UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Luiz Manoel de Santana Neto

ANÁLISE COMBINATÓRIA: LEMAS DE KAPLANSKY, PERMUTAÇÕES CAÓTICAS, O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS E SUAS APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

RECIFE
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Luiz Manoel de Santana Neto

ANÁLISE COMBINATÓRIA: LEMAS DE KAPLANSKY, PERMUTAÇÕES CAÓTICAS, O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS E SUAS APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Machado

RECIFE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N469 Neto, Luiz Manoel de Santana

Análise combinatória: lemas de Kaplansky, permutações caóticas, o princípio da casa dos pombos e suas aplicações namatemática do ensino médio / Luiz Manoel de Santana Neto. - 2020.

81 f. : il.

Orientador: Ricardo Machado Nunes Junior.

Inclui referências e anexo(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2020.

1. Análise Combinatória. 2. Lemas de Kaplansky. 3. Princípio de Dirichlet. 4. Permutação Caótica. I. Junior, Ricardo Machado Nunes, orient. II. Título

CDD 510

LUIZ MANOEL DE SANTANA NETO

Análise Combinatória: Lemas de Kaplansky, Permutações Caóticas e Princípio das Casas dos Pombos e suas aplicações na Matemática do Ensino Médio

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em ____ /____/_____

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Ricardo Machado Nunes Junior (Orientador)– UFRPE

____

Prof. Dr. José Alvino de Lima Filho – **IFPE - Recife**

____

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva– PROFMAT/UFRPE

À minha família

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, por ser meu eterno ajudador e ter me concedido a possibilidade de concluir esse curso que por diversas vezes acreditei não ser possível, pois, além das ocupações naturais de um mestrado, estive bastante sobrecarregado com obrigações profissionais e pessoais.

Aos meus pais, Maria do Socorro e Valdemiro Malaquias, por desde cedo terem se preocupado com meus estudos e, mesmo sem condições financeiras propícias para me ofertar as melhores escolas, com amor, dedicação e esforços conseguiram transformar o que nos era possível na melhor das oportunidades.

À minha esposa, Danúbia Daiany de Oliveira Santana, por suas orações, aconselhamentos, paciência e o amor dispensados a mim nos vários momentos de dificuldades vivenciados não apenas durante o período de curso mas também na vida.

À minha filha, Débora de Oliveira Santana, mesmo sem entender o que se passava, pelo fato de possuir apenas três anos de idade, com seus simples olhares e abraços transformaram dias de intenso cansaço e abdicação em momentos prazerosos e fáceis de serem enfrentados.

À minha família, por toda oração e palavras de incentivo para que eu conseguisse chegar ao final do curso.

Ao meu orientador e professor, Dr. Ricardo Machado, por suas valiosas orientações e sua constante atenção, dispensadas sempre que eu necessitava.

Aos meus amigos M.e. Anderson Neves e D.ra Anekécia Lauro, por toda ajuda e incentivo durante o período de elaboração da dissertação.

A todos amigos de turma, pois foram eles que estiveram comigo, compartilhando de horas exaustivas de estudos, além de momentos de bastante descontração, dentro e fora de sala.

"Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)

DECLARAÇÃO

Eu, LUIZ MANOEL DE SANTANA NETO, declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título "**Análise Combinatória: lemas de Kaplansky, permutações caóticas, o princípio da casa dos pombos e suas aplicações na matemática do ensino médio**", entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador RICARDO MACHADO NUNES JUNIOR, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 08 de setembro de 2020.

Luiz Manoel de Santana Neto

Resumo

Por meio de uma sequência didática, o presente trabalho tem por finalidade apresentar a alunos e professores da educação básica a importância do ensino de algumas técnicas de contagem, da Análise Combinatória, tais como Permutação Caótica, Lemas de Kaplansky e Princípio de Dirichlet, sendo ferramentas bastante úteis quando se trata de resolver problemas combinatórios. A estruturação conceitual das técnicas contidas nesse material é fortemente embasada nos princípios aditivo, multiplicativo e no princípio da inclusão e exclusão que tornam a aprendizagem mais significativa, em detrimento da simples aplicação de fórmulas, ao distinguir-se dos livros didáticos, os quais não costumam trazer em sua composição esses conteúdos tão significativos para estudantes que pretendem se submeter a provas de concursos e vestibulares.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Permutação Caótica, Lemas de Kaplansky, Princípio de Dirichlet e Sequência didática.

Abstract

Through a didactic sequence, the present work aims to present students and teachers of basic education the importance of teaching some counting techniques, of Combinatorial Analysis, such as Chaotic Permutation, Kaplansky's Motto and Dirichlet's Principle, being tools very useful when it comes to solving combinatorial problems. The conceptual structuring of the techniques contained in this material is strongly based on the additive, multiplicative principles and the principle of inclusion and exclusion that make learning more meaningful, to the detriment of the simple application of formulas, when distinguishing from textbooks, which do not usually to bring in its composition such content so significant for students who intend to take exams and entrance exams.

Keywords Combinatory Analysis, Chaotic Permutation, Kaplansky's Motto, Dirichlet's Principle and Didactic Sequence.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

A Análise Combinatória é considerada, por alunos do ensino médio, como um dos temas mais complexos da Matemática, gerando grandes dificuldades no que se refere à formulação e interpretação de seus enunciados. A Combinatória analisa conjuntos finitos de objetos simples e suas configurações discretas (arranjos, disposições, permutações, entre outras) e utiliza uma série de técnicas, normalmente pré-elaboradas, para cada tipologia de objeto, sua contagem ou medição. Conforme Pessoa e Borba (2012), a Análise Combinatória permite quantificar conjuntos (ou seus subconjuntos) de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, formando novas configurações, com os mesmos elementos, apenas arranjando-os de maneiras distintas.

É possível perceber certa presença dos conceitos combinatórios nos livros didáticos do Ensino Fundamental II, pois de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é nessa fase em que os primeiros problemas de princípio da contagem são expostos, por meio de uma abordagem simples e um tanto quanto metódica, sem a necessidade de interpretação do que, de fato, ele representa. No entanto, seu estudo somente acaba sendo posto em prática razoavelmente em sala de aula, a partir do 2º ano do Ensino Médio, abordando fórmulas e mais fórmulas que muitos alunos sequer sabem a finalidade e, na maior parte dos casos, estão focados na resolução de exercícios diretos, que envolvem apenas permutações, arranjos e combinações. Como evidenciado por Amaral e Borba (2007) , uma aplicação não sistemática dos conceitos e exercícios só induzirá os alunos a tentarem resolver as atividades apenas aplicando suas respectivas fórmulas, impossibilitando a percepção das diferenças entre os conceitos, assim como o real aprendizado do raciocínio combinatório.

O desejo em abordar as Permutações Caóticas, Lemas de Kaplansky e Princípio da Casa dos Pombos, métodos de contagem da Análise combinatória, como objetos de estudo do presente trabalho, surgiu durante as aulas do PROFMAT, na disciplina MA12-Matemática Discreta, por meio da maneira bastante metódica e seriada que o conteúdo, do livro de Carvalho e Morgado (2014), foi apresentado, explorado especialmente por resoluções de problemas, cujos métodos utilizados faziam uso das estratégias de contagem, comumente vistas no ensino médio.

Portanto, esse despertar veio associado ao propósito de transformar os objetos de estudos em métodos que motivem os alunos a compreenderem os seus conceitos, em detrimento da simples memorização de fórmulas, utilizando essas ideias na qualidade de ferramentas que possam minimizar as dificuldades, como exemplificar, interpretar e analisar problemas de vestibulares e concursos, além de garantir que os estudantes ampliem seus repertórios no que diz respeito a estratégias de contagem.

1 Tópicos Preliminares

Neste capítulo abordamos de forma sucinta tópicos utilizados no decorrer do texto.

1.1 Conjuntos

Em combinatória, estamos quase sempre contando o número de elementos de conjuntos ou número de subconjuntos com determinada propriedade. Na sequência, temos uma breve revisão da teoria dos conjuntos, para mais detalhes veja (MORGADO et al., 1991).

Utilizamos o conceito de conjunto, como no ensino médio, como uma ideia de coleção. Uma noção completa com os axiomas da teoria dos conjuntos foge do propósito desta dissertação. A seguir há três notações básicas:

i) letras maiúsculas indicarão conjuntos. Ex. $A, B, \ldots, Z$

ii) a letra grega Ω representará o *conjunto universo*.

iii) letras minúsculas indicarão elementos dos conjuntos. Ex. $a, b, \ldots, z$.

A relação de pertencer será indicada pela letra grega $\in$ e escrevemos por exemplo, $a \in A$. O conjunto vazio será representado pela letra $\varnothing$. Um conjunto com um número reduzido de elementos será indicado simplesmente listando seus elementos. Por exemplo, o conjunto que consiste nos números $1, 2$ e 3 será representado por

$$A = \{1, 2, 3\}$$

Um conjunto também pode ser descrito por uma propriedade π, comum a todos os seus elementos e escrevemos

$$A = \{x | x \text{ tem a propriedade } \pi\}.$$

Por exemplo,

$$A = \{x | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\} \text{ é o conjunto dos números inteiros e pares.}$$

Usamos o símbolo $\#A$ para representar o número de elementos do conjunto A, isto é, a cardinalidade de A.

Se todo elemento de um conjunto A é também elemento de um conjunto B, dizemos que A é subconjunto de B e escrevemos simbolicamente $A \subset B$. Se $A \subset B$ mas existe um elemento $b \in B$ tal que $b \notin A$, diremos que A é um *subconjunto próprio de B*.

Definição 1.1. (*Conjuntos Iguais)* Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A.

$$A = B \Leftrightarrow (\forall \text{x})(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

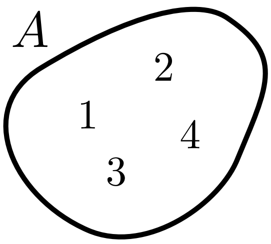
Isto é, $A \subset B$ e $B \subset A$; portanto, podemos escrever:

$$A = B \Leftrightarrow \{A \subset B \text{ e } B \subset A)$$

Para ilustrar definições, resultados e demonstrações da teoria de conjuntos, é muito comum usar uma representação gráfica chamada de *diagrama de Venn*.

Definição 1.2. Os *diagramas de Venn* consistem em curvas fechadas simples, tais como círculos ou ovais, desenhadas sobre um plano, de forma a simbolizar os conjuntos e permitir a representação das relações de pertinência entre conjuntos e seus elementos (por exemplo, $A = \{1, 2, 3, 4\}$)

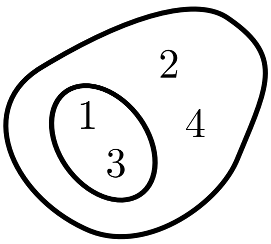
Figura 1 – Diagrama de Venn do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$



Fonte: Produzido pelo autor

e relações de continência (inclusão) entre os conjuntos (por exemplo, $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$). Assim, duas curvas que não se tocam e estão uma no espaço interno da outra simbolizam conjuntos que possuem continência;

Figura 2 – Diagrama de Venn da relação $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$



Fonte: Produzido pelo autor

Definição 1.3. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $(n \geq 2)$ conjuntos e Ω o conjunto universo.

1. O conjunto *união* de A_1 e A_2 é o conjunto dos elementos que pertencem a A_1 ou a A_2. Simbolicamente,
$$A_1 \cup A_2 = \{\omega \in \Omega | \omega \in A_1 \text{ ou } \omega \in A_2\}.$$
Mais geralmente,
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_n = \{\omega \in \Omega | \omega \in A_1 \text{ ou } \omega \in A_2 \text{ ou } \cdots \text{ ou } \omega \in A_n\}.$$

2. O conjunto *interseção* de A_1 e A_2 é o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a A_1 e a A_2. Simbolicamente,
$$A_1 \cap A_2 = \{\omega \in \Omega | \omega \in A_1 \text{ e } \omega \in A_2\}.$$
De forma geral,
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \cdots \cap A_n = \{\omega \in \Omega | \omega \in A_1 \text{ e } \omega \in A_2 \text{ e } \cdots \text{ e } \omega \in A_n\}.$$

3. Dizemos que A_1 e A_2 são *disjuntos* se $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. E dizemos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos quando forem disjuntos dois a dois, ou seja,
$$A_i \cap A_j = \varnothing, \text{ para quaisquer } i, j \in \{1, 2, \ldots n\}, \text{ com } i \neq j.$$

4. O *conjunto complementar* de A_i é o conjunto dos elementos de Ω que não pertencem a A_i. Simbolicamente
$$A_i^c = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A_i\}.$$

5. O conjunto *diferença* de A_1 e A_2 é o conjunto dos elementos que pertencem a A_1 e não pertencem a A_2. Simbolicamente,
$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c = \{\omega \in \Omega | \omega \in A_1 \text{ e } \omega \notin A_2\}.$$

6. O *produto cartesiano* de A_1 por A_2 é o conjunto de pares ordenados (a_1, a_2), na qual $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$. Simbolicamente,
$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) | a_1 \in A_1 \text{ e } a_2 \in A_2\}.$$

Teorema 1.4. *Sejam A, B e C conjuntos; então, valem as seguintes propriedades:*

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Demonstração. Fizemos a demonstração do primeiro item, o segundo pode ser demonstrado de forma análoga.

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \text{ e } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

□

Teorema 1.5. (Leis de Morgan) *Sejam A e B conjuntos. São válidas as seguintes propriedades:*

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Demonstração. Vamos demonstrar a primeira destas propriedades. A outra é demonstrada de forma análoga. Usamos o fato de que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, se, e somente se, $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ e $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$.

Seja $x \in (A \cup B)^c$, logo $x \notin (A \cup B)$. Sendo assim, $x \notin A$ e $x \notin B$. Portanto $x \in A^c$ e $x \in B^c$, logo $x \in (A^c \cap B^c)$. Acabamos de mostrar que $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.

Considere $x \in A^c \cap B^c$, então $x \in A^c$ e $x \in B^c$. Logo $x \notin A$, $x \notin B$ e $x \notin (A \cap B)$. Portanto, $x \notin (A \cup B)$, sendo assim $x \in (A \cup B)^c$. Acabamos de mostrar que $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$.

$$\therefore (\text{A} \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

□

1.2 O básico de Contagem

A grande maioria dos problemas de contagem podem ser resolvidos usando apenas os princípios aditivo e multiplicativo, tanto é que as fórmulas para os conceitos de permutação, combinação e suas variações podem ser deduzidas a partir desses princípios. A seguir temos duas versões dos enunciados destes princípios, que foram adaptados de (ROSEN, 1998).

Definição 1.6. (Princípio Aditivo 1ª versão) Se uma tarefa puder ser feita de n_1 maneiras e uma segunda tarefa de n_2 maneiras e se essas tarefas não puderem ser feitas ao mesmo tempo; então, existem $n_1 + n_2$ maneiras de fazer ambas as tarefas.

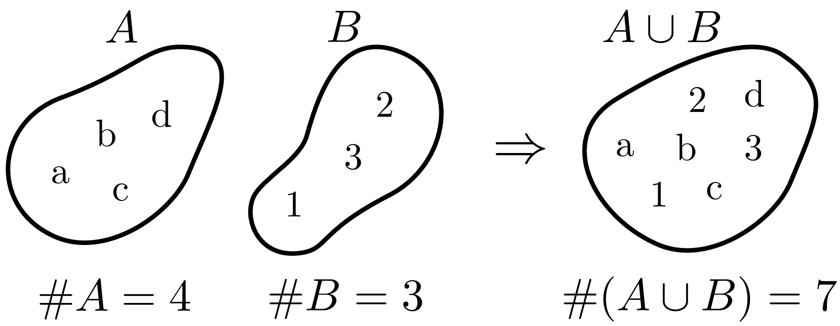
Definição 1.7. (Princípio Aditivo 2ª versão) Sejam A e B conjuntos finitos e disjuntos, então

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

Relacionamos esta segunda versão com a primeira. Sejam T_a e T_b as tarefas de escolher um elemento em A e em B, respectivamente. Existem $\#A$ maneiras de escolher um elemento em A e $\#B$ maneiras de escolher um elemento em B. Pelo Princípio Aditivo 1ª versão, como as tarefas não podem ser feitas ao mesmo tempo, o número de maneiras de escolher um elemento em cada um dos conjuntos é

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

Figura 3 – Princípio Aditivo



Fonte: Produzido pelo autor

Observação: O Princípio aditivo também é válido para n tarefas e consequentemente para n conjuntos.

