrt{2}$ cm. Se as arestas laterais da pirâmide medem 17 cm, então desenhe a pirâmide e calcule a altura e seu volume.




Diagonal do quadrado:

$d = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$d = 8 \cdot 2$

$d = 16$ cm

Altura:

$17^2 = 8^2 + h^2$

$h^2 = 289 - 64 \rightarrow h = \sqrt{225} \rightarrow \boxed{h = 15\text{cm}}$

Volume:

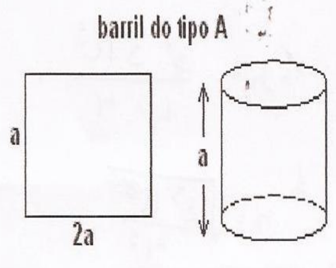
$V = \frac{b \cdot h}{3}$

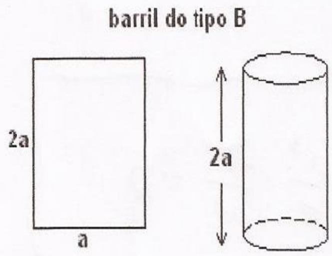
$V = \frac{8\sqrt{2} \cdot \cancel{15}^{5}}{\cancel{3}}$

$\boxed{V = 40\sqrt{2}\text{cm}^3}$

Já nesse caso o estudante até que consegue calcular a altura corretamente, mas se atrapalha e ao invés de colocar a área da base coloca só o lado da base, logo seu volume fica errado parcialmente.

03. Uma metalúrgica fabrica barris cilindricos de dois tipos, A e B, cujas superfíceies laterais são moldados a partir de chapas metáticas retangulares de laods <u>a</u> e <u>2a</u>, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado abaixo. Se Va e Vb indicam os volumes dos barris do tipo A e B, qual a relação entre Va e Vb:




$2\pi r = a$

$r = a/2\pi$

$2\pi r = 2a$

$a = \pi r$

$r = a/\pi$

$\pi r^2 \cdot a = V_A$

$\pi \cdot \frac{a^2}{\pi^2} \cdot a = V_A$

$V_A = \frac{a^3}{\pi}$

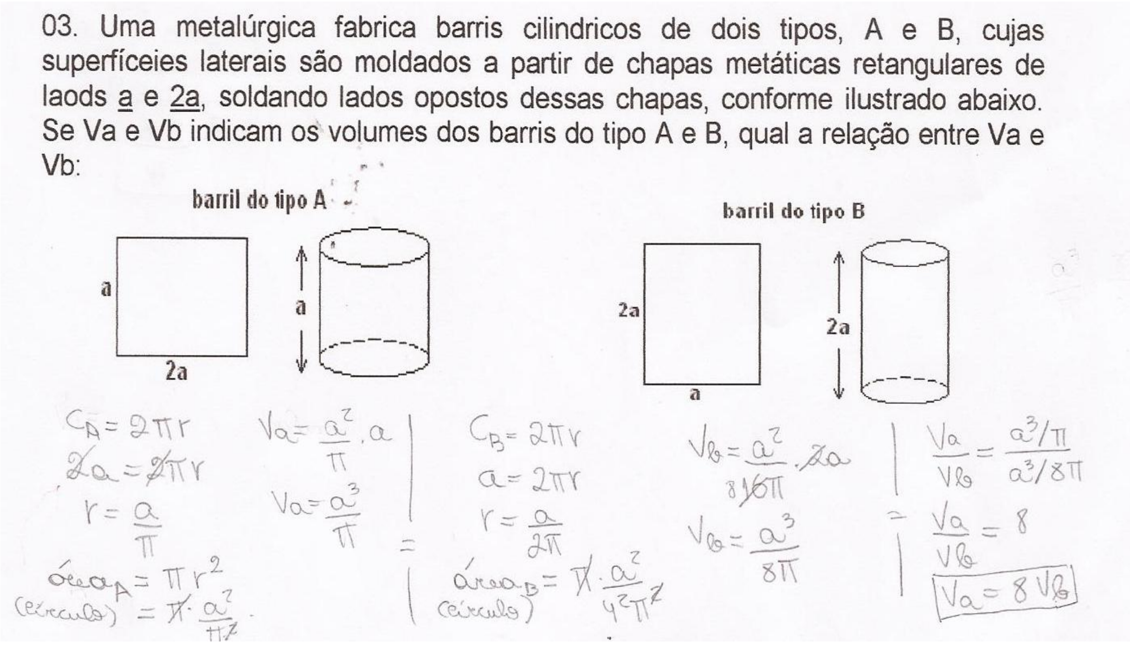
$\pi r^2 \cdot 2a = V_B$

$\pi \frac{a^2}{4\pi^2} \cdot 2a = V_B$

$V_B = \frac{a^3}{\pi 2}$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{a^3/\pi}{a^3/2\pi} = \frac{a^3}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{2\cancel{\pi}}{a^3} = 2$$

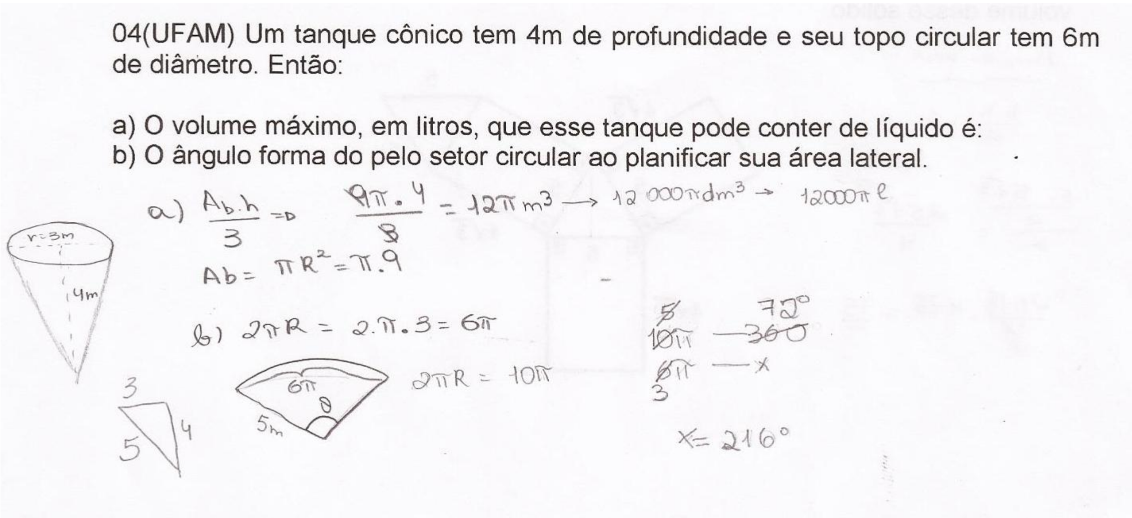
Nesse caso o aluno consegue fazer o que se pede usando bem os conhecimentos de cilindro.



03. Uma metalúrgica fabrica barris cilindricos de dois tipos, A e B, cujas superfíceies laterais são moldados a partir de chapas metáticas retangulares de laods <u>a</u> e <u>2a</u>, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado abaixo. Se Va e Vb indicam os volumes dos barris do tipo A e B, qual a relação entre Va e Vb:



Já neste outro o aluno confunde-se na hora de calcular a área da base do sólido b e no denominador coloca $4^2$ ao invés de $2^2$. Mas a ideia está certa.



04(UFAM) Um tanque cônico tem 4m de profundidade e seu topo circular tem 6m de diâmetro. Então:

a) O volume máximo, em litros, que esse tanque pode conter de líquido é:
b) O ângulo forma do pelo setor circular ao planificar sua área lateral.

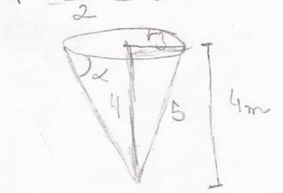


No exercício acima o aluno faz adequadamente o exercício.

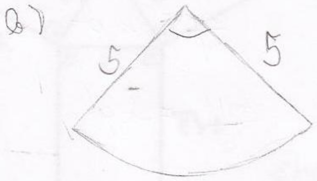
04(UFAM) Um tanque cônico tem 4m de profundidade e seu topo circular tem 6m de diâmetro. Então:

a) O volume máximo, em litros, que esse tanque pode conter de líquido é:
b) O ângulo forma do pelo setor circular ao planificar sua área lateral.

$r = \frac{6}{2} = 3m$




b)




a) $V\ell = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$

$V\ell = \frac{\pi 3^{\cancel{2}} \cdot 4}{\cancel{3}} = 12\pi$

$360° \;—\; \frac{4}{3}\pi 3^2$

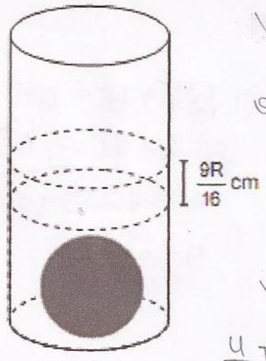
$x \;—\; 12\pi$

$x = \frac{12\cancel{\pi} \cdot 360}{\frac{4}{3} \cdot \cancel{\pi} \cdot 3^3} = \frac{\cancel{12} \cdot 360 \cdot \cancel{3}}{\cancel{4} \cdot 3^{\cancel{3}}} = 120°$

Já neste exercício o aluno se confunde ao comparar numa regra de três o ângulo com o volume do cone.