Exemplo 1.8. Suponha que na disciplina de análise combinatória existem três listas de exercício. A 1ª contém 15 exercícios, a segunda contém 18 exercícios e a terceira contém 14 exercícios. De quantas maneiras um estudante pode escolher um exercício destas listas para resolver no quadro?
Solução: O estudante têm 15 opções para escolher um exercício da primeira lista, 18 opções para escolher um exercício da segunda lista e 14 opções para escolher um exercício da terceira lista. Portanto, o estudante têm $15 + 18 + 14 = 47$ maneiras de escolher um exercício.

Definição 1.9. (Princípio Multiplicativo 1ª versão) Suponha que um procedimento pode ser quebrado em duas tarefas. Se existem n_1 maneiras de fazer a primeira tarefa e n_2 maneiras de fazer a segunda tarefa, depois que a primeira tarefa estiver feita; então, existem $n_1 \cdot n_2$ maneiras de fazer o procedimento.

Definição 1.10. (Princípio Multiplicativo 2ª versão) Sejam A e B conjuntos finitos; então,

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B.$$

Vamos relacionar esta segunda versão com a primeira. Note que a tarefa de escolher um elemento no produto cartesiano $A \times B$ pode ser feita escolhendo um elemento em A e um elemento em B, do Princípio Multiplicativo 1ª versão temos

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B.$$

Observação: O Princípio multiplicativo também é válido para n tarefas e, consequentemente, para n conjuntos.

Exemplo 1.11. Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?
Solução: O procedimento de escolher um número satisfazendo estas hipóteses pode ser quebrado em três tarefas. A 1ª tarefa é escolher o primeiro dígito, (da esquerda para a direita) que pode ser feito de 9 maneiras, já que o zero não pode ser escolhido. A 2ª tarefa é escolher o segundo dígito, que pode ser feito de 9 maneiras, pois não pode ser igual a escolha do primeiro dígito. A 3ª tarefa é escolher o terceiro dígito, que pode ser feito de 8 maneiras, pois não pode ser igual a qualquer um dos dois primeiros dígitos. A resposta é $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Definição 1.12. *Permutação Simples:* Seja X um conjunto com n elementos distintos, define-se como permutação simples cada uma das sequências ordenadas, formada pelos n elementos de X. O número de permutações simples de n objetos é denotado por:

$$P(n) = n!$$

Para se obter a fórmula $P(n)$, vamos pensar da seguinte forma: pelo princípio multiplicativo, temos n modos de escolher o elemento que ocupará o primeiro lugar, uma vez tomada essa decisão, teremos $n-1$ modos de se escolher o segundo, $n-2$ modos para se escolher o terceiro, e assim por diante, até que haja apenas um único modo de se escolher o último elemento. Portanto,

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdots 1 = n!$$

Definição 1.13. *Arranjo Simples:* Seja X um conjunto com n elementos distintos, define-se como arranjo simples dos n elementos, tomados p a p, com p menor do que ou igual a n, cada um dos agrupamentos formados por p elementos, distintos entre si pela ordem ou pela espécie, do conjunto X.

O número de arranjos simples pode ser obtido pela fórmula:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

A fórmula acima pode ser alcançada partir da aplicação do Princípio Multiplicativo, visto que para se formar um agrupamento ordenado de p elementos, o primeiro lugar pode ser preenchido de n maneiras diferentes, o segundo lugar pode ser preenchido de $n-1$ maneiras, e assim sucessivamente até se ter $(n-p+1)$ maneiras de se escolher o p-ésimo elemento.

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = n(n-1)\cdots(n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

em que $n \in \mathbb{N}$, p $\in \mathbb{N}$ e n $\geq$ p

Definição 1.14. *Combinação Simples:* Seja X um conjunto com n elementos distintos, define-se como combinações simples dos n elementos, tomados p a p, com p menor do que ou igual a n, cada um dos agrupamentos formados por p elementos, distintos entre si, do conjunto X, ou como o número de subconjuntos com p elementos de um conjunto com n elementos.

O número de combinações simples pode ser obtido pela fórmula:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ainda pelo princípio multiplicativo é possível determinar a fórmula C_n^p, pois semelhante ao raciocínio utilizado para arranjo simples, tem-se n modos de escolher o primeiro elemento, $n-1$ modos de escolher o segundo elemento, e assim sucessivamente, até $n-p+1$ modos de escolher o p-ésimo elemento. Agora, é importante observar que contamos muito mais agrupamentos do que deveríamos, pois para conjuntos, a ordem não importa. Portanto precisamos dividir pelo número de formas de ordenar estes p elementos que escolhemos de forma ordenada, ou seja, por $p!$.
Assim:

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

com $n \in \mathbb{N}$, p $\in \mathbb{N}$ e n $\geq$ p.

Teorema 1.15. *(Binômio de Newton) Se x e a são número reais e n é um inteiro positivo,*

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k} \\ &= C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a^1 x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^n a^n x^0.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Demonstração. Temos

$$(x+a)^n = \overbrace{(x+a)(x+a)\cdots(x+a)}^{n \text{ parcelas}}$$

Cada termo, do desenvolvimento, é obtido escolhendo-se em cada parênteses um, x ou um a e multiplicando-se os escolhidos. Para cada valor de $k, 0 \leq k \leq n$, se escolhermos a em k dos parênteses, x será escolhido em $n-k$ dos parênteses e o produto será igual a $a^k x^{n-k}$. Isto pode ser feito de C_n^k modos. Então $(x+a)^n$ é uma soma onde há, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, C_n^k parcelas iguais a $a^k x^{n-k}$. □

Exemplo 1.16. Mostre que

$$C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - \cdots + (-1)^{r+1} C_r^r = 1.$$

Solução: Observe que $(1-1)=0$, consequentemente $(1-1)^r=0$, logo

$$\begin{aligned} 0 = & \ (1-1)^r = C_r^0 - C_r^1 + C_r^2 - C_r^3 + \cdots + (-1)^{r+1}C_r^r \\ = & \ C_r^0 - \left(C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - \cdots + (-1)^{r+1}C_r^r\right) \end{aligned}$$

mas, sendo $C_r^0 = 1$

conclui-se que:

$$C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - \cdots + (-1)^{r+1}C_r^r = C_r^0 = 1.$$

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, abordamos por meio de uma linguagem simples e elementar algumas técnicas de contagem, como O Princípio da Inclusão e Exclusão, Permutações Caóticas, Os Lemas de Kaplansky e O Princípio de Dirichlet.

2.1 Princípio da Inclusão e Exclusão

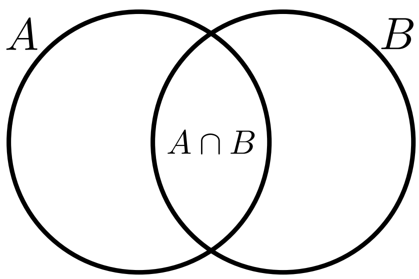
De acordo com princípio aditivo, visto na Definição 0.5, é possível contar o número de elementos da união de conjuntos disjuntos sem muitos problemas, mas para que a contagem desses elementos seja realizada independente dos conjuntos possuírem interseção não vazia, será utilizada a técnica do Princípio da Inclusão-Exclusão (PIE), de valor significativo para a análise combinatória, por ser capaz de determinar a cardinalidade da união de um número finito de conjuntos.

Os teoremas a seguir demonstram, para casos particulares, como determinar a cardinalidade da união entre dois ou três conjuntos.

Teorema 2.1.1 (Cardinalidade da união de dois conjuntos)**.** *Sejam A e B conjuntos finitos, então* $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$

Através do diagrama de Venn temos a seguinte representação:

Figura 4 – Intersecção de dois conjuntos



Fonte: Produzido pelo autor

Demonstração. É possível demonstrar essa relação entre dois conjuntos utilizando a linguagem do princípio da contagem. Sejam A e B conjuntos finitos, T_1 a tarefa de selecionar um elemento de A e T_2 a tarefa de selecionar um elemento de B. Existem $\#(A)$ maneiras de realizar T_1 e $\#(B)$ maneiras de realizar T_2. O número de maneiras de executar T_1 ou T_2 é a soma do número de maneiras de executar T_1 e o número de maneiras de executar T_2 menos o número de maneiras de executar ambos T_1 e T_2, pois esta quantidade já foi contada duas vezes. Como existem $\#(A \cup B)$ maneiras de realizar T_1 ou T_2 e $\#(A \cap B)$ maneiras de realizar T_1 e T_2, temos:

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B) \tag{2.1}$$

□

Exemplo 2.1. Numa pesquisa com jovens, foram feitas as seguintes perguntas para que respondessem sim ou não. Gosta de exatas ? Gosta de humanas? responderam sim a primeira pergunta 80 jovens, 60 reponderam sim a segunda e 15 responderam sim a ambas. Quantos jovens foram entrevistados?

Solução:
• $A =$ {alunos que gostam de exatas}
#$A = 80$
• $B =$ {alunos que gostam de humanas}
#$B = 60$
• $(A \cap B) =$ {alunos que gostam de ambas as áreas}
#$(A \cap B) = 15$

Dessa forma, fazendo #$A + \#B$ o número de alunos que gostam de ambas as áreas é contado duas vezes. Assim, para determinar o número de alunos entrevistados, retira-se o número de alunos que foi contado duas vezes, ou seja

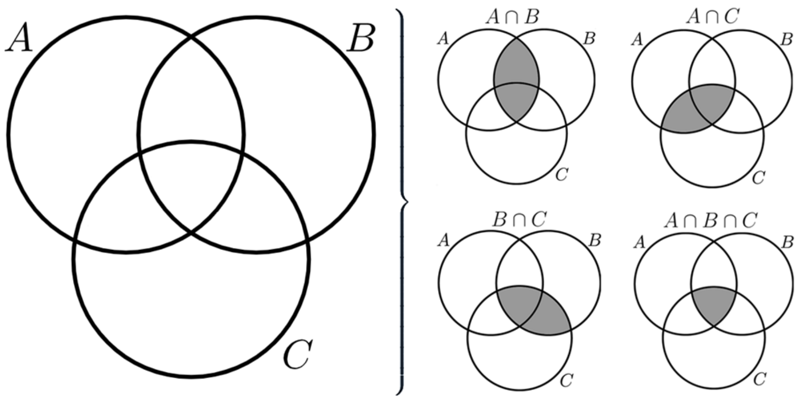
$$\begin{aligned}\#(A \cup B) =& \#A + \#B - \#(A \cap B)\\ =&80 + 60 - 15\\ =&125\end{aligned}$$

Teorema 2.1.2. *Sejam A,B e C três conjuntos finitos, então*

$$\begin{aligned}\#(A \cup B \cup C) =& \#(A) + \#(B) + \#(C)\\ &- \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C)\\ &+ \#(A \cap B \cap C)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Através do diagrama de Venn temos a seguinte representação:

Figura 5 – Intersecção de três conjuntos



Fonte: Produzido pelo autor

Demonstração. Uma maneira de demonstrar, utilizando o que foi visto na união de dois conjuntos e o Teorema 1.4, é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\#[A \cup B \cup C] =& \#[(A \cup B) \cup C] \\
=& \#(A \cup B) + \#C - \#[(A \cup B) \cap C] \\
=& \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C - \underbrace{\#[(A \cup B) \cap C]}_{\text{Pelo Teorema 1.4}} \\
=& \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C - \overbrace{\#[(A \cap C) \cup (B \cap C)]} \\
=& \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C) \\
=& \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.2. Os 32 melhores alunos do Colégio Naval submeteram-se a uma prova de 3 questões para estabelecer a antiguidade militar. Sabendo que dentre esses alunos, 5 só acertaram a primeira questão, 6 só acertaram a segunda, 7 só acertaram a terceira, 9 acertaram a primeira e a segunda, 10 acertaram a primeira e a terceira e 7 acertaram a segunda e a terceira, podemos afirmar que o número de alunos que não acertaram todas as 3 questões é:

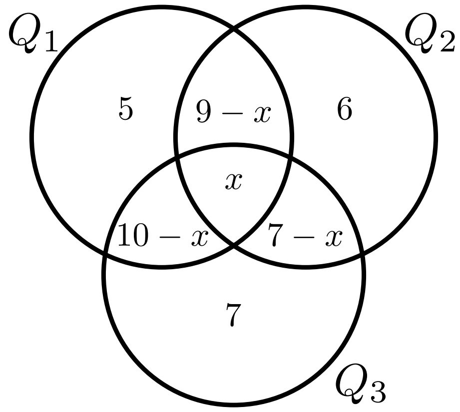
Solução: Adotando $\#(Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3) = x$, como o quantitativo de alunos que acertaram todas as questões, é possível estabelecer as relações a seguir :

- Número de alunos que resolveram as questões 1 e 2: $\#(Q_1 \cap Q_2) = 9$
- Número de alunos que resolveram apenas as questões 1 e 2: $\#[(Q_1 \cap Q_2) - (Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3)] = 9 - x$
- Número de alunos que resolveram as questões 1 e 3: $\#(Q_1 \cap Q_3) = 10$

- Número de alunos que resolveram apenas as questões 1 e 3: $\#[(Q_1 \cap Q_3) - (Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3)] = 10 - x$
- Número de alunos que resolveram as questões 2 e 3: $\#(Q_2 \cap Q_3) = 7$
- Número de alunos que resolveram apenas as questões 2 e 3: $\#[(Q_2 \cap Q_3) - (Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3)] = 7 - x$

A representação através de diagramas possibilita enxergar, mais claramente, a aplicação do **Teorema 2.1.2.**

Figura 6 – Intersecção de três conjuntos



Fonte: Produzido pelo autor

$$\begin{aligned}\overbrace{\#(Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3)}^{32} = \overbrace{\#Q_1}^{(24-x)} + \overbrace{\#Q_2}^{(22-x)} + \overbrace{\#Q_3}^{(24-x)} \\ - \overbrace{\#(Q_1 \cap Q_2)}^{9} - \overbrace{\#(Q_1 \cap Q_3)}^{10} - \overbrace{\#(Q_2 \cap Q_3)}^{7} \\ + \overbrace{\#(Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3)}^{x}\end{aligned}$$

Que nos leva a resolver a equação

$$\begin{aligned} 32 &= (24 - x) + (22 - x) + (24 - x) - 9 - 10 - 7 + x \\ 32 &= 44 - 2x \\ -12 &= -2x \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Assim, o número de alunos que não acertaram as três questões, é determinado por:

$$\#(Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3) - \#(Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3) = 32 - 6 = 26$$

Generalização do Princípio da Inclusão e Exclusão (P.I.E)

Após o princípio da Inclusão e Exclusão ter sido validado para as relações entre dois e três conjuntos, nesta seção será apresentada, de maneira indutiva, uma fórmula para o caso geral, ou seja, para n conjuntos ($n \geq 2$).

Teorema 2.1.3. *Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos finitos. A cardinalidade de*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \tag{2.3}$$

é dada por:

$$\begin{aligned}\#\bigcup_{i=1}^{n} A_i =& \sum_{i=1}^{n} \#A_i - \sum_{0<i<j\leq n} \#(A_i \cap A_j) + \cdots \\ & \cdots + (-1)^{n-1}\#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Demonstração. Vamos verificar que a fórmula é verdadeira mostrando que um elemento da união (2.3) é contada exatamente uma vez pelo lado direito da Equação (2.4). Suponha que a pertence a exatamente r $(1 \leq r \leq n)$ dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Este elemento é contado C_r^1 vezes por $\sum_{i=1}^{n} \#A_i$, C_r^2 vezes por $\sum_{0<i<j\leq n} \#(A_i \cap A_j)$, e de forma geral C_r^m por pela soma envolvendo m dos conjuntos A_i. Assim, este elemento será contado exatamente

$$C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - \cdots + (-1)^{r+1} C_r^r$$

vezes pelo lado direito de (2.4). Usando o Teorema (1.15), temos

$$0 = (1-1)^p = C_r^0 - (C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - \cdots + (-1)^{r+1} C_r^r).$$

Portanto

$$C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - \cdots + (-1)^{r+1} C_r^r = C_r^0 = 1.$$

Isto mostra que o elemento a é contado exatamente uma vez pelo lado direito de (2.4). □

Corolário (2.1.3.1)**.** Sejam Ω um conjunto e $A_1, A_2, \cdots, A_n$ subconjuntos de Ω, então:

$$\begin{aligned}\#\left(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =& \#\Omega - \sum_{i=1}^{n} \#A_i + \sum_{0<i<j\leq n} \#(A_i \cap A_j) + \cdots \\ & \cdots + (-1)^{n-1}\#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Exemplo 2.3. Quantos são os anagramas da palavra COMPLEXA que tem C em 1º lugar, ou O em 2º lugar, ou M em 3º lugar ou P em 4º lugar?

Solução:

- $A_1 = \{$anagramas de COMPLEXA que tem C em 1º lugar$\}$, $\#A_1 = 7!$

• $A_2 = \{$anagramas de COMPLEXA que tem O em 2º lugar$\}$, $\#A_2 = 7!$

• $A_3 = \{$anagramas de COMPLEXA que tem M em 3º lugar$\}$, $\#A_3 = 7!$

• $A_4 = \{$anagramas de COMPLEXA que tem P em 4º lugar$\}$, $\#A_4 = 7!$

• $\#(A_i \cap A_j)$, $1 \leq i < j \leq 4$. É o número de anagramas da palavra COMPLEXA que tem as letras nas posições i, j fixas.

$$\#(A_i \cap A_j) = 6!$$

• $\#(A_i \cap A_j \cap A_k)$, $1 \leq i < j \leq 4$. É o número de anagramas da palavra COMPLEXA que tem as letras nas posições i, j, k fixas.

$$\#(A_i \cap A_j \cap A_k) = 5!$$

• $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ é o número de anagramas da palavra COMPLEXA que tem as letras nas posições $1, 2, 3, 4$ fixas.

$$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 4!$$

Pelo PIE,

$$\begin{aligned}\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = &\sum_{i=1}^{4} \#A_i - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \#(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &- \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\end{aligned}$$

Organizando, temos

$$\begin{aligned}\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = &\ 4 \times \#A_1 - C_4^2 \times \#(A_1 \cap A_2) \\ &+ C_4^3 \times \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &- \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\end{aligned}$$

Substituindo, temos

$$\begin{aligned}\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= 4 \times P(7) - C_4^2 \times P(6) \\ &\quad + C_4^3 \times P(5) - P(4) \\ &= 16296\end{aligned}$$

2.2 Permutações Caóticas (Desarranjos)

O célebre matemático e físico suiço, Leonhard Paul Euler (1707-1783), figura 7, empenhou-se em resolver uma questão, um tanto quanto curiosa, proposta por Nicolaus Bernoulli (1687-1759), conhecida como "O PROBLEMA DAS CARTAS MAL ENDEREÇADAS" que se fundamenta em esclarecer de quantas formas distintas pode-se colocar n cartas em n envelopes, endereçados a n destinatários diferentes, de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto.
Nessas condições, estamos perante um problema de análise combinatória, intitulado por Permutações Caóticas, também conhecida como Desarranjos ou Desordenamentos, uma Permutação em que nenhum de seus elementos estará presente no seu lugar de origem.

Figura 7 – Leonarhd Euler

fonte:https://www.phylos.net

Definição: Uma permutação de $a_1, a_2, ..., a_n$ é chamada de caótica quando nenhum dos $a_i's$ se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição. (MENDES, 2014)

$$d_n := \text{é a quantidade de desarranjos em um conjunto com } n \text{ elementos}$$

Antes de demonstrar a lei de formação do número de desarranjos, serão vistos dois exemplos, cuja aplicação do princípio da inclusão e exclusão será de grande importância:

Exemplo 2.4. Determine o número de permutações simples dos elementos $a_1, a_2, ..., a_n$, nas quais a_2 está na segunda posição ou a_3 está na terceira posição.
Solução: Definindo A_2 como sendo o conjunto das permutações em que a_2 está na segunda posição e A_3 o conjunto das permutações em que a_3 está na terceira posição.

É fácil ver que $\#(A_2) = \#(A_3) = (n-1)!$ e que $\#(A_2 \cap A_3) = (n-2)!$. Assim, o número procurado nada mais é do que $\#(A_2 \cup A_3)$ que é igual a:

$$\begin{aligned}
\#(A_2 \cup A_3) &= \#(A_2) + \#(A_3) - \#(A_2 \cap A_3)\\
&= (n-1)! + (n-1)! - (n-2)!\\
&= 2 \cdot (n-1)! - (n-2)!\\
&= 2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)! - (n-2)!\\
&= (n-2)! \cdot (2n-2-1)\\
&= (2n-3) \cdot (n-2)!
\end{aligned}$$

Exemplo 2.5. Dentre as permutações simples dos n elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ determine o número daquelas em que a_2 não está na segunda posição, a_3 não está na terceira posição e nem a_4 está na quarta posição

Solução: Definimos A_i, para $i = 2, 3, 4, \cdots, n$, como o conjunto das permutações em que a_i, está na i-ésima posição.
Devemos encontrar o número de elementos no complementar da união de A_2, A_3 e A_4, que de acordo com as Leis de Morgan (1.5) $(A_2 \cup A_3 \cup A_4)^c = A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c$
Como:

1. $\#(A_2) = \#(A_3) = \#(A_4) = (n-1)!$;
2. $\#(A_2 \cap A_3) = \#(A_2 \cap A_4) = \#(A_3 \cap A_4) = (n-2)!$;
3. $\#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = (n-3)!$.

Sabendo que o número de permutações total é determinada por $n!$, a solução para o questionamento será

$$\begin{aligned}
n! - \#(A_2) - \#(A_3) - \#(A_4) + \#(A_2 \cap A_3)\\
+\#(A_2 \cap A_4) + \#(A_3 \cap A_4)\\
-\#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = n! - 3 \cdot (n-1)! + 3 \cdot (n-2)! - (n-3)!
\end{aligned}$$

Teorema 2.6. *A quantidade de desarranjos em um conjunto com n elementos, d_n, pode ser calculada da seguinte maneira:*

$$d_n = n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Demonstração. Considere todas as permutações dos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Indicando por A_i todas as permutações formadas pelos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ com a_i no i-ésimo lugar, calcularemos (d_n) o número de elementos que não pertencem a nenhum dos $A_i's$, fazendo uso do

Corolário 2.1.3.1.

$$d_n = n! - \sum_{i=1}^{n} \#A_i + \sum_{0<i<j\leq n} \#(A_i \cap A_j) + \cdots \\ \cdots + (-1)^{n-1}\#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n). \tag{2.6}$$

Visto que há n termos no primeiro somatório, C_2^n termos no segundo, C_3^n termos no terceiro,$\cdots$, $C_n^n = 1$ no último e

$$\begin{aligned} \#(A_i) &= (n-1)! \\ \#(A_i \cap A_j) &= (n-2)! \\ \#(A_i \cap A_j \cap A_k) &= (n-3)! \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \\ \#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &= 1 \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} d_n &= n! - n \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! - C_n^3 \cdot (n-3)! + \cdots + (-1)^n \cdot 1 \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!} \end{aligned}$$

evidenciando o $n!$, obtém-se:

$$\begin{aligned} d_n &= n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right) \\ &= n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.7. (FUVEST/2017-Adaptado): Luiz, Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo-secreto (ou amigo-oculto). O nome de cada um é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna. Em seguida, cada participante da brincadeira retira da urna um dos pedaços de papel, ao acaso. De quantas formas pode ocorrer a distribuição dos papéis de modo que nenhum dos participantes retire seu próprio nome?

Solução: Uma clássica questão de permutação caótica, visto que durante a distribuição dos papéis nenhum dos participantes poderá retirar seu próprio nome. Assim o número de maneiras de ocorrer tal evento, é dado por:

$$\begin{aligned} d_5 &= 5! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) \\ &= 5! - 5! + \frac{5!}{2!} - \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} - \frac{5!}{5!} \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 5 - 1 \\ &= 60 - 20 + 5 - 1 \\ &= 44 \end{aligned}$$

Exemplo 2.8. Quantas são as permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ que têm exatamente 4 elementos no seu lugar primitivo?

Solução: O número de modos de escolher os quatro elementos que ocuparão o seu lugar primitivo é $C_8^4 = 70$. Com estes elementos em seus lugares, os outros quatro elementos devem ser arrumados de forma caótica. o que pode ser feito de

$$\begin{aligned} d_4 &= 4! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \\ &= 4! - 4! + \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} \\ &= 4 \cdot 3 - 4 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

A resposta é $70 \cdot 9 = 630$.

Exemplo 2.9. (Enem adaptada / Prova cancelada 2009 / Questão 79): Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos $0, 1, 2$ e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se um real de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia dois reais de desconto. Determine o número de sequências que podem ser formadas de modo que o consumidor não ganhe nenhum desconto.

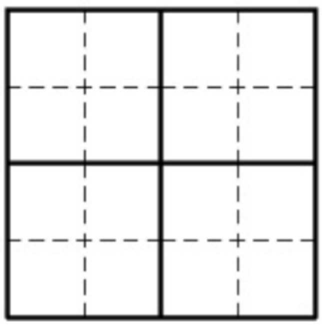
Solução: Para que não ocorra possibilidade de descontos, é necessário que nenhum dos algarismos $0, 1, 2$ e 5 ocupem suas respectivas posições no número 12,50. Portanto, o resultado desejado é determinado pelo número de permutações caóticas de 4 elementos, determinado por:

$$\begin{aligned} d_4 &= 4! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \\ &= 4! - 4! + \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} \\ &= 4 \cdot 3 - 4 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Exemplo 2.10. (IME): A figura abaixo é composta por 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números $1,\ 2,\ 3$ e 4, de modo que um número não pode aparecer 2 vezes em:

1. uma mesma linha.
2. uma mesma coluna.
3. cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas.

Figura 8 – Quadrados



fonte: clubes.obmep.org.br

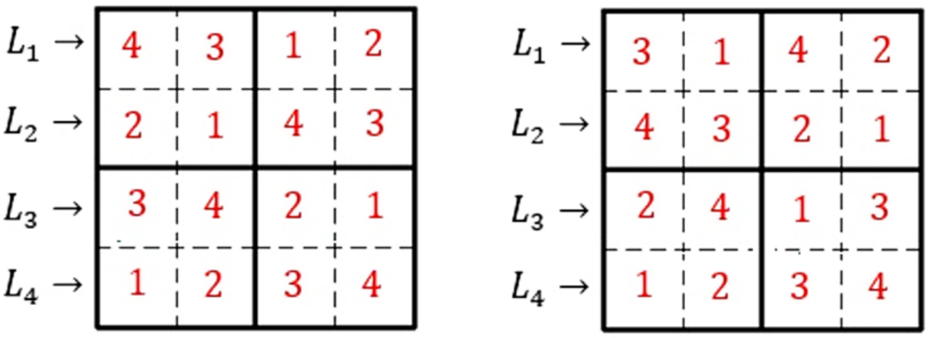
Solução: Adotando $L1, L2, L3$ e $L4$ como as linhas horizontais do quadrado, fixa-se $L1$, visto que há $4! = 24$ formas de defini-la, e analisa-se o número de maneiras de poder determinar $L4$. Por $L4$ se tratar de uma possível permutação caótica de $L1$, tem-se:

$$\begin{aligned} d_4 &= 4! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \\ &= 4! - 4! + \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} \\ &= 4 \cdot 3 - 4 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Onde, dos 9 modos de se escolher a sequência para $L4$, considera-se dois casos:

$1^{\text{o}})$ Em 8, das 9 sequências possíveis, as linhas $L2$ e $L3$ ficam automaticamente escolhidas.

Temos como exemplo as duas sequências a seguir:

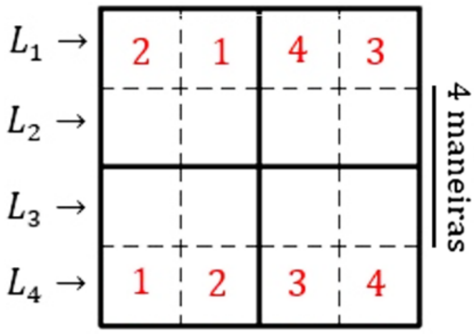


Criado pelo Autor

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, temos:

$$24 \cdot 8 \cdot 1 = 192$$

2º) E, em apenas uma, há 4 modos de preenchimento para $L2$ e $L3$.



Criado pelo Autor

Ou seja,

$$24 \cdot 1 \cdot 4 = 96.$$

Portanto, pelo Princípio Aditivo, temos: $192 + 96 = 288$ formas de preenchimento.

2.3 Os Lemas de Kaplansky

Irving Kaplansky (figura 9), matemático americano, nasceu em 22 de março de 1917 em Toronto e faleceu em 25 de junho de 2006. O talentoso matemático publicou o artigo "Solution of the problème des ménages" no Boletim da Sociedade Americana de Matemática em 1943, com uma solução para o afamado Problema de Lucas.

Kaplansky foi para a Universidade de Harvard e recebeu seu Ph.D. lá em 1941, trabalhando com Saunders MacLane. Ele foi instrutor de Benjamin Peirce em Harvard de 1941 a 1944 e, em seguida, ingressou no Grupo de Matemática Aplicada fazendo trabalhos de guerra na Universidade de Columbia de 1944 a 1945.

Seu trabalho foi bastante extenso na matemática, incluindo desde áreas da álgebra até grandes contribuições na Teoria dos Anéis, Teoria dos Grupos e Teoria dos Corpos. Publicou muitos artigos e trabalhou com diversos coautores.

Informações adaptadas extraídas de (BASS; LAM, 2007)

Figura 9 – Matemático Irving Kaplansky

fonte:www.ams.org/notices/200711/tx071101477p.pdf

2.3.1 O 1º e o 2º lemas de Kaplansky

Para podermos compreender os benefícios dos Lemas de Kaplansky, iniciamos esse capítulo com os exemplos a seguir:

Exemplo 2.11. De quantas maneiras podemos formar um subconjunto com 4 elementos, do conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, de modo que não possuam duas letras que ocupem posições consecutivas no alfabeto (por exemplo, a e b, ou ainda, f e g)?

Esse problema será resolvido criando uma forma alternativa de representar os subconjuntos onde marcaremos com o sinal (+) os elementos pertencentes ao subconjunto e com o sinal (-) os elementos que não pertencentes ao subconjunto.

$$\{a, c, e, h\} \text{ será representado por } + - + - + - - +$$

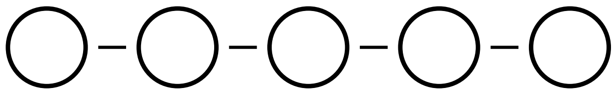
$$\{b, d, f, h\} \text{ será representado por } - + - + - + - +$$

$$\{b, e, g, h\} \text{ será representado por } - + - - + - + +$$

(O terceiro caso não é válido, pois 2 (+) juntos significa que teremos letras consecutivas)

Assim, compreendendo o problema observar-se que para solucioná-lo devemos calcular o número de formas distintas de permutar 8 símbolos, onde 4 são (-) e 4 são (+) de modo que não tenha 2 símbolos (+) juntos.

Figura 10 – cinco espaços para serem ocupados pelos símbolos (+)



Fonte: Produzido pelo autor

Veja que de acordo com a Figura 10 pode-se colocar 4 símbolos (+) em quaisquer dos cinco lugares, ou seja, é possível escolher 4 dos 5 lugares disponíveis (representados pelas circunferências) para por os símbolos (+) o que pode ser realizado de $C_5^4 = 5$ modos distintos.