05.(UFPR) Um recipiente com água tem, internamente, o formato de um cilindro reto com base de raio R cm. Mergulhando nesse recipiente um esfera de metal de raio r cm, o nível da água sobre $\frac{9R}{16}$ cm. Qual é o raio dessa esfera?

a) $r = \frac{3R}{4}$ cm
b) $r = \frac{9R}{16}$ cm
c) $r = \frac{3R}{5}$ cm
d) $r = \frac{R}{2}$ cm
e) $r = \frac{2R}{3}$ cm




$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\vartheta = \pi R^2 \cdot \frac{9R}{16}$

$\vartheta = \frac{9\pi R^3}{16}$

$V_{esf} = \vartheta$

$\frac{4}{3}\cancel{\pi} r^3 = \frac{9\cancel{\pi} R^3}{16}$

$r^3 = \frac{9 \cdot 3 R^3}{16 \cdot 4}$

$\boxed{R = \frac{3R}{4}}$

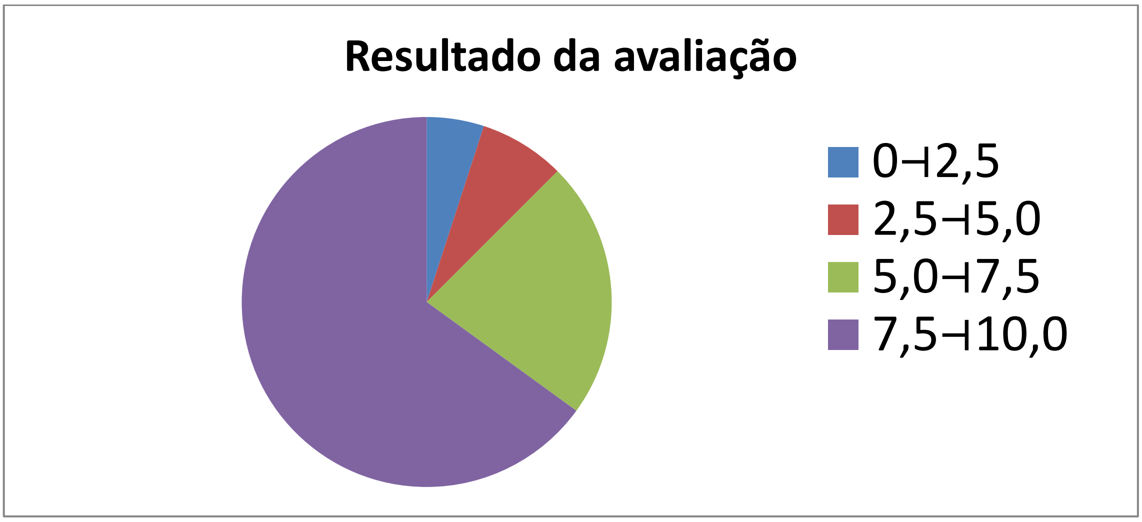
Neste exercício o aluno o faz de forma adequada.

Uma observação quanto ao exercício 05 é que não houve erros nele.

Com relação ao resultado do aprendizado da turma, podemos afirmar que no geral os estudantes apresentaram um desenvolvimento melhor que em anos anteriores, levando-se em consideração a experiência do proponente dessa dissertação referente há anos anterior nas turmas de 2º ano do ensino médio do mesmo colégio. A atividade desenvolveu a habilidade que era um de nossos objetivos, a visualização de seguimentos facilitando a compreensão do conteúdo e facilitando a aprendizagem.

Segue abaixo o resultado em números de nossa avaliação referente aos 40 estudantes do ensino médio da escola de aplicação do recife – fcap- UPE

| Resultado da avaliação | | |
|---|---|---|
| Classe | Quantidade de alunos | Porcentagem |
| 0 ⊣ 2,5 | 2 | 5% |
| 2,5⊣ 5,0 | 3 | 7,5% |
| 5,0⊣ 7,5 | 9 | 22,5% |
| 7,5⊣ 10,0 | 26 | 65% |



### 5.1.3-Críticas e sugestões

Com relação à atividade realizada, pode-se notar primeiramente que a participação nas aulas de geometria espacial melhorou muito em decorrência de nossa atividade, e dúvidas que geralmente os alunos têm com relação ao posicionamento de sólidos, cálculos de medidas como altura, arestas ou apótemas ficaram mais simples de serem explicados no quadro. Na minha ótica os objetivos estabelecidos para construir os sólidos foram atingidos visto que os alunos conseguiram fazer as devidas construções e esta atividade ampliou o campo de conhecimento deles no que diz respeito não só ao tópico de geometria espacial, mas também em geometria plana, pois os alunos usaram alguns argumentos para construção de polígonos regulares. A atividade poderia ser mais produtiva se tivéssemos mais tempo para sua aplicação, como por exemplo; poderíamos buscar fazer uma esfera através da construção de um poliedro usando a ideia de aproximação. Mas considero que para o tempo de um mês com 16 aulas foi suficiente para a aplicação do projeto no que tange aos nossos objetivos que foram de mostrar ao aluno de maneira diferenciada os conteúdos de sólidos geométricos, propiciando um melhor entendimento da teoria.

## Referências Biográficas


**DANTE, L. R.** Matemática Contexto & Aplicações, ensino médio - Volume 2, Editora Ática, 2011

**KALEFF, A. M. e REI, D. M.** Varetas, canudos, arestas e... sólidos geométricos, artigo,1995 (http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000011919.pdf)

**DOLCE, O e POMPEO J. N.** Fundamentos de matemática elementar - Volume 10, 5º edição e 6º reimpressão. Editora Atual, 2009.

**SOUSA, J E PATARO, P.M.** Vontade de saber MATEMÁTICA- 9º ano, Editora FTD 2009.

**FREUDENTHAL, Hans.** Mathematics as an Educational Trask. Dordrecht: Reidel, 1973.

**Eves, H.** An Introduction to the History of Mathematics. New York: Holt Rinehart and Winston, 1969.

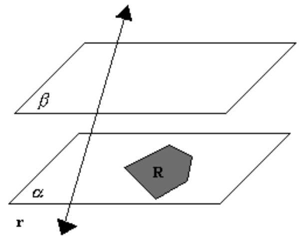
**ENGELS, F.** Sobre o papel do trabalho na transformação do macaco em homem. In: MARX, K.; ENGELS, F. Textos. São Paulo: Edições Sociais, 1975.

**BRASIL**. Ministério da educação e cultura. Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio. Volume 2: Ciência da natureza, matemática e tecnologia. Brasília: MEC, 2006, p. 75, 76.

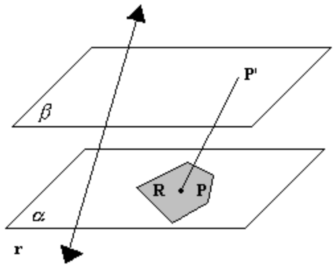
**Anexo (fichas de aula)**

**PRISMA**

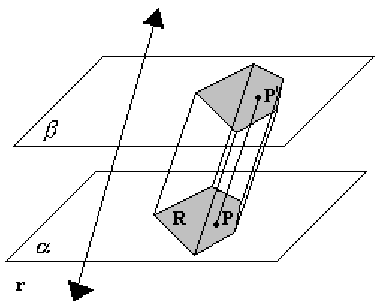
Na figura abaixo, temos dois planos paralelos e distintos $\alpha$ e $\beta$, um polígono convexo R contido em $\alpha$ e uma reta r que intercepta $\alpha$ e $\beta$, mas não R:




Para cada ponto P da região R, vamos considerar o segmento $\overline{PP}$', paralelo à reta $(P' \in \beta)$;



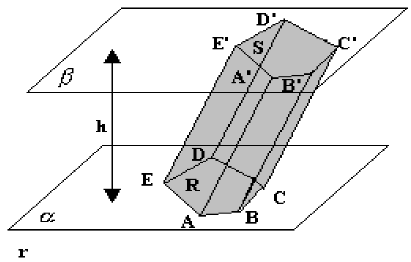

Assim, temos:




Chamamos de prisma ou prisma limitado o conjunto de todos os segmentos congruentes $\overline{PP'}$ paralelos a r.