Dessa forma 5 subconjuntos podem ser formados, os quais estão listados na tabela da figura 11.

Figura 11 – subconjuntos com 4 elementos do conjunto $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$\{a, c, e, g\}$	$\{a, c, e, h\}$	$\{a, c, f, h\}$	$\{a, d, f, h\}$	$\{b, d, f, h\}$

Fonte: Produzido pelo autor

Teorema 2.3.1. *(Primeiro Lema de Kaplansky) O número de subconjuntos com p elementos não consecutivos de $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ é:*

$$f(n, p) = C_{n-p+1}^{p}$$

Deseja-se formar subconjuntos formados por p elementos não consecutivos. De acordo com o exemplo anterior, os elementos desse subconjunto serão representados com o símbolo (+). Assim, teremos $(n - p)$ elementos que serão apresentados com o símbolo (-), que retratam os números que não estarão no subconjunto. Entre os símbolos (-) existirão $(n - p + 1)$ espaços vazios disponíveis. Dessa forma, resta escolher entre os $(n - p + 1)$ espaços vazios aqueles que serão ocupados pelos símbolos (+).

logo,

$$f(n, p) = C_{n-p+1}^{p}$$

Os lemas de Kaplansky são instrumentos de grande aplicabilidade na resolução de problemas de combinatória, acima de tudo aqueles que costumam ser cobrados em exames vestibulares. Pois, situações-problemas complexas teriam suas soluções determinadas de formas mais simples com o uso dos lemas.

Exemplo 2.12. Um exame vestibular constitui-se de 10 provas distintas, 3 das quais da área de Matemática. Determine de quantas formas é possível programar a sequência das 10 provas, de maneira que duas provas da área de Matemática não se sucedam.

Solução São 3 provas de Matemática e 7 provas quaisquer $(Q_1, Q_2, \cdots, Q_7)$. Inicialmente, iremos dispor as provas que não sofrem restrições.

$$\square\, Q_1 \,\square\, Q_2 \,\square\, Q_3 \,\square\, Q_4 \,\square\, Q_5 \,\square\, Q_6 \,\square\, Q_7 \,\square$$

Temos 8 lugares $\square$ para colocar as 3 provas de Matemática e isso pode ser feito utilizando a $f(10, 3) = C^3_{10-3+1} = C^3_8 = 56$. Devemos, agora, permutar a ordem das 7 provas quaisquer e as 3 de Matemática. Assim, temos 56 . 7! . 3! = 1693440 possibilidades de programar a sequência dessas 10 provas

Exemplo 2.13. CEBRASPE (CESPE) - Técnico Judiciário (TRE ES):
De acordo com o primeiro lema de Kaplansky, a quantidade de subconjuntos de $\{1, 2, 3, ..., n\}$ com p elementos, em que não há números consecutivos, é dada pela fórmula abaixo.

$$C^p_{n-p+1} = \frac{(n-p+1)!}{p! \cdot (n-2p+1)!}$$

Uma das aplicações desse lema é a contagem do número de maneiras de se sentar 4 meninas e 6 meninos em uma fila de 10 cadeiras, de modo que 2 meninas não fiquem em posições adjacentes. A estratégia para se realizar essa contagem compreende quatro passos. Em primeiro lugar, deve-se contar o número de maneiras de se escolher 4 cadeiras sem que haja cadeiras consecutivas; esse procedimento deve ser feito utilizando-se o lema de Kaplansky. Em seguida, deve-se contar o número de maneiras de organizar as meninas nessas cadeiras. O próximo passo consiste em contar o número de maneiras de se distribuir os meninos nas cadeiras restantes. Por fim, deve-se usar o princípio multiplicativo.

Com base nessas informações, julgue o item subsecutivo.

A partir dos dados acima, é correto concluir que o número de maneiras de se escolher as 4 cadeiras entre as 10 disponíveis sem que haja cadeiras consecutivas é superior a 40.

Solução: Aplicando os dados fornecidos pelo problema na expressão (Primeiro Lema de Kaplansky) é possível julgar a afirmação.

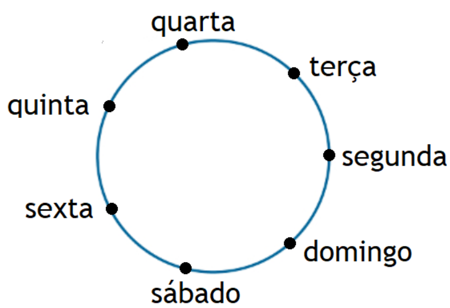
$$
\begin{aligned}
C^{p}_{10-4+1} &= \frac{(10-4+1)!}{4!\cdot(10-2\cdot4+1)!}\\
&= \frac{7!}{4!\cdot 3!}\\
&= 7\cdot 5\\
&= 35
\end{aligned}
$$

Logo, a afirmação é FALSA.

Exemplo 2.14. Débora deseja correr 3 vezes por semana durante esse bimestre. De quantas formas ela poderá escolher os dias da corrida, se Débora não deseja correr em dias consecutivos?

Solução Nesta questão observa-se que a disposição dos dias da semana geram um sistema cíclico, ou seja, o início de uma semana dá continuação ao fim da semana anterior a ela e assim sucessivamente, como pode ser verificado na Figura 12:

Figura 12 – dias da semana representados em círculo



Fonte: Produzido pelo autor

Dessa forma, Débora deve escolher 3 dias entre: segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado e domingo de maneira que não aconteça dois dias consecutivos. Note que domingo e segunda são dias consecutivos, no entanto, o problema será dividido em dois casos:

1. Débora Irá correr na segunda.
   Nesse caso, ela não poderá correr no domingo e na terça. Assim, terá que escolher dois dias entre quarta, quinta, sexta e sábado que também não sejam consecutivos. Pelo primeiro lema de Kaplansky, a escolha poderia acontecer através de uma $f(4,2) = C^2_3 = 3$ formas

2. Débora não Irá correr na segunda.
   Nesse caso, ela terá que escolher três dias entre terça, quarta, quinta, sexta, sábado e domingo que também não sejam consecutivos. Assim, $f(6,3) = C_4^3 = 4$ formas.

   Onde chega-se a conclusão que há $3 + 4 = 7$ formas para Débora escolher os três dias, não consecutivos da semana, para correr.

Teorema 2.3.2. *(Segundo Lema de Kaplansky) O número de subconjuntos com p elementos não consecutivos de $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$, considerando 1 e n consecutivos, é:*

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} \cdot C_{n-p}^{p}$$

Demonstração. Usando um raciocínio análogo ao utilizado no exemplo anterior, o problema será dividido em dois casos:

1. O elemento 1 pertencendo ao subconjunto composto por p elementos.
   Neste caso, será feita a análise de quantas formas poderão ser escolhidos os outros $p - 1$ elementos (pois os elementos 1 e n não podem pertencer ao conjunto) do conjunto $\{3, 4, 5, \cdots, n-1\}$. Dessa forma, utilizando o primeiro lema de Kaplansky, o número de maneiras que isso pode ocorrer é:

$$f(n-3, p-1) = C_{n-p-1}^{p-1} = \frac{(n-p-1)!}{(n-2p)! \cdot (p-1)!}$$

2. O elemento 1 não pertencendo ao subconjunto composto por p elementos.
   Nesse caso, a escolha de p elementos será realizada entre os elementos do conjunto $\{2, 3, 4, ...n\}$. No entanto, pelo primeiro lema de Kaplansky a escolha será determinada por

$$f(n-1, p) = C_{n-p}^{p} = \frac{(n-p)!}{(n-2p)! \cdot p!}$$

   Portanto, através dos casos 1 e 2, a solução do problema será dado por:

$$\begin{aligned} g(n,p) &= \frac{(n-p-1)!}{(n-2p)! \cdot (p-1)!} + \frac{(n-p)!}{(n-2p)! \cdot p!} \\ &= \frac{p \cdot (n-p-1)! + (n-p) \cdot (n-p-1)!}{(n-2p)! \cdot p!} \\ &= \frac{(n-p-1)!n}{(n-2p)! \cdot p!} \\ &= \frac{n-p}{n-p} \cdot \frac{(n-p-1)!n}{(n-2p)! \cdot p!} \\ &= \frac{n}{n-p} \cdot \frac{(n-p)!}{(n-2p)! \cdot p!} \end{aligned}$$

   E finalmente,

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} \cdot C_{(n-p)}^{p}$$

□

Exemplo 2.15. Dado um decágono, quantos são os triângulos, cujos vértices são vértices não consecutivos do decágono?

Solução: O resultado esperado corresponde a escolha de 3 elementos não consecutivos de um conjunto de 10 elementos (vértices).
Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} g(10,3) &= \frac{10}{7} \cdot C^3_{(10-3)} \\ &= \frac{10}{7} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \\ &= \frac{10}{7} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} \\ &= 10 \cdot 5 \\ &= 50 \end{aligned}$$

2.4 O Princípio de Dirichlet

2.4.1 O Princípio

O Princípio de Dirichlet, também conhecido como Princípio Pombal ou Princípio das Gavetas, surgiu em 1834, o conceito foi utilizado pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (figura 13), estudante da Universidade de Paris, que trabalhou nas Universidades de Breslau e Berlim, posteriormente sendo escolhido como sucessor de Johann Carl Friedrich Gauss na Universidade de Göttingen. Dirichlet foi responsável por grandes avanços na Matemática, especialmente na área de Teoria dos Números. (MACHADO, 2018)

Figura 13 – Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Fonte: gigantesdamatematica.wordpress.com/

Quanto ao Princípio da Casa dos Pombos, sua formulação equivale a dizer que se o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos de outro conjunto B; então, uma função de A em B não pode ser injetiva. Podemos também enunciar o teorema da forma seguinte:

Teorema 2.4.1 (Princípio da Casa dos Pombos)**.** *Se $k + 1$ pombos forem colocados em k casas, haverá pelo menos uma casa contendo dois ou mais pombos.*

Demonstração. Suponha que nenhuma das k casas contenha mais de um pombo. Então o número total de pombos seria no máximo k. Isso é uma contradição, já que existem exatamente $k + 1$ pombos. □

A princípio percebe-se que a ideia é bastante intuitiva e de simples abstração; no entanto, se trata de uma ferramenta poderosa na análise combinatória que permite trabalhar diversos tipos de problemas, envolvendo a modelagem matemática da identificação de qual conjunto representa as casas e qual os pombos, bem como a relação que ocorre entre eles.

No que se refere ao princípio da casa dos pombos, é possível reescrevê-lo utilizando o critério das gavetas, que tem uma aplicabilidade idêntica a um enunciado levemente diferente, podendo ser escrito como:

Desejando distribuir $k + 1$ objetos em k gavetas, então pelo menos uma das gavetas possuirá mais de um objeto. Podemos observar que a conclusão vale também, e ainda mais, se o número de objetos é maior do que $k + 1$, levando assim à seguinte formulação mais genérica: "Desejando distribuir n objetos em k gavetas, de modo que o número de objetos excede o número de gavetas $(n \geq k + 1)$, então pelo menos uma das gavetas possuirá mais de um objeto".

Exemplo 2.16. Numa floresta crescem 1000 jaqueiras. É conhecido que uma jaqueira não contém mais do que 600 frutos. Prove que existem 2 jaqueiras na floresta que têm a mesma quantidade de frutos.(PACIFICO,)

Solução: tem-se 1000 jaqueiras, representando os pombos, e 601 casas identificadas pelos números $0, 1, 2, 3, 4, ..., 600$. O número k associado a cada casa significa que nelas serão colocadas jaqueiras que têm exatamente k frutos. Como $1000 > 602 = 601 + 1$, o PCP nos garante que existem duas jaqueiras com a mesma quantidade de frutos.

Exemplo 2.17. Entre qualquer grupo de 367 pessoas, deve haver pelo menos duas com o mesmo aniversário, porque existem apenas 366 aniversários possíveis.(MERRIS, 2003)

Solução: Neste caso temos: As casas representando os dias do ano (366);
Os Pombos representando as pessoas (367);
Relação: Cada pessoa está associada ao dia do seu aniversário.
Pelo Princípio da Casa dos pombos, para $n = 367$, temos que pelo menos uma "casa" deverá conter pelo menos dois "pombos", isto é, pelo menos duas pessoas farão aniversário no mesmo dia.

2.4.2 Generalização do Princípio

O princípio da casa dos pombos esclarece que deve haver no mínimo dois pombos na mesma casa quando houver mais pombos do que casas. Dessa forma, ainda mais pode ser dito quando o número de pombos excede um múltiplo do número de casas. Por exemplo, entre qualquer conjuntos de 31 dígitos decimais, deve haver três que são iguais. Isso ocorre porque, quando 31 dígitos (pombos) são distribuídos em 10 (casas), uma casa deve ter mais de 3 dígitos (pombos).

É possível obter uma versão mais abrangente do princípio da casa dos pombos fazendo uso da função teto (também conhecida como a função menos inteira) de um número real x, denotado $\lceil x \rceil$, definida como o menor número inteiro maior que x.

Por exemplo:

$$\lceil 9 \rceil = 9, \ \lceil \sqrt{19} \rceil = 5, \ \lceil \pi \rceil = 4, \ \lceil -10,27 \rceil = -10$$

Em geral, $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz $\lceil x \rceil < x + 1$

Teorema 2.4.2 (O Princípio da casa dos pombos generalizado)**.** *Se distribuirmos n pombos em k casas, então pelo menos uma casa deverá conter pelo menos $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ pombos.*

Demonstração. Suponha que nenhuma das casas contém mais que $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1$ pombos. Então, o número total de pombos é no máximo

$$k \cdot \left(\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1 \right) < k \cdot \left(\left(\frac{n}{k} - 1 \right) + 1 \right) = n$$

na qual a desigualdade $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil < \frac{n}{k} + 1$ foi usada, chegando a uma contradição, pois existem um total de n pombos. (ROSEN, 1998) □

Exemplo 2.18. Qual o número mínimo de alunos exigidos em uma aula de matemática para garantir que pelo menos seis recebam a mesma nota, se houver cinco notas possíveis, A, B, C, D e,F? (MERRIS, 2003)

Solução: O número mínimo de alunos necessário para garantirmos que pelo menos seis alunos recebam a mesma nota é, o número inteiro menor que ou igual a k, que satisfaça a seguinte sentença:

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil = 6 &< \left(\frac{n}{5}\right) + 1 \\ 30 &< n + 5 \\ 25 &< n \end{aligned}$$

logo, o quantitativo mínimo de alunos, para que fosse alcançado o resultado esperado, seria dado por:

$$n = 26$$

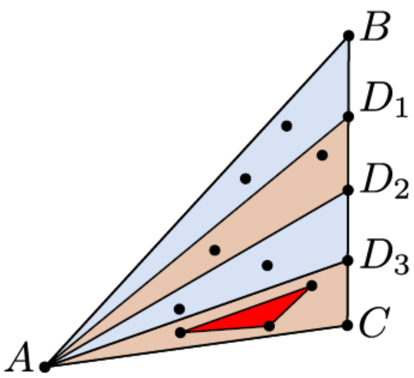
2.4.3 Aplicações

Em muitas aplicações do princípio da casa dos pombos, os objetos a serem colocados em caixas devem ser escolhidos de maneira inteligente, assim como essas descritas a seguir:

Exemplo 2.19. Nove pontos são colocados no interior de um triângulo de área $4cm^2$, de forma que não tenha 3 pontos colineares. Mostre que podemos escolher três deles para serem os vértices de um triângulo de área no máximo igual a $1cm^2$.

Solução: Sejam A, B e C os vértices do triângulo de área $4cm^2$. Considere três pontos D_1, D_2 e D_3 na arestas BC, de forma que ABD_1, AD_1D_2, AD_2D_3 e AD_3C formem quatro triângulos, cada um com área de $1cm^2$. Desta forma ao colocar os pontos no triângulo ABC, pelo princípio da casa dos pombos, existem pelo menos $\left\lceil \frac{9}{4} \right\rceil = 3$ pontos em um dos quatro triângulos: ABD_1, AD_1D_2, AD_2D_3 e AD_3C. Logo os três pontos que estão dentro de um destes 4 triângulos, por não serem colineares, formam um triângulo de área no máximo igual a $1cm^2$. Na figura a baixo temos uma possibilidade para a distribuição dos pontos.

Figura 14 – Triângulo



Fonte: O Jornal de Matemática Olímpica - UFRPE

(MACHADO, 2018)

Exemplo 2.20. Assuma que em um grupo de 6 pessoas, cada par de pessoas consiste em dois amigos ou dois inimigos. Mostre que ou existem 3 amigos mútuos ou 3 inimigos mútuos.

Solução: Seja A uma das 6 pessoas. Sejam $C = \{\{amigo\ de\ A\}, \{inimigo\ de\ A\}\}$ e $P = \{B, C, D, E, F\}$ o conjunto com as outras 5 pessoas. Pela versão geral do princípio da casa dos pombos, dividindo as 5 pessoas de P nos 2 conjuntos de C, um desses conjuntos possui pelo menos $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$ elementos. Então, ou existem 3 ou mais que são amigos de A, ou 3 ou mais que são inimigos de A.

Suponha sem perda de generalidade que B, C e D sejam amigos de A. Se quaisquer duas destas 3 pessoas são amigas, então estas duas pessoas e A formam um conjunto de 3 amigos mútuos. Caso contrário B, C e D formam um conjunto de 3 inimigos mútuos. O outro caso é análogo.

(MACHADO, 2018)

3 A PESQUISA E SUA METODOLOGIA

Nesse capítulo, apresentamos a justificativa para a escolha da pesquisa realizada e a metodologia utilizada na aplicação da sequência didática.

3.1 Justificativa

Um dos maiores desafios de se trabalhar com a Análise Combinatória é a grande variedade de problemas. Isso faz com que muitos alunos apresentem sérias dificuldades em compreender e aplicar o seu conhecimento nas questões de contagem. Esses tipos de problemas são apresentados na forma de arranjo, permutação, combinação, sem contar aqueles que são gerados a partir de suas variações, ou seja, que permitem a repetição de elementos. Mesmo sabendo que a grade curricular do ensino médio não comporta todas essas variações, no que diz respeito aos métodos de contagem, algumas circunstâncias cobram do aluno um conhecimento de maior abrangência, no intuito de minimizar a possibilidade de erros. Nas provas de concursos e vestibulares, é possível encontrar problemas não tão comuns, como por exemplo na tiragem de 2009 do ENEM (prova cancelada), edição que gerou bastante comentário na época, havia um problema que poderia ter sido resolvido facilmente através da aplicação da fórmula da permutação caótica. Já se tratando de concursos públicos, os problemas associados a Análise Combinatória geralmente, são considerados como os que compõem a parte mais complicada da prova. Dessa forma, pensando em analisar a problemática, foi desenvolvida uma sequência didática, que utilizou exemplos de Permutações caóticas, Lemas de Kaplansky e Princípio da casa dos pombos, cujo objetivo foi tornar mais significativo o aprendizado, possibilitando ao discente solucionar um maior número de problemas, de Análise Combinatória, aumentando, assim, suas chances de alcançar bons resultados nessas avaliações.

3.2 Metodologia

3.2.1 Organização da Sequência Didática

Nesta seção, apresentamos a sequência didática desenvolvida através de aulas expositivas com o objetivo de tornar a aprendizagem mais significativa.

- ♢ TEMA: Permutações Caóticas, Lemas de Kaplansky e Pincípio das Gavetas de Dirichlet aplicados na resolução de problemas da análise combinatória do ensino médio.
- ♢ PÚBLICO ALVO: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

◇ DURAÇÃO: 10 (dez) horas/aulas

◇ DISCIPLINA: Matemática - unidade temática: ANÁLISE COMBINATÓRIA

◇ OBJETIVO GERAL: Construir, a partir do conhecimento fundamental da análise combinatória, novos métodos de contagem que auxiliem na resolução de problemas de vestibulares e concursos.

◇ OBJETIVO ESPECÍFICO:

1. Identificar por meio de um Pré-teste 5, composto por seis questões de análise combinatória, extraídas de provas de concursos e vestibulares, como é processado o raciocínio combinatório destes alunos, mediante a problemas, cujas interpretações explorem um pouco mais de seus conhecimentos.
2. Ministrar aulas acerca de outros métodos de contagem (Permutação Caótica, Princípio de Dirichlet e Lemas de Kaplansky), desenvolvidas a partir da análise das soluções alcançadas pelos alunos no pré-teste, visando ampliar suas estratégias na resolução de problemas combinatórios.
3. Comparar os resultados do pré-teste com os resultados do Pós-teste, verificando se houve contribuições significativas após as ministrações das aulas, relativas aos novos métodos de contagem.

◇ DESENVOLVIMENTO:

1. Aplicação do Pré-teste
2. Exposição dos métodos de contagem: Permutação caótica, Lemas de Kaplansky e Princípio da casa dos Pombos, apresentados através de aulas expositivas e dialogadas.
3. Aplicação do Pós-teste.

◇ PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

1. Aula expositiva dialogada (ministradas por vídeoconferência)

◇ RECURSOS DIDÁTICOS

1. Quadro branco
2. Slides

◇ AVALIAÇÃO
A avaliação aconteceu desde o momento das aulas voltadas ao nivelamento da turma até a aplicação do pós-teste, observando a produção de toda fase do processo. Porém, foi definida de forma conclusiva, quando realizamos a comparação entre os resultados do pré-teste com os do pós-teste.

4 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo descrevemos a aplicação da Sequência didática, de forma sistemática, e a análise dos dados coletados .

4.1 Aplicação da Sequência Didática

A sequência didática da presente pesquisa foi desenvolvida em uma instituição particular, Diferencial Cursos e Concursos, situada em Vitória de Santo Antão no estado de Pernambuco, onde há cursos preparatórios para exames vestibulares (ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio e SSA - Sistema Seriado de Avaliação da Universidade de Pernambuco) e concursos. A direção do Diferencial Cursos, desde o princípio, esteve ciente acerca das atividades a serem desenvolvidas no local, no que diz respeito aos procedimentos, a importância e aos objetivos do trabalho, comprovado no anexo (5)

Quantos aos alunos, que foram convidados a participar do projeto, todos aceitaram de forma voluntária e tiveram ciência do que se tratava o estudo, confirmando a participação nas atividades. A todos foi esclarecido quanto ao valor do trabalho a ser realizado, em que seria um momento oportuno para expor, discutir e desenvolver ideias, além de tornar a atividade, resolver problemas combinatórios, algo prazeroso. Contou-se com a participação de 18 alunos, do curso preparatório para SSA do 2º ano do Ensino Médio (oito do sexo masculino e dez do sexo feminino, cujas faixas etárias variavam de 16 a 18 anos), identificados por um número de 1 a 18 antecedido da sigla AL. Todos, coincidentemente, já haviam tido acesso ao conteúdo de análise combinatória (Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial, Arranjo, permutação e combinação) durante o período de preparação, realizados as quintas-feiras das 14h às 17h. Pois, de acordo com Pessoa e Borba (2012), apesar das recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN – (BRASIL, 1997) de se trabalhar com problemas combinatórios desde os anos iniciais de escolarização, na prática de sala de aula, é nesta série que a maioria dos problemas de raciocínio combinatório é formalmente introduzida.

1º Momento

Foi aplicado o pré-teste (5) com duração de 4 horas-aula. Este continha seis questões, de análise combinatória, acessíveis aos alunos do 2º ano do ensino médio, selecionadas de exames vestibulares e concursos com o intuito de motivar os estudantes a colocar em prática, com um maior interesse, todo o conteúdo que contemplaram em sua série, já que essa situação será uma realidade que muitos deles enfrentarão.

Permitir que o aluno produza suas próprias resoluções, mediante a análise de problemas, é uma opção para o ensino de Análise Combinatória. Os (TECNOLÓGICA, 1999) orientam:

> Não somente em Matemática, mas particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.

Abaixo, na figura 15 é possível observar a aplicação da atividade com esses alunos.

Figura 15 – Alunos 2º ano

Fonte: Produzida pelo autor

Visivelmente, os alunos dedicaram-se em fazer o pré-teste. Pois, ao fim das 4h, tempo reservado para realizá-lo, debatiam as questões com os demais colegas e questionavam o professor em relação aos seus resultados.

2º Momento

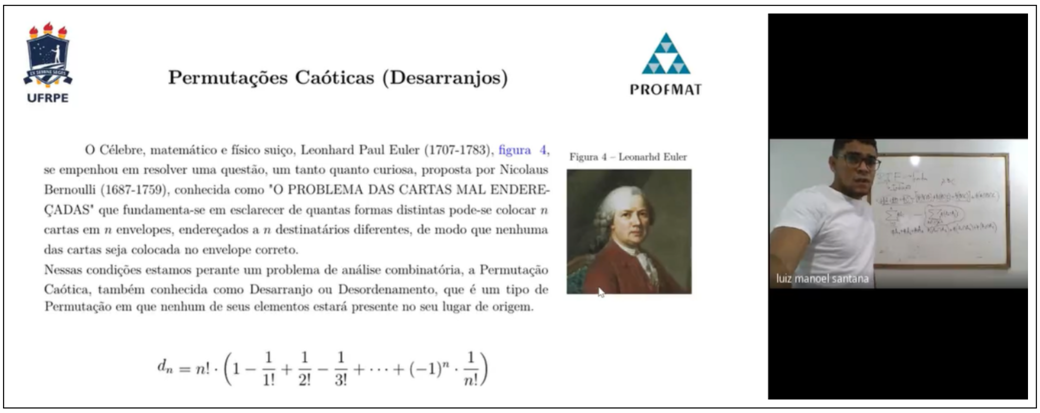
Apresentação dos Métodos de Contagem

Embora os três encontros a seguir tenham sido planejados para acontecerem no formato de aulas presenciais, assim que o ano letivo de 2020 iniciasse, foi necessário adaptar os métodos de trabalho, passando a ministrar as aulas por vídeoconferências, através do google-meet, devido à pandemia, ocasionada por um vírus denominado COVID-19 (Coronavírus), onde foi instaurado um período de quarentena e aulas presenciais foram canceladas em todo país.

1º Encontro

No primeiro encontro, como registrado em (35), realizado em 10 (dez) de maio de 2020 com duração de $3:30$ h (Três horas e trinta minutos), foi trabalhado o conteúdo de PERMUTAÇÃO CAÓTICA. Para a construção do método, foi apresentado previamente, e de forma bastante sistemática, o PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO, o qual, por meio das propriedades operatórias de conjuntos e técnicas de contagem (combinações), foi possível alcançar a sua fórmula geral. Embora o professor tenha sido informado pelos alunos que a expressão já era bastante familiar a eles, notou-se, pelos comentários dos próprios estudantes, após ser demonstrada, que seus conhecimentos prévios eram frutos da simples ação de memorizar, sem a preocupação em entender o que lhes fora ensinado.
Assim, foi possível realizar a introdução acerca do aspecto histórico da Permutação Caótica, citando inclusive "O PROBLEMA DAS CARTAS MAL ENDEREÇADAS", que deu origem à construção do método. E, por meio desse problema, reformulado, iniciou-se um debate em busca de como realizar a distribuição de duas, três ou quatro cartas, de modo que elas fossem entregues a destinatários distintos. Mas, quando foram utilizadas cinco ou mais cartas, observou-se que houve um aumento no nível de dificuldade para enumerar as formas de distribuí-las, quando comparado aos quantitativos iniciais. Visto isso, os conceitos do Princípio da Inclusão e Exclusão foram introduzidos, tornando a inserção de um número maior de cartas, mais simples de ser compreendido, possibilitando ser alcançado a demonstração para um número n de cartas. O final do encontro foi marcado por um momento bastante proveitoso e repleto de conversas, pois, após ter sido resolvido mais alguns problemas, os alunos perguntavam-se o porquê de não terem visto tal assunto durante o ano letivo, ao vivenciarem o 2º ano do ensino médio.

Figura 16 – Aula 01 por vídeoconferência



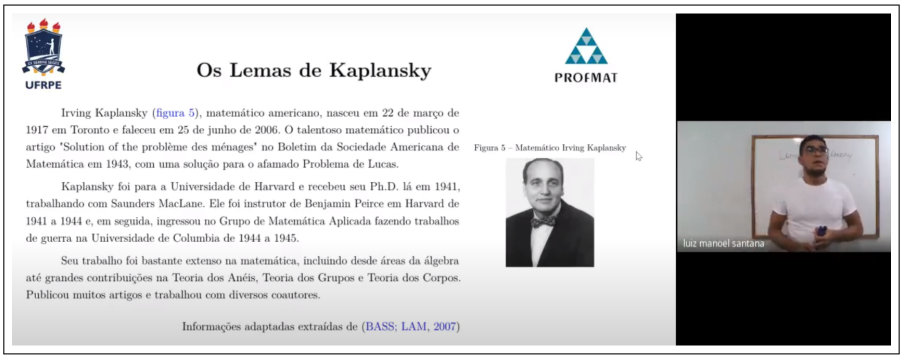
2º Encontro

No segundo encontro, como registrado em (43), realizado em 17 (dezessete) de maio de 2020 com duração de 3 h (Três horas), o professor propôs no início da aula uma questão que tratava de um conjunto A, formado por sete números naturais consecutivos, quando foi perguntado quantos subconjuntos se podia formar, com três elementos, não consecutivos, de

A. Os alunos pediram um tempo para que resolvessem. Porém, aguardados alguns minutos, foram questionados quanto à solução do problema. Alguns disseram, sem muita segurança, os seus resultados. Nesse instante, o ambiente ficou bastante movimentado, necessitando da intervenção do professor, pois havia diversas opiniões, motivadas pela forma que cada aluno adotou para chegar à solução do problema. Ao ouvir caso a caso, o professor resolveu colocar no quadro detalhes do que lhe fora repassado, objetivando chegar a um consenso, visto que o PFC havia sido o caminho escolhido pela maioria. Logo, conseguiu-se atingir a solução do problema. Ainda inquieto, um aluno fez o seguinte questionamento: "Se o número de elementos disponíveis e aqueles a serem escolhidos fossem maiores?"Dentre tantas perguntas, essa chamou bastante atenção, pelo fato de viabilizar a observação de pontos comuns das soluções definidas, com a resolução de mais alguns problemas, permitindo alcançar a expressão determinada por Kaplansky, que deu origem ao seu primeiro lema.

Posteriormente, foi proposta uma nova questão, similar à primeira, em que a única diferença consistia na distribuição dos elementos de A, quando dessa vez foram dispostos em torno de um círculo. Dois ou três alunos, imediatamente, deram suas respostas, utilizando o mesmo procedimento, 1º Lema de Kaplansky, adotado na primeira questão, mas logo foram corrigidos por alguns colegas, em relação às situações que inviabilizavam a aplicação da técnica, pois, na nova ordenação dos elementos, o último e o primeiro eram considerados consecutivos. Após mais algumas tentativas, chegaram a conclusão que o problema teria solução, caso fosse dividido em etapas, possibilitando, dessa maneira, a aplicação do lema já conhecido. Com auxilio do professor, foram determinadas duas etapas. Na primeira, um elemento qualquer seria escolhido para compor o subconjunto, eliminando, assim, a oportunidade de seus adjacentes fazerem parte do grupo. Na segunda etapa, em que o elemento escolhido na etapa anterior não faria parte do subconjunto, permitindo que seus adjacentes pudessem ser selecionados. Como as duas etapas tiveram suas soluções determinadas através do primeiro lema, restou aplicar o princípio aditivo aos resultados para alcançar a solução do problema. No entanto, a expressão obtida no final de todo processo passou a ser utilizada nas questões seguintes, cujos enunciados abordavam situações semelhantes, sendo apenas divulgado pelo professor, no final da aula, que a expressão, fruto de todo trabalho desenvolvido durante o encontro, já havia sido determinada, ao denominar-se como 2º lema de Kaplansky.