**Elemento do Prisma**

Dado o prisma a seguir, consideramos os seguintes elementos:



**Bases:** regiões poligonais R e S

**Altura:** a distância h entre os planos $\alpha$ e $\beta$

**Arestas das bases:** os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'E'}, \overline{E'A'}$ (dos polígonos)

**Arestas laterais:** os segmentos $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'}, \overline{EE'}$

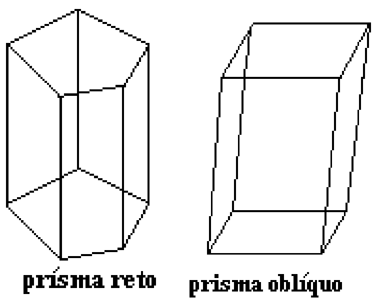
Faces laterais os paralelogramos AA’B’B, BB’C’C, CC’D’D, DD’E’E, EE’A’

***Classificação:***

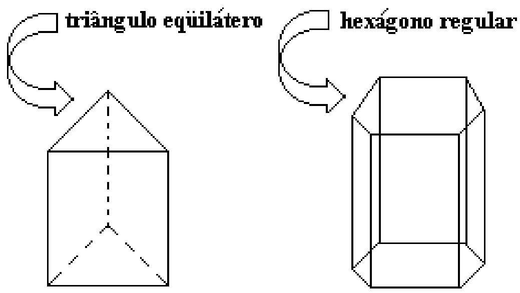
Um prisma pode ser:

reto: quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases;

oblíquo: quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.




Chamamos de prisma regular todo prisma cujas bases são polígonos regulares:




***Observação:*** As faces de um prisma são retângulos congruentes.

***Secção***

Um plano que intercepte todas as arestas de um prisma determina nele uma região chamada secção do prisma.

Secção transversal é uma região determinada pela intersecção do prisma com um plano paralelo aos planos das bases (figura 1). Todas as secções transversais são congruentes (figura 2).

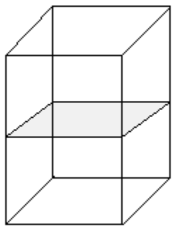


*figura 1*

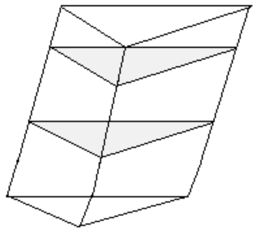


*figura 2*

*Áreas*

Num prisma, distinguimos dois tipos de superfície: as faces e as bases. Assim, temos de considerar as seguintes áreas:

área de uma face ($A_F$): área de um paralelogramos que constituem as faces;

área lateral ($A_L$): soma das áreas dos paralelogramos que formam as faces do prisma. No prisma regular, temos $A_L$ = n. $A_F$ (n = número de lados do polígono da base)

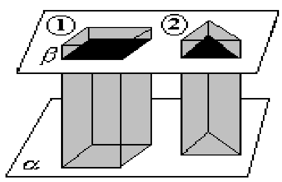
área da base ($A_B$): área de um dos polígonos das bases;

área total ($A_T$): soma da área lateral com as áreas das bases.

**GENERALIZAÇÃO DO VOLUME DE UM PRISMA**

Para obter o volume de um prisma, vamos usar o princípio de Cavalierí (matemático italiano, 1598-1697), que generaliza o conceito de volume para sólidos diversos.

Dados dois sólidos com mesma altura e um plano $\alpha$, se todo plano $\beta$, paralelo a $\alpha$, intercepta os sólidos e determina secções de mesma área, os sólidos têm volumes iguais:




$\mathbf{a\,//\,\beta}$ **e** $\mathbf{A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2}$

Se **1** é um paralelepípedo retângulo, então $V_2 = A_Bh$.

Assim, o volume de todo prisma e de todo paralelepípedo é o produto da área da base pela medida da altura:

$\mathbf{V_{prisma} = A_Bh}$

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

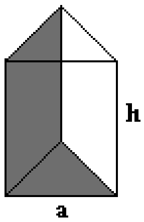
01.Calcule a área total e o volume de um cubo cuja diagonal mede $2\sqrt{3}$m.

**Solução:**

$$d_C = a\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = 2m$$
$$A_T = 6a^2 = 6 \cdot 2^2 = 24m^2$$
$$V = a^2 = 2^3 = 8m^3$$

02.Um prisma triangular tem a aresta da base igual à altura, a área LATERAL é de 12 cm$^2$.Calcule a área total

**Solução:**



Sendo:

**a** a aresta da base

**h** a altura

**a = h**

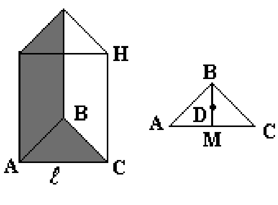
$$A_L = 12 \Rightarrow 3ah = 12 \Rightarrow 3h \cdot h = 12 \Rightarrow 3h^2 = 12 \Rightarrow h = 2$$

$$A_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{(a base é um triângulo equilátero)}$$

$$A_T = A_B + 2A_b = 12 + 2 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 2 + \frac{2 \cdot 4\sqrt{3}}{4} = 12 + 2\sqrt{3cm^2}$$

03.O apótema da base de um prisma triangular regular tem 5cm e a área lateral mede 100cm$^2$. Calcule a altura do sólido.

**Solução:**



Sendo:

**a** o apótema da base $(\overline{DM})$

**h** a altura do triângulo equilátero $(\overline{BM})$

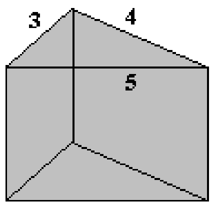
l aresta da base

**H** a altura do prisma

Temos pela propriedade do baricentro

$$h = 3a \Rightarrow h = 15$$
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 15 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = 10\sqrt{3}$$
$$A_L = 3A_F \Rightarrow 100 = 3\ell H = 3 \cdot 10\sqrt{3}H \Rightarrow$$
$$H = \frac{10}{3\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{9}\text{cm}$$

04.Calcule o volume de um prisma reto de base triangular, de 3cm, 4cm e 5cm de lados, sabendo que a área lateral mede $72cm^2$.



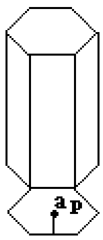

**Solução:**

O volume de um prisma é dado por $V = A_B h$.

A área da base é a área do triângulo e pode ser calculada por:

$$A_B = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = = \sqrt{36} = 6$$

05.Um prisma hexagonal regular tem área de base igual a $24\sqrt{3}cm^2$. Calcule seu volume, sabendo que a altura é igual ao apótema da base.




**Solução:**

A base do prisma é um hexágono regular, cuja área é:

$$A_B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 24\sqrt{3} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4\text{cm}$$

Como a altura do prisma é igual ao apótema da base, temos:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\text{cm}$$

Sendo V = $A_B h$, vem:

$$V = 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 144cm^3$$

**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

01.Num paralelepípedo retângulo, as dimensões são números inteiros e consecutivos. Calcule sua diagonal e seu volume, sabendo que a aresta menor mede 2.

Sabendo que a aresta de um cubo mede 5cm, calcule:

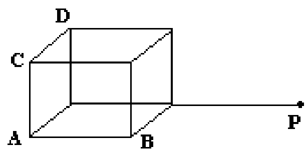
a)a diagonal do cubo;

b)a área de uma face;

c)a área total do cubo.

02.A área total de um cubo é de $150m^2$. Calcule a medida de sua aresta.

03.A aresta do cubo abaixo mede 2 e $\overline{BP}$ mede 3. Calcule PC e PD.




04.Um prisma regular triangular tem 10cm de altura. Sabendo que a medida da aresta da base é de 6cm, determine a área total do prisma.

05.A soma das dimensões **a**, **b** e **c** de um paralelepípedo retângulo é **m** e a diagonal é **d**. Para a área total **S**, temos:

a) $S^2 = m^2 - d^2$

b) $S = m^2 - d^2$

c) $S = m^2 + d^2$

d) S = md

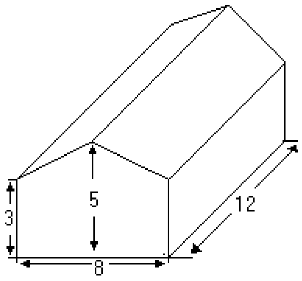
e) nra.

06. Considere **P** um prisma reto de base quadrada, cuja altura mede 3m e tem área total de $80m^2$. O lado dessa base quadrada mede:

a) 1m  b) 8m  c) 4m  d) 6m  e) 16m

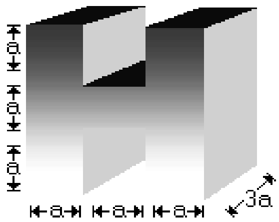
07.Determine o volume de um cubo, cuja diagonal mede $\sqrt{3}$ .

08.Calcule o volume de ar contido em um galpão com a forma e as dimensões dadas pela figura é:




a) 288   b) 384   c) 480   d) 360   e) 968

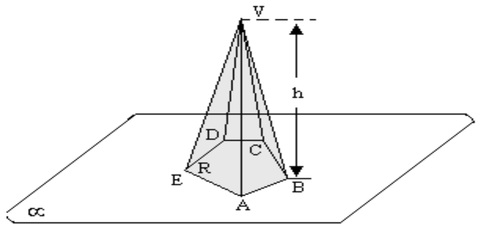
09.De um bloco cúbico de isopor de aresta 3a, recorta-se o sólido, em forma de H, Mostra na figura. O volume do sólido é:




a) $27a^3$   b) $21a^3$   c) $18a^3$   d) $14a^3$   e) $9a^3$

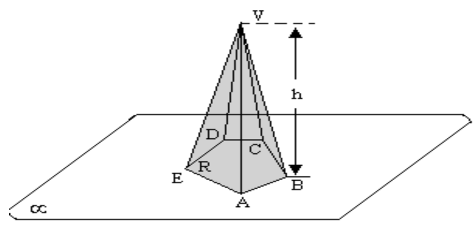
**PIRÂMIDES**

Dados um polígono convexo **R**, contido em um plano $\propto$, e um ponto **V** (vértice) fora de $\propto$, chamamos de pirâmide o conjunto de todos os segmentos $\overline{VP}$, P $\in$ R.