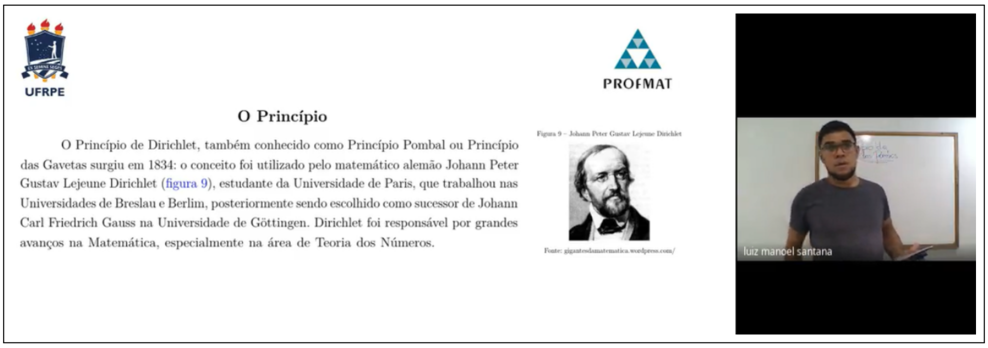
Figura 17 – Aula 02 por vídeoconferência



3º Encontro

O Terceiro encontro, como registrado em (18), realizado em 25 (Vinte e cinco) de maio de 2020 com duração de 3 : 30 h (Três horas e trinta minutos), teve início com a exposição de um problema, cujo enunciado pedia o número mínimo de pessoas, para que pelo menos três delas aniversariassem no mesmo mês do ano. Assim como nos encontros anteriores, reservou-se um tempo para que os alunos tentassem responder a questão. Após algum tempo de espera, o professor perguntou como estavam se saindo, quatro alunos disseram ter concluído, mas os demais pediram para que aguardasse um pouco mais. Através disso, pôde-se interpretar que o método de enumeração estava sendo adotado para alcançar a solução, algo que veio a ser confirmado após divulgarem suas respostas, as quais, por sinal, estavam corretas. Aqueles que concluíram no primeiro momento não deram a solução correta, ou por não interpretarem o problema corretamente, ou até mesmo por não saberem como iniciá-lo. Porém, antes mesmo de introduzir o conteúdo definido para a aula, O PRINCÍPIO DE DIRICHLET, também conhecido como PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS, desenvolvido pelo matemático alemão, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, foram apresentados outros problemas para que os estudantes utilizassem suas formas de resolução e, com isso, possíveis erros pudessem ser verificados, possibilitando o professor utilizar, além do conceito da função teto, como também criar um paralelo com o método que viria a ser o tema da aula.

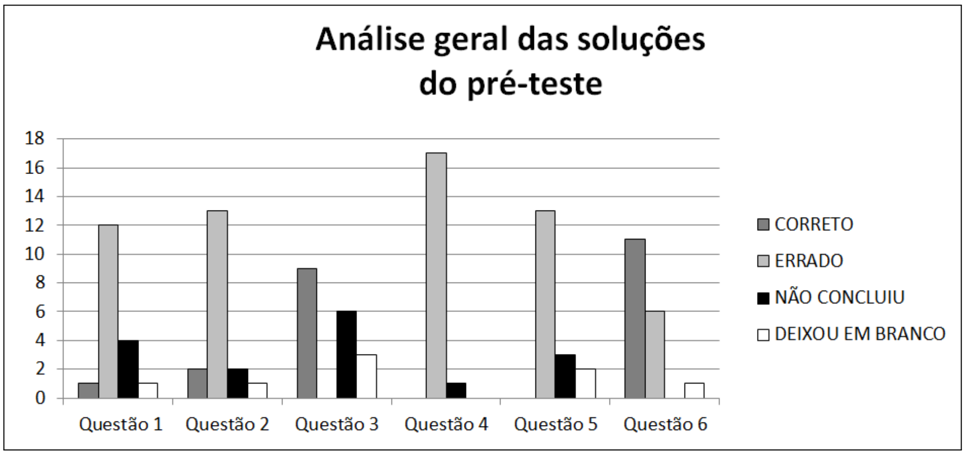
Figura 18 – Aula 03 por vídeoconferência



4.2 Análise do Pré-Teste

Ao analisar os registros no teste foi possível verificar, dos 18 alunos que participaram, os seguintes dados apresentados através do gráfico da figura 19:

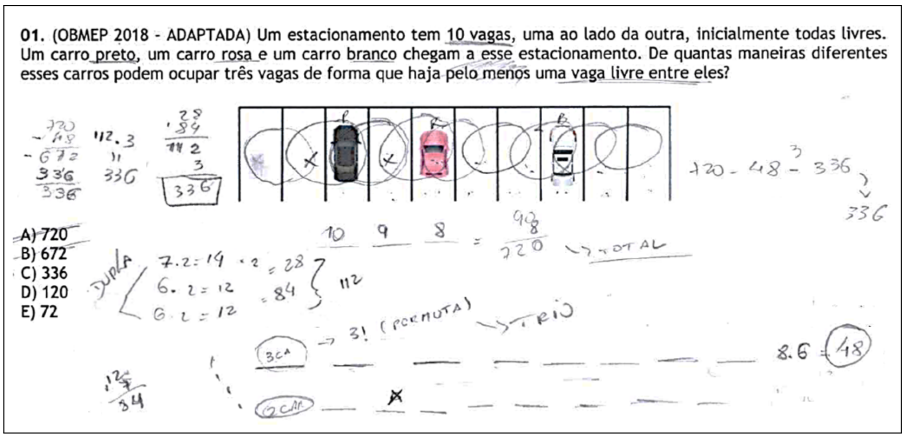
Figura 19 – Análise quantitativa das questões propostas



Fonte: Resultado da pesquisa

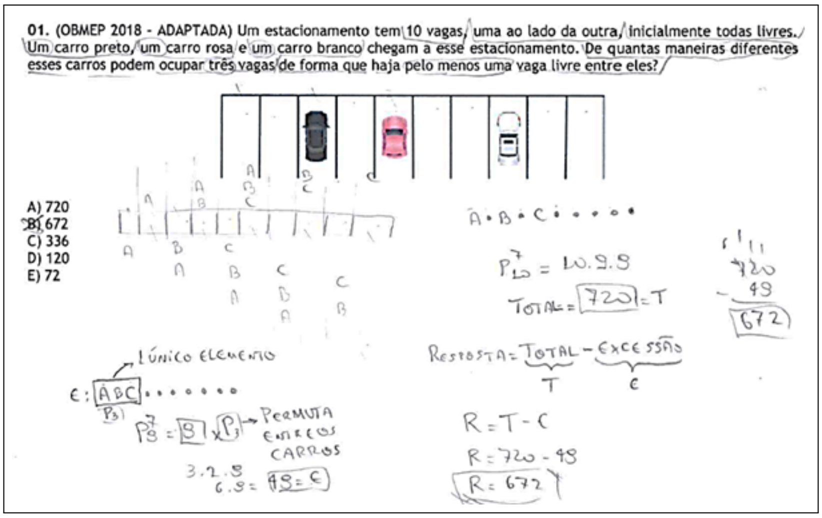
Na **primeira questão**, de acordo com a distribuição percentual (figura 22), é possível observar uma grande disparidade entre os percentuais de acerto e erro. O único aluno, AL17, que resolveu corretamente o problema apresentou os cálculos de maneira desorganizada, mas, ainda assim, foi possível compreender o raciocínio utilizado. Entre os 67% dos estudantes que não acertaram a questão, alguns cometeram erros na escolha das operações, outros erraram por usarem dados diferentes dos que foram apresentados no problema, ou terem acreditado que haviam concluído a questão, simplesmente por alcançarem algum dos resultados, os quais constavam nas alternativas, como fez o aluno AL18, mostrado na (figura 21) .

Figura 20 – Questão 01 do pré-teste resolvido por AL17



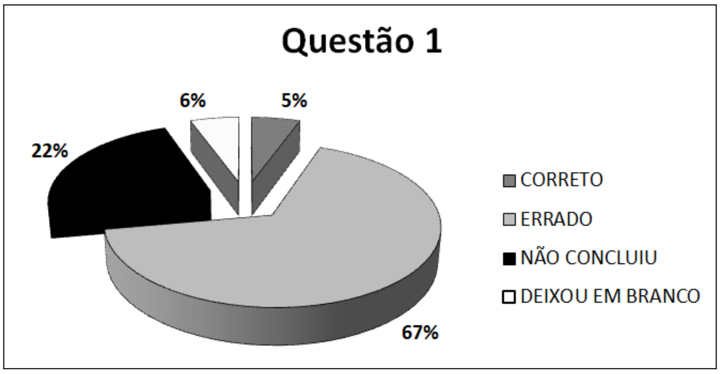
Fonte: Resultado da pesquisa

Figura 21 – Questão 01 do pré-teste resolvido por AL18



Fonte: Resultado da pesquisa

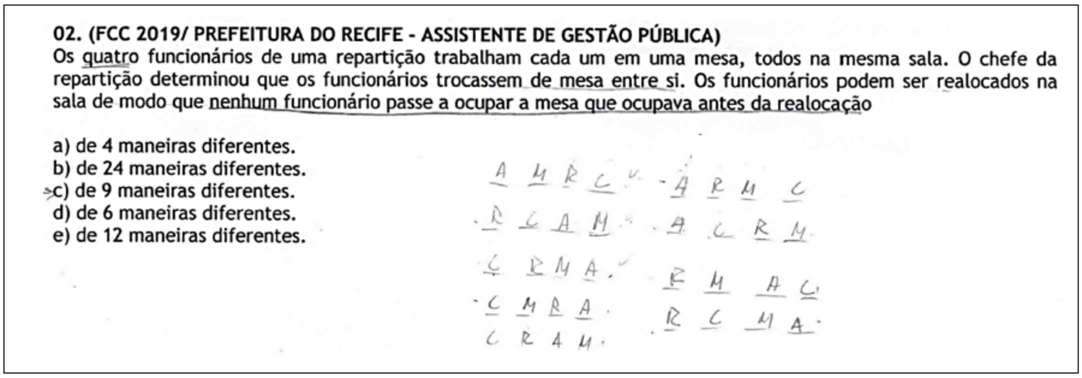
Figura 22 – Análise percentual - Questão



Fonte: Resultado da pesquisa

Na **segunda questão**, a distribuição percentual (figura 25) revela que apenas 11% dos alunos obtiveram sucesso em suas soluções, enquanto 72% não tiveram êxito com a estratégia adotada. A listagem dos agrupamentos teve um destaque significativo nos problemas, quando o método de resolução não era tão conhecido por eles, como percebido na solução dada por AL3 (figura 23). Entretanto, ainda fazendo uma análise sobre a mesma questão, é possível constatar, de acordo com a (figura 24), um exemplo de resolução, desenvolvida por AL6, cujo método empregado, aparentemente uma permutação circular, não condizia com os dados presentes no enunciado do problema, além de outras em que foram empregadas estratégias, sem muita convicção, do que se buscava como resposta, ademais de outras, em que erros foram cometidos pela aplicação de operações básicas, sem muitos fundamentos.

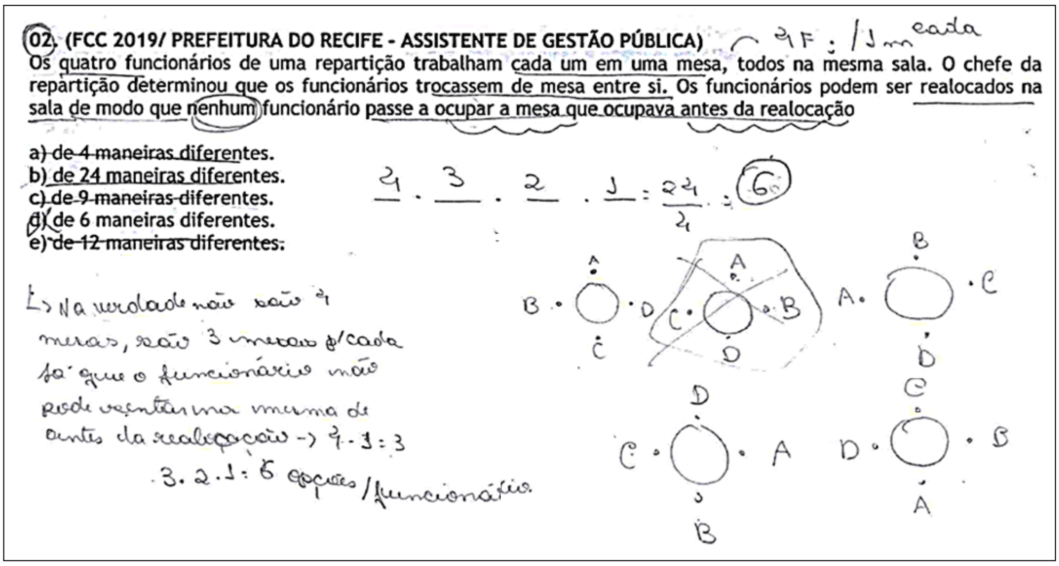
Figura 23 – Questão 02 do pré-teste resolvido por AL11


02. (FCC 2019/ PREFEITURA DO RECIFE - ASSISTENTE DE GESTÃO PÚBLICA)
Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si. Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação

a) de 4 maneiras diferentes.
b) de 24 maneiras diferentes.
c) de 9 maneiras diferentes.
d) de 6 maneiras diferentes.
e) de 12 maneiras diferentes.

Fonte: Resultado da pesquisa

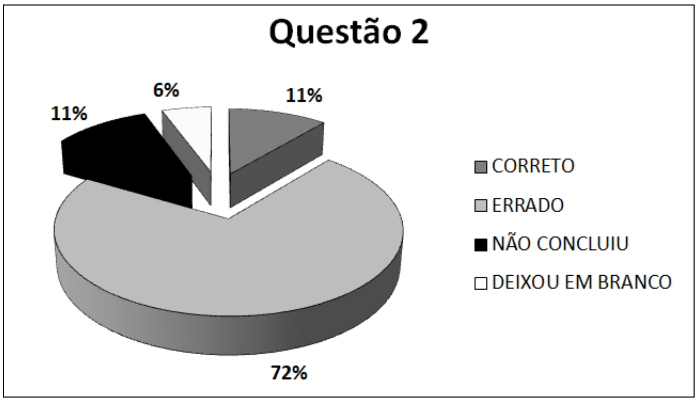
Figura 24 – Questão 02 do pré-teste resolvido por AL6


02. (FCC 2019/ PREFEITURA DO RECIFE - ASSISTENTE DE GESTÃO PÚBLICA)
Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si. Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação

~~a) de 4 maneiras diferentes.~~
b) de 24 maneiras diferentes.
~~c) de 9 maneiras diferentes.~~
d) de 6 maneiras diferentes.
~~e) de 12 maneiras diferentes.~~

Fonte: Resultado da pesquisa

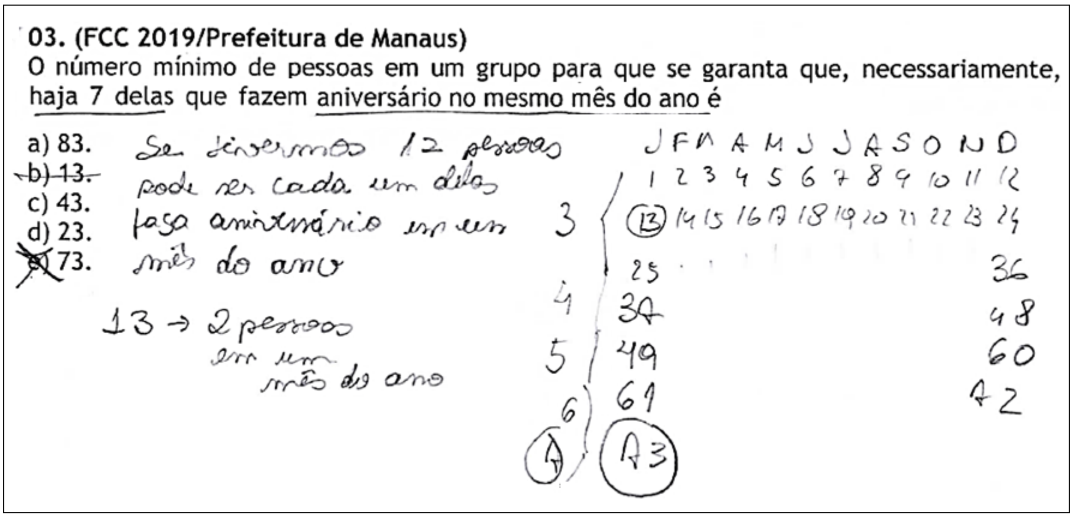
Figura 25 – Análise percentual - Questão 2



Fonte: Resultado da pesquisa

Já na **terceira questão**, problema que tratava do princípio da casa dos pombos, 50% dos alunos, (figura 28), um percentual apreciável, conseguiram chegar ao resultado correto do problema por meio do método da listagem, como no caso do aluno AL13 (figura 27) e, outros fizeram uso de operações básicas, como o aluno AL12 (figura 26), pois a maioria das questões ligadas a esse assunto, quando bem interpretadas, têm uma grande chance de serem resolvidas corretamente, fazendo uso dessas estratégias. Os outros 50%, mesmo que não tenham errado, não conseguiram concluir o problema ou deixaram a questão em branco.