*Elementos de pirâmide*

Dada a pirâmide a seguir, temos os seguintes elementos:



base: o polígono **R**

arestas da base: os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ do polígono

arestas laterais: os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$, $\overline{VE}$

faces laterais: os triângulos $\overline{VAB}$, $\overline{VBC}$, $\overline{VCD}$, $\overline{VDE}$, $\overline{VEA}$

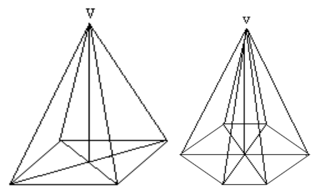
altura: distância h do ponto V ao plano

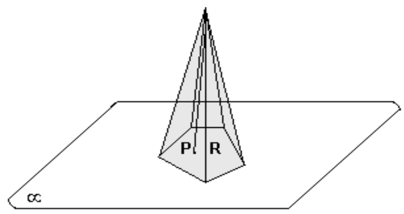
*Classificação*

Uma pirâmide é reta quanto a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro do polígono da base.

Toda pirâmide reta, cujo polígono da base é retangular, recebe o nome de pirâmide retangular. Ela pode ser triangular, quadrangular, pentagonal etc., conforme sua base seja, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono etc.

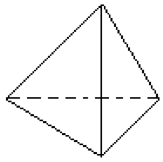
Veja:



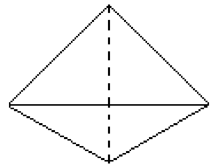




Pirâmide regular quadrangular, pentagonal e pirâmide regular hexagonal

Toda pirâmide triangular o nome de tetraedro. Quando o tetraedro possui como faces triângulos eqüiláteros, ele é denominado regular (todas as faces e todas as arestas são congruentes).

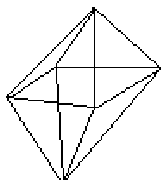


*tetraedro*

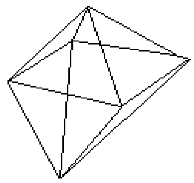


*tetraedro  regular*

A reunião, base com base, de duas pirâmides regulares de bases quadradas resulta num octaedro. Quando as faces LATERAIS das pirâmides são triângulos eqüiláteros, o octaedro é regular.



*octaedro*

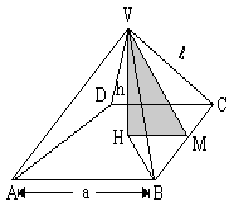


*octaedro regular*

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

01.Calcule a área total, a altura e o volume de uma pirâmide regular de base quadrada, cuja aresta da base mede 6m e cuja aresta lateral mede $\sqrt{34}$ fórmula.

**Solução:**




$$A_B = a^2 = 36m^2$$

*Cálculo da área total*

Vamos calcular o apótema da pirâmide, destacando o triângulo VBC:

$$VM^2 = \ell^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow VM^2 = 34 - 9 \Rightarrow VM = 5m$$

$$A_T = A_B + 4A_F = 36 + 4.\frac{6.5}{2} = 96m^2$$

*Cálculo da altura*

No $\triangle VHM$, temos:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow h^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow h = 4m$$

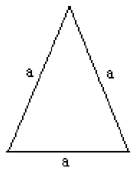
*Cálculo do volume*

$$V = \frac{1}{3}.A_b h = \frac{1}{3}.36.4 = 48m^3$$

02.Um tetraedro regular tem aresta a. Calcule a área total, a altura e o volume.

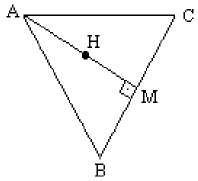
**Solução:**

*Cálculo da área da face isolando uma das faces do tetraedro, temos:*



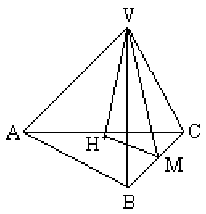

$\boxed{A_F = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$ (área do triângulo eqüilátero)

*Cálculo da área total*




$$\boxed{A_T = 4A_F = 4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}}$$

*Cálculo da altura*

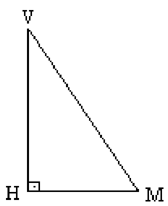



Isolando a face ABC, temos:

$AM =$ altura do triângulo eqüilátero

$$HM = \frac{1}{3}.AM = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Isolando o $\triangle VHM$, vem:




$VM = AM$

$h^2 + HM^2 = VM^2 \Rightarrow h^2 = AM^2 - HM^2 \Rightarrow$

$h^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{27a^2 - 3a^2}{36} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow$ Cálculo do volume

$h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$V = \frac{1}{3}.A_B h = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

01.Uma pirâmide regular quadrangular tem apótema igual a 9 cm. Sendo o lado da base de 4 cm, calcule:

a) a área da base;

b) a área de cada face lateral;

c) a altura da pirâmide;

d) a área lateral da pirâmide.

02.Calcule a área lateral de uma pirâmide quadrangular, cuja base está inscrita numa circunferência de $6\sqrt{2}$ cm de raio de 8 cm de altura.

03.Uma pirâmide regular de base hexagonal tem 6 cm de aresta da base de 10 cm de aresta lateral. Calcule:

a) a área da base;

b) a área lateral;

c) a altura da pirâmide.

04.Calcule a área total e altura de um tetraedro regular de 12 cm de aresta.

05.Considere uma pirâmide de base quadrada, cujo lado é 2a. Sabendo que a área lateral é $\frac{3}{4}$ da área lateral de um prisma reto de base e altura igual às da pirâmide, então a altura da pirâmide mede:

a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$

b) $\frac{3}{4}a$

c) $4\sqrt{5}a$

d) $\frac{4\sqrt{5}}{5}a$

e) $\frac{3}{2}a$

06.Uma pirâmide regular, cuja base é um quadrado de $6\sqrt{6}$ cm de diagonal e cuja é igual a $\frac{2}{3}$ do lado da base, tem área total igual a:

a) $96\sqrt{3}cm^2$

b) $252cm^2$

c) $288cm^2$

d) $84\sqrt{3}cm^2$

e) $576cm^2$

07.Calcule o volume de um octaedro regular, obtido a partir de duas pirâmides, sabendo que a área da base é de $36cm^2$. (Lembre que em um octaedro regular as pirâmides têm base quadrada e as faces são triângulos eqüiláteros.)

08.Calcule o volume de uma pirâmide reta de 15 m de altura, cuja base é um triângulo de lados 5m, 8m e 11m. ($S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, em p é o semiperímetro do triângulo).

09.A base de uma pirâmide reta de altura $3r$ é um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio $r$. Determine o volume da pirâmide.

10.Uma pirâmide regular hexagonal tem o apótema de base igual a 6cm. Sabendo que o apótema da pirâmide vale 1cm, calcule o seu volume.

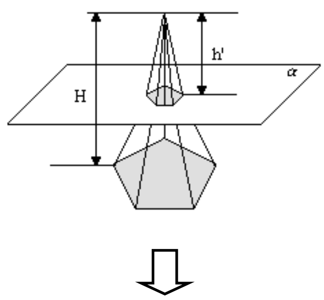
**TRONCOS**

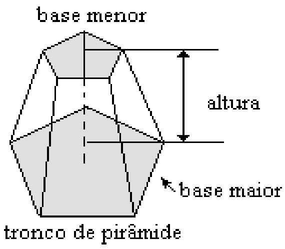
Se um plano interceptar as arestas de uma pirâmide ou um cone, paralelamente suas bases, o plano dividirá cada um desses sólidos em dois outros: uma nova pirâmide um tronco de pirâmide; e novo cone e um tronco de cone.

Vamos estudar os troncos.

*Troncos de pirâmide*

Dado o tronco de pirâmide regular a seguir, temos:






as bases são polígonos regulares e semelhantes;

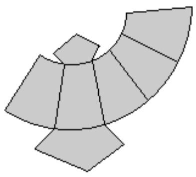
as faces laterais são isósceles congruentes.

*Áreas*

Temos as seguintes áreas:

área lateral ($A_L$): soma das ares dos trapézios isósceles congruentes que formam faces laterais.

Área total ($A_T$): soma da área lateral com a soma das áreas de base menor ($A_b$) e maior ($A_B$).



$$A_T = A_L + A_B + A_b$$

Volume

O volume de um tronco de pirâmide regular é dado por: $V_T = \frac{h}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B + A_b})$.

Sendo V o volume da pirâmide de V' o volume da pirâmide obtido pela secção é válido na relação:

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{H}\right)^3$$

**CILINDROS**

*Primeiros Conceitos*

***Definição***

Considere dois círculos de mesmo raio **r** contidos em planos paralelos e seja **e** a reta que passa pelos seus centros.