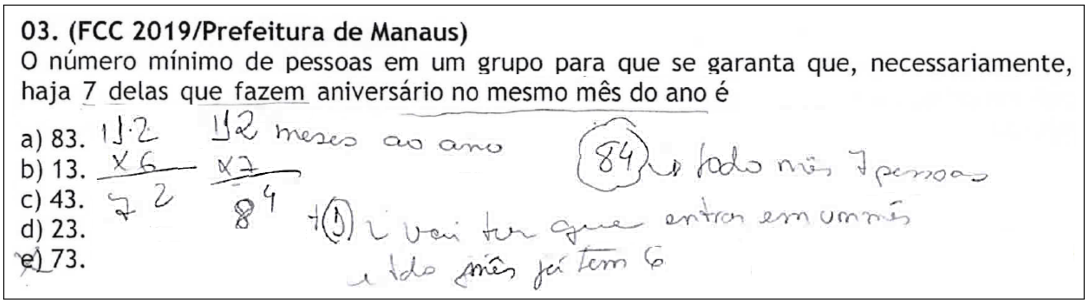
Figura 26 – Questão do pré-teste resolvido por AL13


03. (FCC 2019/Prefeitura de Manaus)
O número mínimo de pessoas em um grupo para que se garanta que, necessariamente, haja 7 delas que fazem aniversário no mesmo mês do ano é

a) 83.
~~b) 13.~~
c) 43.
d) 23.
e) 73.

Fonte: Resultado da pesquisa

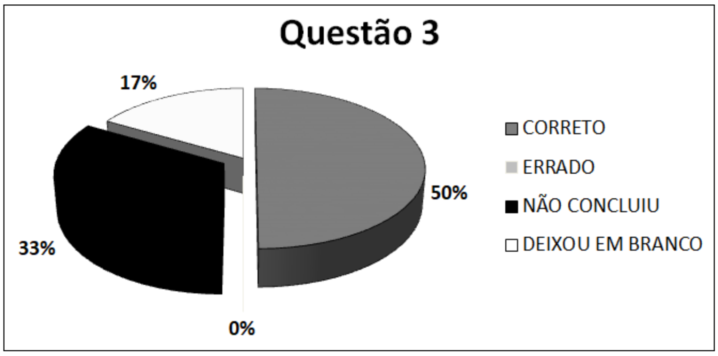
Figura 27 – Questão 03 do pré-teste resolvido por AL12


03. (FCC 2019/Prefeitura de Manaus)
O número mínimo de pessoas em um grupo para que se garanta que, necessariamente, haja 7 delas que fazem aniversário no mesmo mês do ano é

a) 83.
b) 13.
c) 43.
d) 23.
e) 73.

Fonte: Resultado da pesquisa

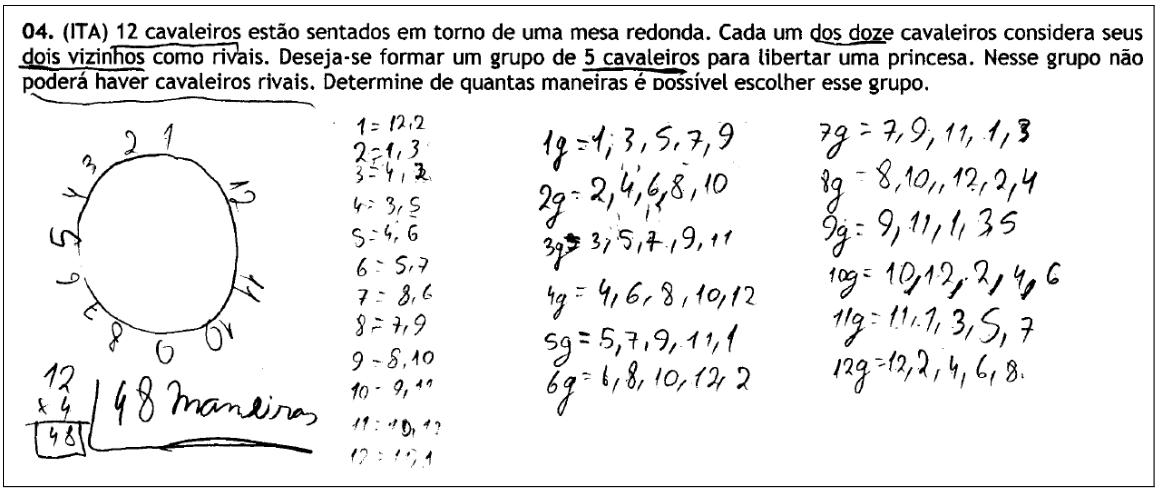
Figura 28 – Análise percentual - Questão 3



Fonte: Resultado da pesquisa

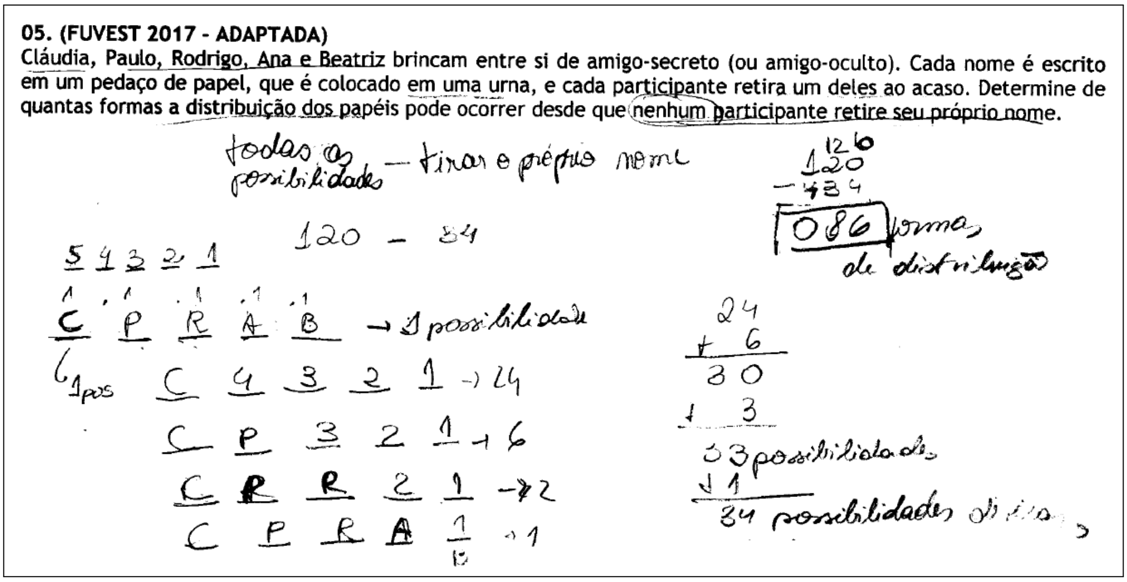
As questões **quatro** e **cinco**, cujos dados percentuais são mostrados nos gráficos apresentados, pelas figuras 31 e 32, respectivamente, tiveram uma margem de erro bem elevada, diante o número de acertos. Entre os erros, alguns foram originados pelo mau uso do método da enumeração, como no caso da questão quatro, resolvida por AL15 (figura 29) que, ao utilizar o método, excedeu o número agrupamentos e, outros, na tentativa de aplicar o princípio multiplicativo, desenvolveram várias estratégias. Entre elas, demos como exemplo a solução da questão cinco, desenvolvida por AL4,(figura 30) que ao fixar elementos, na intenção de encontrar o total de agrupamentos, não atentou para o fato de que alguns deles se repetiam nas etapas em que o problema foi dividido.

Figura 29 – Questão 04 do pré-teste resolvido por AL15



Fonte: Resultado da pesquisa

Figura 30 – Questão 05 do pré-teste resolvido por AL4


05. (FUVEST 2017 - ADAPTADA)
Cláudia, Paulo, Rodrigo, Ana e Beatriz brincam entre si de amigo-secreto (ou amigo-oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso. Determine de quantas formas a distribuição dos papéis pode ocorrer desde que nenhum participante retire seu próprio nome.

todas as possibilidades – tirar o próprio nome

5 4 3 2 1

120 – 84

C P R A B → 1 possibilidade

C 4 3 2 1 → 24

C P 3 2 1 → 6

C P R 2 1 → 2

C P R A 1 → 1

$\boxed{086}$ formas de distribuição

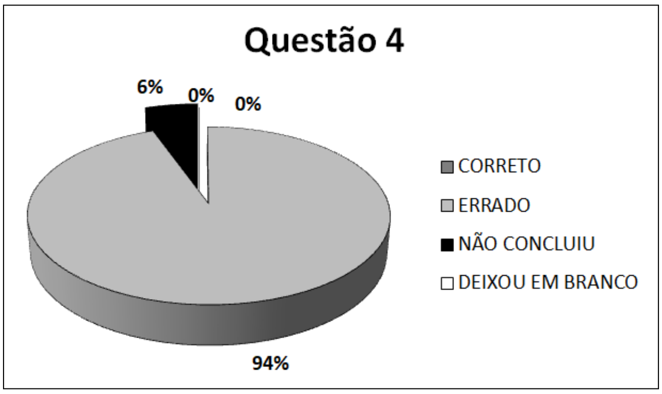
24 + 6 = 30

30 + 3 = 33 possibilidades

33 + 1 = 34 possibilidades

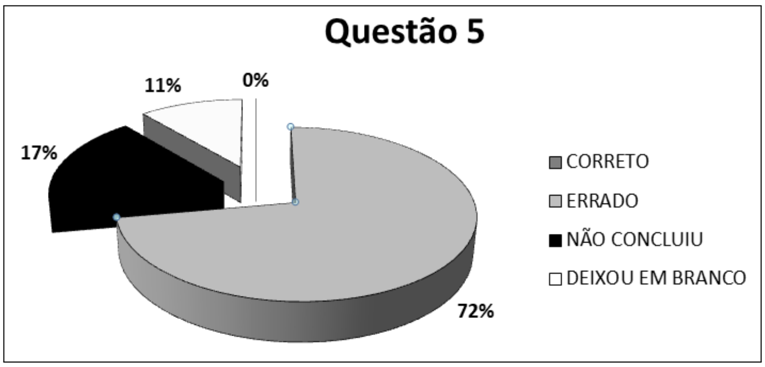
Fonte: Resultado da pesquisa

Figura 31 – Análise percentual - Questão 4



Fonte: Resultado da pesquisa

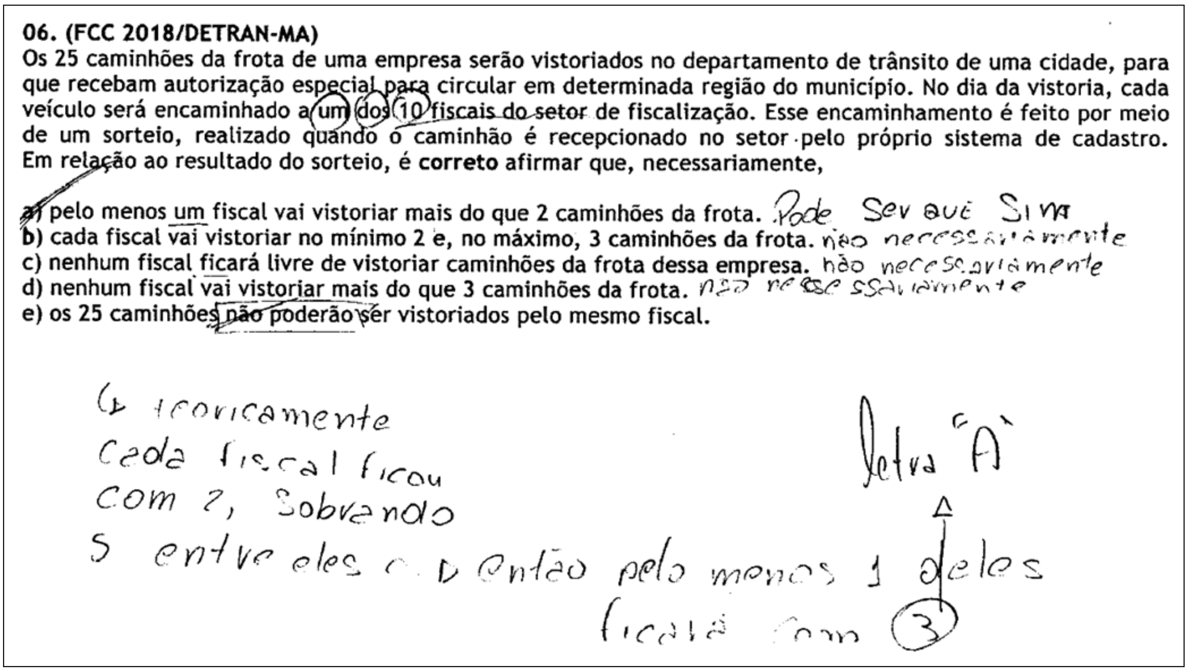
Figura 32 – Análise percentual - Questão 5



Fonte: Resultado da pesquisa

Em relação a **sexta questão**, assim como na terceira, foi possível observar que quando se trata de um problema, o qual envolve o princípio da casa dos pombos, o percentual de acertos ganha um margem significativa. Isso se deve tanto ao fato da questão, quando comparada às demais, ter um nível de dificuldade menos elevada, possibilitando, dessa forma, julgar as alternativas pela facilidade na interpretação de seu enunciado, quanto por meio da aplicação de operações básicas, como divisão e multiplicação, visto na solução produzida por AL2 (figura33). Já o percentual de erros, por mais considerável que pareça, ocorreu por desajustes, inclusive nos métodos que favoreceram os acertos, já mencionados aqui.