Chama-se *cilindro circular,* ou simplesmente *cilindro,* a reunião de todos os segmentos paralelos à reta **e**, cujas extremidades pertencem cada uma a um dos círculos considerados.

*Elementos do Cilindro*

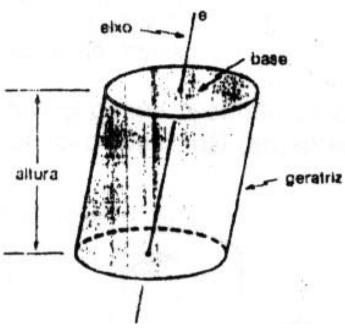
Com relação ao cilindro dessa figura, temos,

Bases: são os dois círculos considerados na definição.

**Eixo**: É a reta **e**, que passa pelos centros das bases.

**Geratriz**: É qualquer segmento paralelo ao eixo, cujas extremidades pertencem às circunferências das bases. Em todo cilindro, as geratrizes são congruentes entre si.

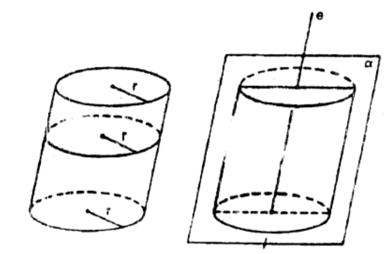
**Altura**: É a distância dos planos que contém as bases.




***Secções do Cilindro***

A intersecção, não-vazia, de um cilindro com qualquer plano que seja paralelo às bases é uma *secção transversal* do cilindro. A intersecção de um cilindro com qualquer plano que contém seu eixo é chamado *secção meridiana* do cilindro.

Verifica-se que qualquer secção transversal de um cilindro é um círculo congruente ás bases, enquanto toda secção meridiana é um paralelogramo.




secção transversal     secção meridiana

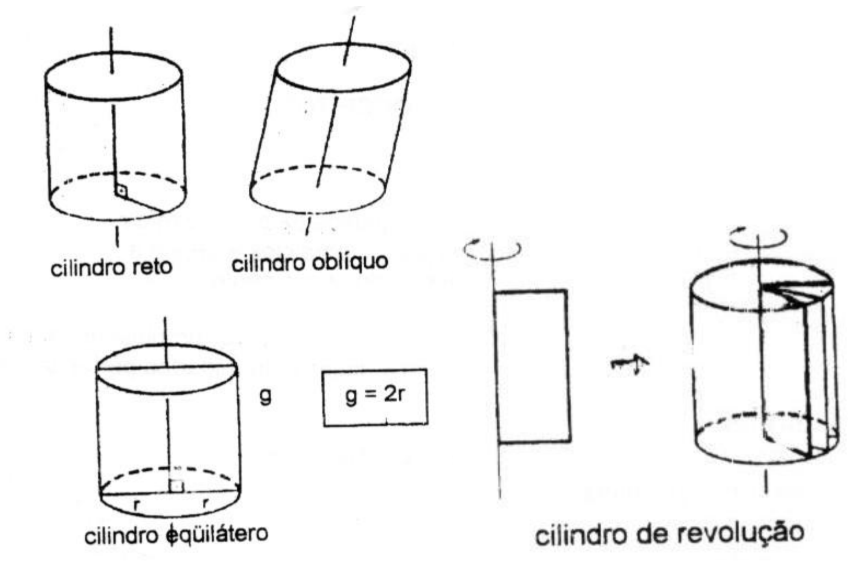
***Classificação dos Cilindros:***

Um cilindro é denominado *reto* se o seu eixo é perpendicular aos planos das bases. Um cilindro não-reto é denominado *oblíquo*.

*Observações:*

Dentre os cilindros retos devemos destacar o circuito **eqüilátero**, no qual as geratrizes são congruentes aos diâmetros das bases.

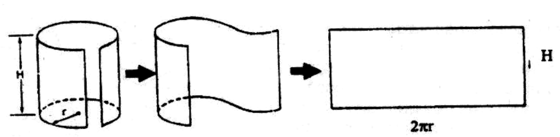
Todo cilindro reto pode ser definido como sendo o sólido gerado pelo rotação completa de um retângulo em torno de um de seus lados. Por isso, o cilindro reto também é chamado *cilindro de revolução*.




*Área lateral e área total*

Imagine que a superfície lateral de um cilindro circular reto seja feita de papel. Cortando-se essa superfície segundo uma geratriz, podemos planificá-la, obtendo um retângulo, cuja base tem o comprimento da circunferência da base do cilindro e cuja altura é a própria altura do cilindro. A área retângulo é a própria área da superfície lateral do cilindro reto, logo.

$S_t = 2\pi r.\ H$




Para obter a área total do cilindro reto, basta somar as áreas das duas bases com a área lateral.

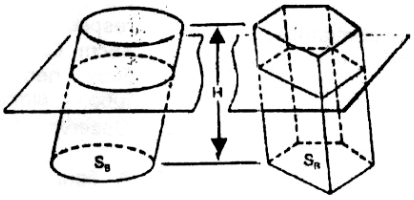
$\mathbf{S_t = S_t + 2.S_B}$

**$S_t = 2\,\pi r.H + 2\,.\,\pi r^2$**

**$S_t = 2\pi r\,(H + r)$**

*Volume do Cilindro*

Com o auxílio do *princípio de Cavalieri*, podemos facilmente constatar que um cilindro pode ser decomposto em prismas, cujas alturas são iguais e cujas bases têm a mesma área, têm volumes iguais.



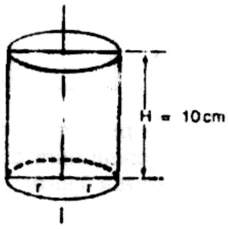

***VCILINDRO = VPRISMA***

Tal como o volume do prisma, o volume do cilindro é dado pelo produto da área de sua base pela sua altura. Assim:

$V = S_B\,.\,H$ $\qquad$ $V = \pi r^2\,.\,H$

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

01.Num cilindro de altura H = 10 cm, a área de uma secção meridiana é igual a 60 $cm^2$. Calcular, desse cilindro:




a área lateral;

a área total

o volume

**Resolução:**

A secção meridiana de um cilindro reto é um retângulo, cuja base é o diâmetro **2r** do cilindro. Como a área dessa secção é igual a $60cm^2$, temos:

$2r\,.\,H = 60$

$2r\,.\,10 = 60 \Rightarrow r = 3cm$

Então.

$S_t = 2\ \pi r^2 \ .\ h$

$S_t = 2\ \pi(3)^2 \ \ .\ \ 10 \Rightarrow S^t = 60\pi\ cm^3$

b) A área total do cilindro será:

$S_t = S_t\ +\ 2.\ S_B$

$S_t = 60\pi + 2\ .\ \pi\ .\ (3)^2$

$S_t = 60\pi + 18\pi\ \Rightarrow S_t = 78\pi\ cm^2$

c) Para o volume, teremos:

$V = S_B\ .\ H$

$V = \pi(3)^2.\ 10 \Rightarrow V = 90\pi\ cm^3$

**Resposta:**

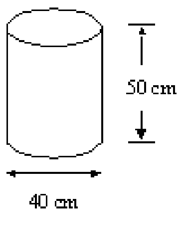
a) $60\pi cm^2$

b) $78\pi cm^2$

c) $90\pi cm^2$

02.Uma lata cilíndrica tem sua base com 40 cm de diâmetro. Se a altura da lata é de 50cm, qual é o seu volume em litros?

**Resolução:**




Observando que o raio de base da lata é r = 20 cm, temos:

$V = S_B\ \ .\ \ H$

$V = \pi\ (20)^2\ \ .\ \ 50$

$V = 20000\pi$

Então, utilizando $\pi = 3{,}14$, encontramos: $V = 62800\ cm^3$

Ou ainda: V = 62,8 ℓ

**Resposta**: 62,8 litros.

**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

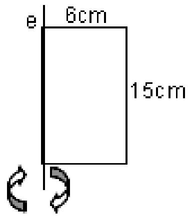
01.O raio da base e a altura de um cilindro reto medem 5cm e 20cm, respectivamente. Desse cilindro, cálculo:

a)a área lateral.

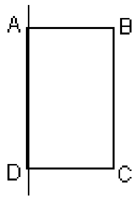
b)A área total.

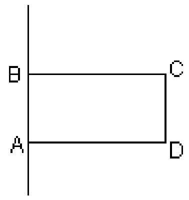
c)O volume

02.Calcule o volume do sólido gerado pela rotação completa do retângulo ao lado em torno do eixo e.




03.Seja ABCD um retângulo em que AB = 4. A rotação completa desse retângulo em torno do lado AD gera um cilindro cujo volume é 112π. Calcule o volume do cilindro gerado pela rotação desse retângulo em torno do lado AB.



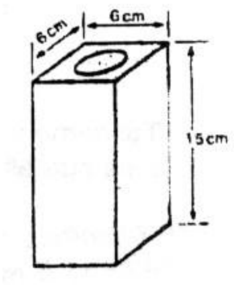

04.A área de uma secção meridiana de um cilindro eqüilátero e igual a 36cm$^2$. Calcule a área total desse cilindro.

05.Um cano de drenagem é um tubo cilíndrico com 2,0m de comprimento. Os diâmetros externo e interno são respectivamente iguais a 52cm e 46cm. Calcule o volume de barro, em litros, necessário para fabricar um tubo.

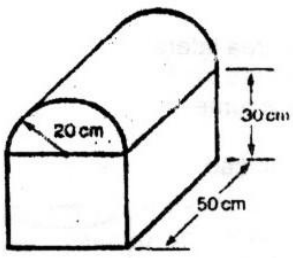
Observação: Utilizo π = 3,14

06.A figura mostra uma peça de alumínio que tem a forma de prisma reto. Essa peça apresenta um furo circular, de 4cm de diâmetro, que a atravessa do centro de uma base ao centro da outra. Calcule o volume dessa peça.

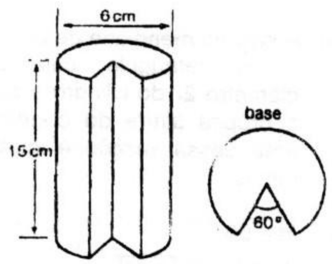
(π = 3,14)




07.Calcule o volume do baú representado na figura.

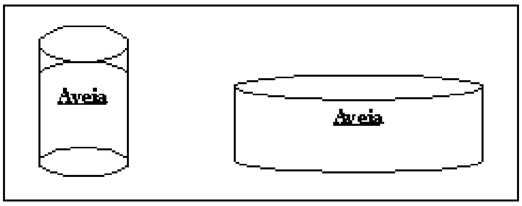



08.Uma peça metálica é feita abrindo-se um canal num cilindro reto, conforme mostra a figura.




Qual é o volume dessa peça?

09.A embalagem de um certo produto era uma lata cilíndrica de 4 cm de altura e 12 cm de diâmetro de base. O fabricante substitui essa embalagem por uma outra lata cilíndrica do mesmo material e com o mesmo volume da antiga. Se o diâmetro da base da nova embalagem é de 6cm, calcule;




a)a sua altura

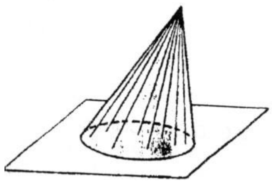
b)o percentual de economia de material na fabricação da nova embalagem

CONES

***Primeiros Conceitos***

***Definição***

Considere um círculo contido num plano e ponto Np fora desse plano. Chama-se *cone circular*, ou simplesmente *cone*, a reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade em **P** e a outra num ponto qualquer do círculo.



***Elementos do Cone***

Com relação ao cone da figura, temos:

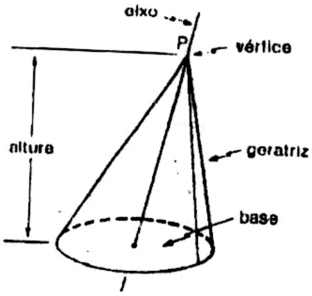
**Vértice**: É o ponto **P** da figura.

**Base**. É o círculo considerado na definição.

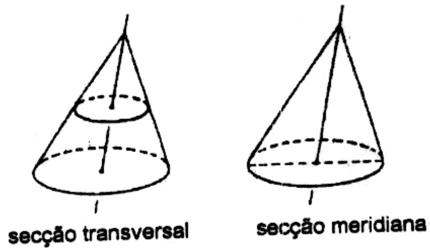
**Eixo**: É a reta que passa pelo vértice e pelo centro da base.

Geratriz: É qualquer segmento com uma extremidade no vértice e outra num ponto qualquer da  circunferência da base.

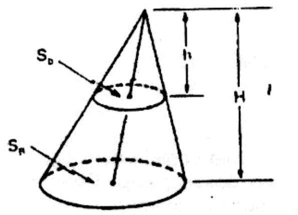
**Altura**: É a distância do vértice ao plano que contém a base.




Os conceitos de secção transversal, secção meridiana e a classificação dos cones são estabelecidos de modo análogo ao que fizemos com os sólidos já estudados. Não há necessidade de repetir essas definições. Por isso, vamos apresentá-los diretamente, por meio de figuras, e chamar a atenção para um ou outro detalhe mais importante.

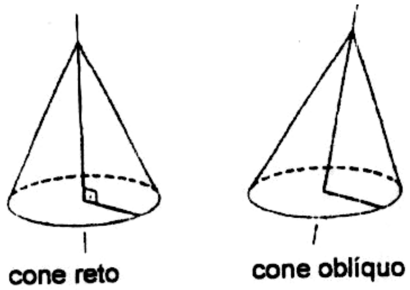



Verifica-se que qualquer Secção transversal de um cone circular é um círculo. Para essa secção, vale a propriedade análoga à que demonstramos para as pirâmides. Veja.




$$\frac{\mathbf{S_b}}{\mathbf{S_B}} = \frac{\mathbf{h^2}}{\mathbf{H^2}}$$

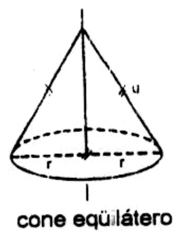
***Classificação dos Cones***




***Observações:***

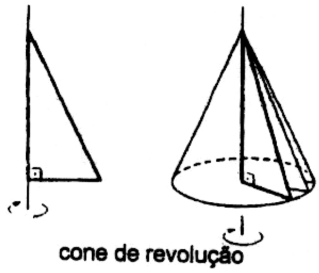
No cone reto todas as geratrizes são congruentes entre si.

*Cone eqüilátero* é todo cone reto em que as geratrizes são congruentes ao diâmetro da base.




$$\mathbf{g = 2r}$$

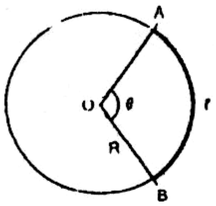
Todo cone reto pode ser definido como sendo o sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um dos catetos. Assim, o cone reto é também chamado *cone de revolução*.




***Área lateral e área total***

Para deduzir a fórmula que dá a área lateral de um cone reto, convém, antes, que você relembre o seguinte:

Se $\ell$ é o comprimento do arco AB da figura, então a medida θ, em radiano, do ângulo central AOB é:



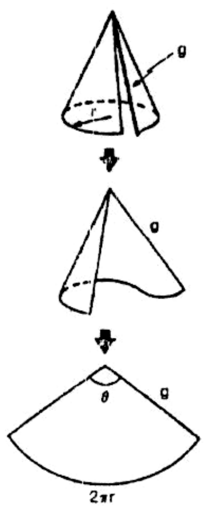

$$\theta = \frac{\ell}{R}$$

$$\left( \theta = \frac{\text{comprimento do arco}}{\text{raio}} \right)$$

Área do setor circular AOB, para $\theta$ em radianos, é dada porás:

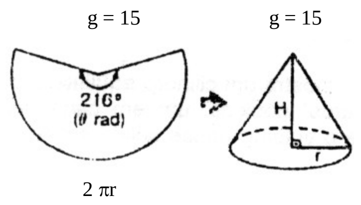
$S_{set} = \frac{\theta}{2\pi} . \pi R^2$ ou ainda, $S_{set} = \theta . \frac{R^2}{2}$

Agora, considere um cone circular reto de geratriz **g** e cujo raio da base é **r**.




Planificando-se a superfície lateral desse cone, obtém-se um setor circular de raio **g** e cujo arco correspondente tem comprimento igual a 2πr (comprimento da circunferência da base do cone). A área desse setor é a área lateral do cone.

Para θ em radianos, temos:




$$\left.\begin{array}{l} \theta = \dfrac{2\pi r}{g} \\ S_{set} = \theta \cdot \dfrac{g^2}{2} \end{array}\right\} S_{set} = \frac{2\pi r}{g} \cdot \frac{g^2}{2}$$

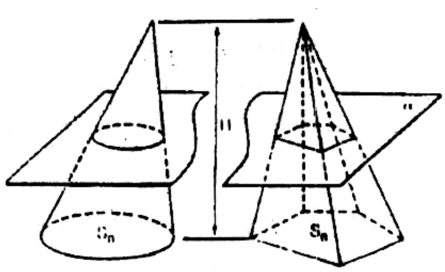
Efetuando as simplificações, obtemos: $S_{set} = \pi rg$

Assim, a área da superfície lateral do cone reto é dada por: $S\ell = \pi rg$

Para calcular a área total do cone e uma pirâmide, cujas alturas são iguais, têm volumes iguais.

***Volume do Cone***

Empregando-se o *princípio de Cavalieri*, verifica-se que um cone e uma pirâmide, cujas alturas são iguais e cujas bases têm áreas iguais, têm volumes iguais.




Desse modo, podemos concluir que o volume de um cone qualquer é igual a um terço do produto da área de sua base pela sua altura.

$V = \frac{1}{3} \cdot S_B \cdot H$

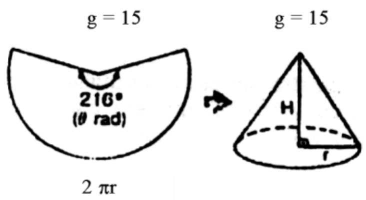
$V = \frac{1}{3} \cdot (\pi r^2) \cdot H$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \ H$

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

01.Com um cartão em forma de setor circular, cujo ângulo central mede 216º e cujo raio mede 15cm, constrói-se um cone circular. Qual é o volume desse cone?

**Resolução:**




Inicialmente vamos converter 216º em radianos.

$\Rightarrow \theta = \frac{6\pi}{5}$. Rad

Por outro lado, sabemos que: $\theta = \frac{2\pi r}{g}$

Como $\theta = \frac{6\pi}{5}$ e g = 15, a última igualdade fica assim: $\frac{6\pi}{5} = \frac{2\pi r}{15}$

De onde se tira r = 9.

Agora, vamos calcular **H** por meio do teorema de Pitágoras.

$H^2 + r^2 = g^2$

$H^2 + 9^2 = 15^2 \therefore H = 12$

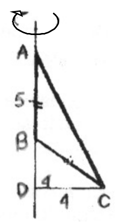
Logo, o volume do cone é:

$V = \frac{1}{3} S_B \ . \ H$

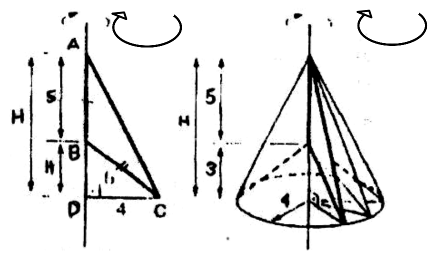
$V = \frac{1}{3}(\pi \ . \ 9^2) \ . \ 12 \Rightarrow V = 324\ \pi$

**Resposta: 324 $\pi$cm$^3$.**

02.Calcular o volume do sólido gerado pela rotação completa do triângulo isósceles ABC, em torno do lado AB.




**Resolução**



No triângulo retângulo BCD (fig. 1), temos:

$h^2 + 4^2 = 5^2 \;\therefore\; h = 3$

Logo,

$H = 5 + h \Rightarrow H = 5 + 3 \therefore H = 8$

Agora, note que a rotação do triângulo ABC, torno do lado AB, gera o sólido da figura 2. O volume **V** desse sólido é igual à diferença entre os volumes de dois cones retos de mesma base, com r = 4, e de alturas H = 8 e h = 3. Então,

$V = \frac{1}{3}(\pi.4^2) . 8 - \frac{1}{3}(\pi . 4^2) . 3$

Efetuando os cálculos, obtemos: $V = \frac{80\pi}{3}$

**Resposta:** $\frac{80\pi}{3}$

**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

01.De um cone reto de altura H = 12cm e geratriz g = 13 cm, calcule:

a) a área lateral;

b) a área total;

c) o volume.

02.Num cone reto, de altura H = 8cm, a área de uma secção meridiana é igual a 48 $cm^2$. Calcule:

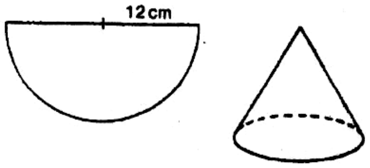
a) a área lateral;

b) a área total;

c) o volume.

03.Planificando-se a superfície lateral de um cone reto, de altura h = 3 e do raio da base r = 4, obtém-se um setor circular. Calcule a medida do ângulo desse setor em radianos e em graus.

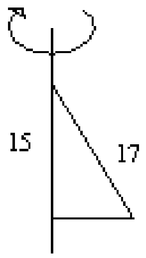
04.Um cartão tem a forma de um semicírculo de 132cm de raio. Com esse cartão constrói-se um cone circular reto.

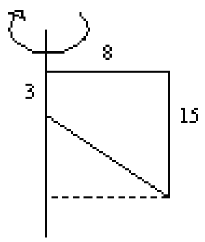


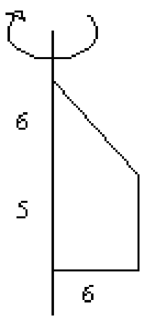

a) Verifique que esse cone é eqüilátero.

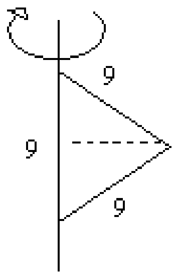
b) Calcule o seu volume.

05.Nos exercícios de **5** a **8** calcule os volumes dos sólidos gerados pelas rotações das figuras em torno dos eixos indicados.



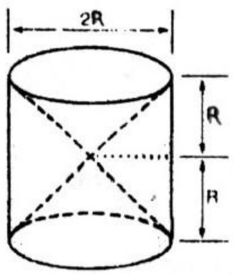






***IMPORTANTE:***

A figura mostra um cilindro eqüilátero com dois “furos” cônicos, um em cada base. Calcule o volume desse sólido em função de **R**.



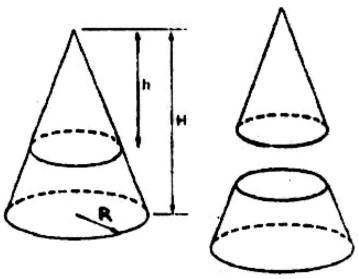

A figura mostra um cone reto que, seccionado por um plano paralelo à base, fica decomposto em um novo cone e um tronco de cone. Calcule.

os volumes dos três sólidos;

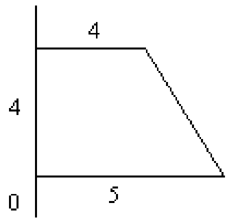
as áreas laterais dos três sólidos;

a área total do trinco de cone.

*DADOS: R = 6 cm, H = 15 cm e h = 10 cm.*




Calcule o volume do sólido gerado pela rotação do trapézio retângulo da figura em torno do eixo **e**



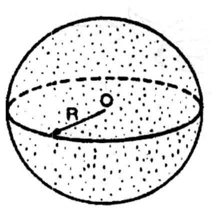

**ESFERA**

***Definição***

Dados um ponto **O** e uma distância **R**, chama-se *esfera* o conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias ao ponto **O** são menores ou igual a **R**.

O ponto **O** é o *centro* da esfera e **R** é o seu *raio*.

Além da esfera, definimos também a *superfície esférica* como sendo o conjunto de todos os pontos de espaço situados a uma mesma distância **R** de um ponto fixo **O**.

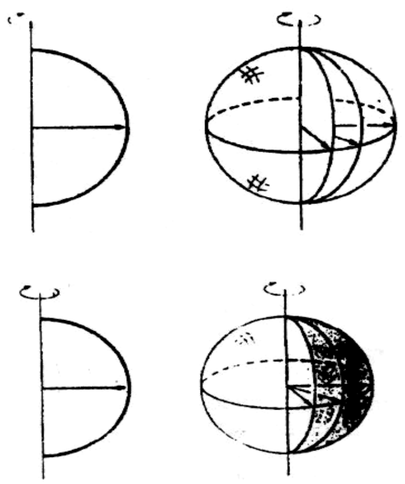



Os conceitos de esfera e de superfície podem também ser formulados por meio de rotações de figuras.

Veja:

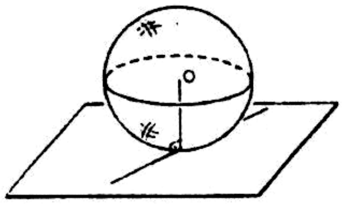
A esfera é gerada pela rotação de um *semicírculo* em torno de seu diâmetro.

A superfície esférica é gerada pela rotação de uma *semicircunferência* em torno de seu diâmetro.

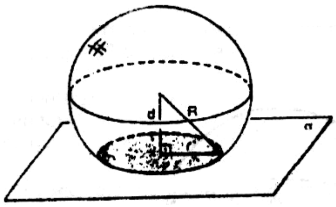


***Área de uma Secção Esférica***

Um plano e uma esfera que têm um único ponto comum são denominados tangentes. Nesse caso, o raio que tem uma extremidade no ponto de tangência é perpendicular ao plano.



Qualquer outro plano que intercepte uma esfera, não sendo tangente a ela, intercepta a segundo um círculo. O raio **r** desse círculo depende da distância **d** do centro da esfera ao plano de secção.



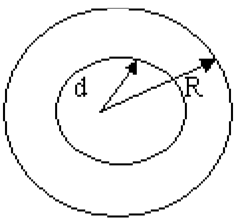

Observe que, sendo **S** a área da secção, temos: S = $\pi r^2$ Por outro lado, pelo teorema de Pitágoras, obtemos: $r^2 + d^2 = R^2 - d^2$. Logo,

$\mathbf{S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi\ (R^2 - d^2)}$

Esse resultado, que expressa a área da secção em função do raio **R** da esfera e da distância **d**, será de grande valia para determinar o volume da esfera. Desde já é importante você observar que:

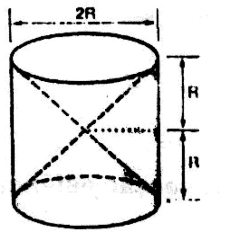
$\mathbf{S = \pi\ (R^2\ + d^2).}$

É também a área de uma coroa circular de raios **R** e **d**.



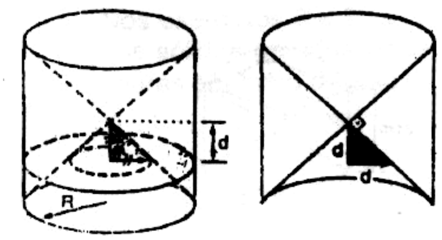

$\mathbf{S_{COROA} = \pi\ (R^2 - d^2)}$

***Volume da esfera***O volume da esfera será obtido com o auxílio do *princípio* de *Cavalieri*. (sólidos geométricos de mesma altura terão o mesmo volume se suas respectivas secções planas forem de áreas iguais Para tanto, vamos utilizar o seguinte sólido, conhecido como *anticlepsidra*.




Trata-se de um cilindro eqüilátero, do qual foram “eliminados” dois cones cujas bases são as próprias bases do cilindro e cujas alturas são iguais à metade da altura do cilindro. O centro do cilindro é o vértice dos dois cones.

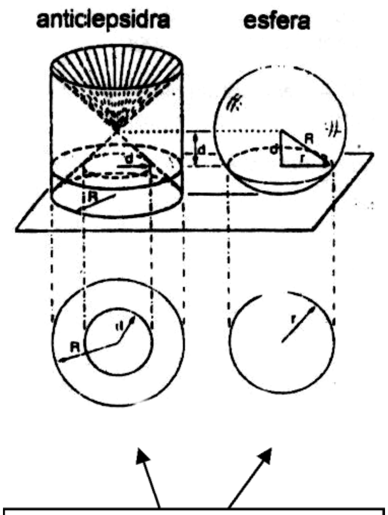
Nesse sólido, vamos considerar uma secção transversal determinada por um plano situado a uma distância **d** do vértice dos cones.




Essa secção é uma coroa circular. Nela, é imediato que o raio da circunferência menor é igual à distância **d**. O raio da circunferência maio é o  próprio raio **R** da base do cilindro. Assim, a área da secção é:

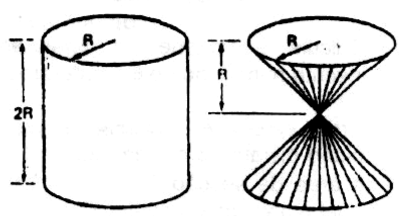
$\mathbf{S = \pi (R^2 = d^2)}$

Então, o *princípio de Cavalieri* nos permite concluir que o volume da anticlepsidra é igual ao volume de uma esfera de raio **R**. Veja as figuras:




Áreas iguais a $\pi$ ($R^2 - d^2$)

Por outro lado, o volume da anticlepsidra é fácil de ser determinado. Para isso basta subtrair os volumes dos dois cones do volume do cilindro eqüilátero.




$V - \pi R^2 \ . \ 2R - 2 \ . \ \frac{1}{3} . \ \pi R^2 \ . \ R$

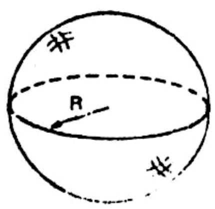
$V = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Com isso, fica estabelecido a seguinte propriedade.

***Teorema***

O volume de uma esfera de raio **R** é dado pela fórmula.

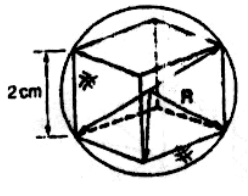



$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

**EXEMPLOS RESOLVIDOS**

01.Calcular o volume da esfera circunscrita a um cubo de aresta a = 2cm.

**Resolução:**




Os oito vértices do cubo pertencem à superfície esférica. Assim, o centro da esfera é um ponto eqüidistante dos vértices do cubo. Esse ponto é o próprio centro do cubo (ponto de encontro das diagonais). Desse modo, o raio da esfera é a metade da diagonal do cubo. Logo.

$R = \frac{2\sqrt{3}}{2} \therefore R = \sqrt{3}$ cm

Assim, o volume da esfera é:

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

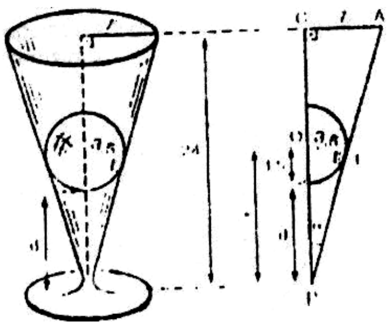
$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3$

$V = \frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3}) \Rightarrow V = 4\pi\sqrt{3}$

**Resposta: $4\pi\sqrt{3}$ cm$^3$**

02.Uma pequena bola de borracha, de 3,5 cm de raio, é colocada dentro de um vaso cônico. A abertura do vaso tem 7 cm de raio e sua profundidade é de 24cm. Calcular a distância da bola ao fundo do vaso.

**Resolução:**



Na figura 1 você vê a situação proposta pelo problema. Nela, **d** é a distância da bola ao fundo do vaso. Agora, observe a figura 2. Com base nela resolvemos o problema.

No triângulo retângulo CPA, vamos calcular AP.

$(AP)^2 = 7^2 + 24^2 \therefore AP = 25$

Agora, note que os triângulos CPA e TPO são semelhantes, pois cada um deles possui um ângulo reto e ___ P é um ângulo comum. Então,

$$\frac{OP}{AP} = \frac{OT}{AC} \Rightarrow \frac{X}{25} = \frac{3,5}{7} \Rightarrow X = 12,5$$

Assim, a distância **d** procurada é

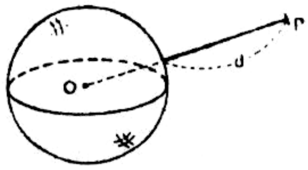
$d = x - 3,5$

$d = 12,5 - 3,5 \Rightarrow d = 9$

**Resposta: 9 cm**

***Observação:***

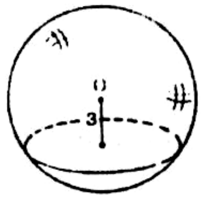
Note que, distância de um ponto a esfera é a distância desse ponto a superfície esférica, como mostra a figura seguinte.



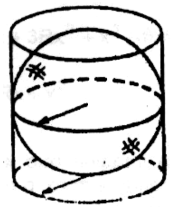
**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

01.Calcule o volume de uma esfera inscrita num cubo de 6cm da aresta.

02.Uma esfera é seccionada por um plano distante 3 cm de seu centro. Se a área da secção é igual a $16\pi$ $cm^2$ qual é o volume da esfera?



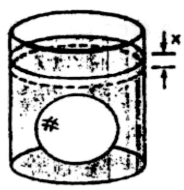
03.Uma esfera, cujo volume é igual a $\frac{256\pi}{3} cm^3$, está inscrita num cilindro eqüilátero, conforme mostra a figura. Calcule, do cilindro:



a)a área lateral;

b)o volume

04.Uma esfera metálica, de 3 cm de raio, é colocada dentro de um recipiente cilíndrico que contém água e cujo raio da base é igual a 6cm. Se a água não transbordou, de quanto subiu o seu nível?



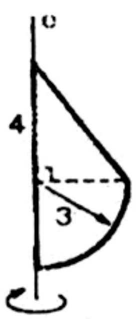
05.Uma bola de sorvete, de 6cm de diâmetro, é servida numa “casquinha” cônica, cuja abertura tem 5cm de diâmetro e cuja profundidade é de 12cm. Se a bola de sorvete derreter completamente, haverá vazamento?

***Observação:*** Despreze a quantidade de sorvete que a casquinha possa absorver.

06.Calcule o volume da esfera inscrita num cone eqüilátero, cujo raio da base é r = $\sqrt{3}$ .

07.Calcule o raio da esfera inscrita num cone reto de geratriz g = 13 e de altura H = 12.

Nos exercícios **8** e **9** calcule os volumes dos sólidos gerado pelas rotações das figuras em torno do eixo **e**.





10.Calcule o raio da esfera inscrita numas octaedro regular da aresta a = 2.

***Área da Superfície Esférica***

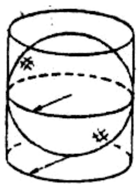
Assim, podemos enunciar o seguinte:

A área de uma superfície esférica de raio **R** é dada pela fórmula $S = 4\pi R^2$

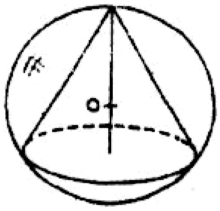
**EXERCÍCIOS**

01.Calcule a área da superfície de uma esfera cujo volume é $36\pi$ cm$^3$.

02.Uma esfera está inscrita num cilindro eqüilátero. O que se pode concluir sobre a área da superfície esférica e a área lateral do cilindro?



03.A figura mostra um cone reto, cuja base tem área igual a $144\pi$ cm$^2$, inscrito numa esfera cuja superfície tem área igual a $900\pi$ cm$^2$. Calcule o volume do cone.




Nos exercícios **4** e **5** calcule as áreas totais dos sólidos gerados pelas rotações das figuras em torno do eixo **e**.