Figura 33 – Questão 06 do pré-teste resolvido por AL2



06. (FCC 2018/DETRAN-MA)
Os 25 caminhões da frota de uma empresa serão vistoriados no departamento de trânsito de uma cidade, para que recebam autorização especial para circular em determinada região do município. No dia da vistoria, cada veículo será encaminhado a um dos 10 fiscais do setor de fiscalização. Esse encaminhamento é feito por meio de um sorteio, realizado quando o caminhão é recepcionado no setor pelo próprio sistema de cadastro. Em relação ao resultado do sorteio, é **correto** afirmar que, necessariamente,

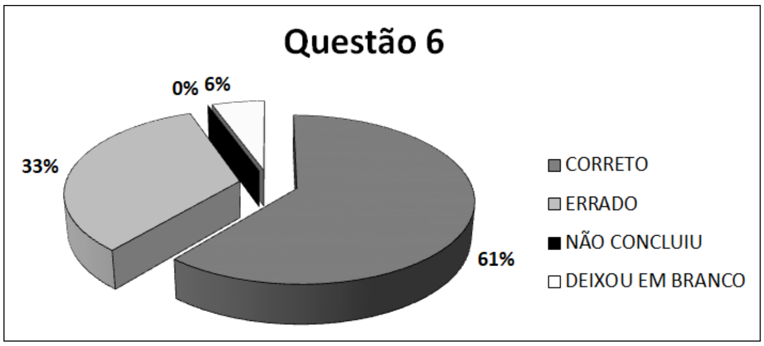
a) pelo menos um fiscal vai vistoriar mais do que 2 caminhões da frota. Pode ser que sim
b) cada fiscal vai vistoriar no mínimo 2 e, no máximo, 3 caminhões da frota. não necessariamente
c) nenhum fiscal ficará livre de vistoriar caminhões da frota dessa empresa. não necessariamente
d) nenhum fiscal vai vistoriar mais do que 3 caminhões da frota. não necessariamente
e) os 25 caminhões não poderão ser vistoriados pelo mesmo fiscal.

teoricamente cada fiscal ficou com 2, sobrando 5 entre eles então pelo menos 1 deles ficará com 3

letra "A"

Fonte: Resultado da pesquisa

Figura 34 – Análise percentual - Questão 6



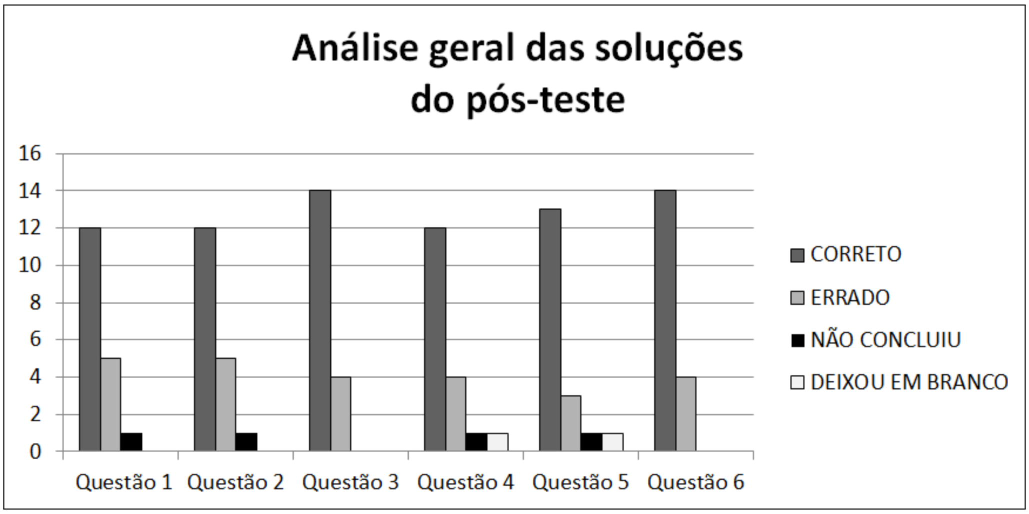
Fonte: Resultado da pesquisa

4.3 Análise do Pós-Teste

O pós-teste, elaborado com as mesmas questões do pré-teste e aplicado em 27 (Vinte e sete) de maio de 2020 com duração de 4h/a, foi compartilhado via grupo do whatsapp, resolvido individualmente pelos alunos, as soluções digitalizadas e enviadas ao professor.

Após os dados serem coletados, foram condensados e organizados, como mostra a figura 35.

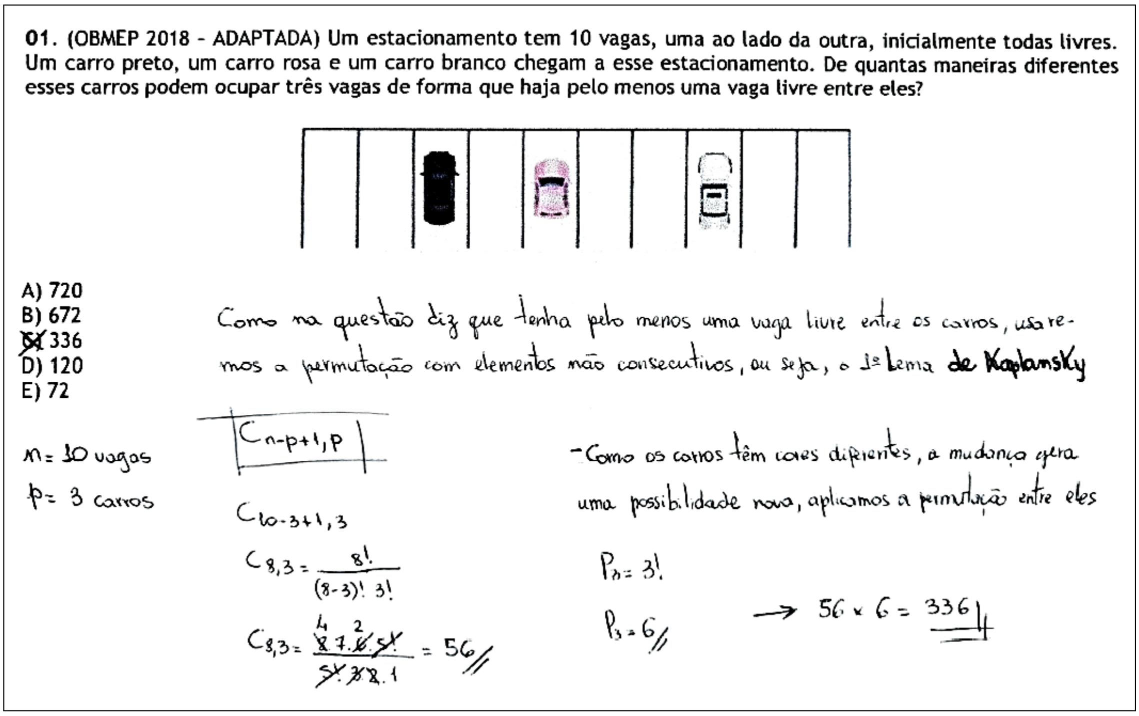
Figura 35 – Análise quantitativa das questões propostas



Fonte: Resultado da pesquisa

Ao explorar as resoluções apresentadas no pós-teste, o professor pôde perceber uma evolução no raciocínio combinatório dos alunos, mesmo com todas as dificuldades enfrentadas com as aulas ministradas por videoconferência e o período de insegurança, ocasionado pela pandemia. Essa certeza do efeito gerado pelo trabalho desenvolvido foi assegurada pelos argumentos que acompanharam os cálculos, presentes em cada questão, como ,por exemplo, a mostrada por AL9 (figura36) ,na solução do primeiro problema.

Figura 36 – Questão do pós-teste resolvido por AL9



01. (OBMEP 2018 - ADAPTADA) Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto, um carro rosa e um carro branco chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar três vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?

A) 720
B) 672
~~C)~~ 336
D) 120
E) 72

Como na questão diz que tenha pelo menos uma vaga livre entre os carros, usaremos a permutação com elementos não consecutivos, ou seja, o 1º Lema de Kaplansky

$n = 10$ vagas
$p = 3$ carros

$\boxed{C_{n-p+1,p}}$

$C_{10-3+1,3}$

$C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!\,3!}$

$C_{8,3} = \frac{\cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 56$

- Como os carros têm cores diferentes, a mudança gera uma possibilidade nova, aplicamos a permutação entre eles

$P_3 = 3!$

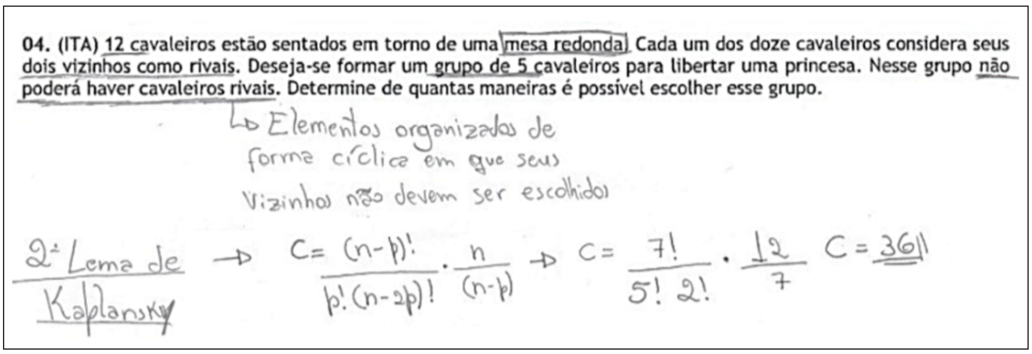
$P_3 = 6$

$\rightarrow 56 \times 6 = 336$

Fonte: Resultado da pesquisa

As figuras 37 e 38 são da quarta questão do pós-teste, resolvida de maneira distinta, pelos alunos AL8 e AL7, este último apresentou em sua solução o processo construído durante as aulas, elaborado para se alcançar as fórmulas, algo que constata a compreensão dos estudantes e valoriza a margem de acertos do exame, destacando que o mesmo problema no pré-teste foi deixado em branco por AL7, e não concluído por AL8.

Figura 37 – Questão do pós-teste resolvido por AL8



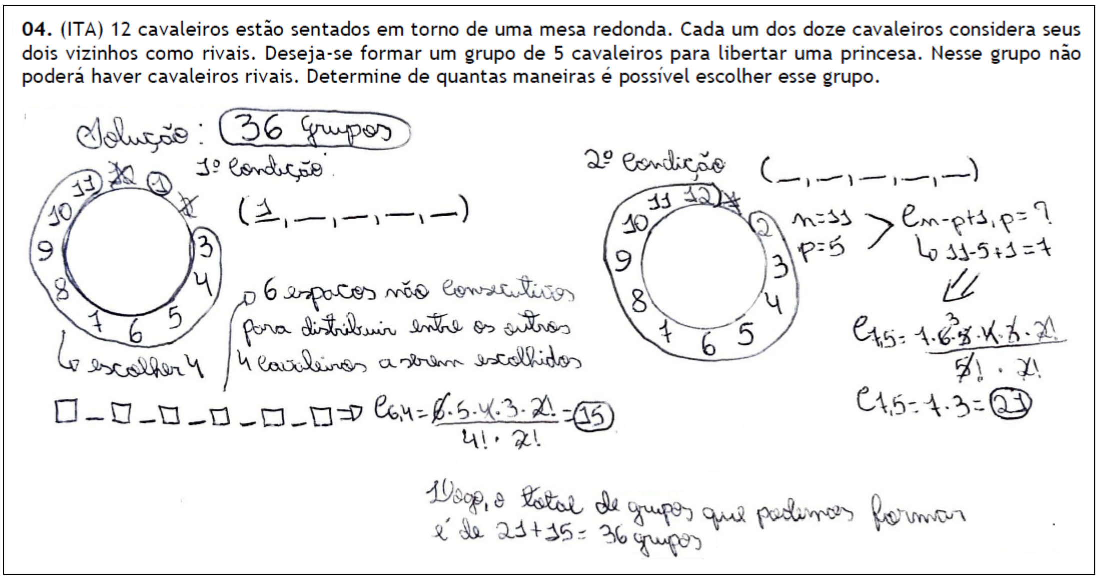
04. (ITA) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

↳ Elementos organizados de forma cíclica em que seus vizinhos não devem ser escolhidos

2º Lema de Kaplansky $\rightarrow C = \frac{(n-p)!}{p!\,(n-2p)!} \cdot \frac{n}{(n-p)} \rightarrow C = \frac{7!}{5!\,2!} \cdot \frac{12}{7}$ $C = 36$

Fonte: Resultado da pesquisa

Figura 38 – Questão do pós-teste resolvido por AL7


04. (ITA) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

Solução: 36 grupos

1º condição

(1, _, _, _, _)

escolher 4

6 espaços não consecutivos para distribuir entre os outros 4 cavaleiros a serem escolhidos

$C_{6,4} = \frac{6.5.4.3.2!}{4!.2!} = 15$

2º condição (_, _, _, _, _)

$n = 11$, $p = 5$ > $C_{n-p+1,p} = ?$ ↳ $11-5+1 = 7$

$C_{7,5} = \frac{7.6.5.4.3.2!}{5!.2!}$

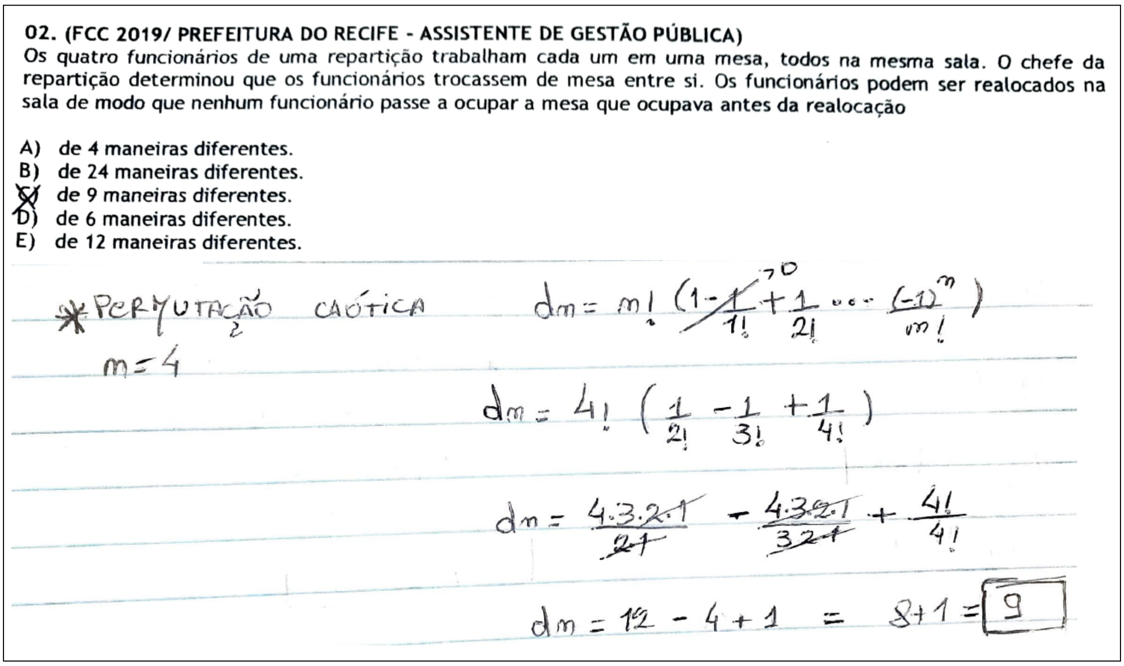
$C_{7,5} = 7.3 = 21$

Logo, o total de grupos que podemos formar é de 21+15 = 36 grupos

Fonte: Resultado da pesquisa

A segunda e quinta questão, que abordavam a permutação caótica, também tiveram um bom percentual de acertos no pós-teste, os estudantes AL10 (figura 39) e AL5 (figura 40), através de suas soluções, mostraram que absorveram bem a ideia apresentada durante os encontros por vídeoconferências.

Figura 39 – Questão do pós-teste resolvido por AL10


02. (FCC 2019/ PREFEITURA DO RECIFE - ASSISTENTE DE GESTÃO PÚBLICA)
Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si. Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação

A) de 4 maneiras diferentes.
B) de 24 maneiras diferentes.
C) de 9 maneiras diferentes.
D) de 6 maneiras diferentes.
E) de 12 maneiras diferentes.

*PERMUTAÇÃO CAÓTICA

$m = 4$

$d_m = m!\left(1 - \cancel{\frac{1}{1!}} + \frac{1}{2!} \cdots \frac{(-1)^m}{m!}\right)$

$d_m = 4!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)$

$d_m = \frac{4.3.2.1}{2.1} - \frac{4.3.2.1}{3.2.1} + \frac{4!}{4!}$

$d_m = 12 - 4 + 1 = 8 + 1 = \boxed{9}$

Fonte: Resultado da pesquisa

Figura 40 – Questão do pós-teste resolvido por AL5

05. (FUVEST 2017 - ADAPTADA)
Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo-secreto (ou amigo-oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso. Determine de quantas formas a distribuição dos papéis pode ocorrer desde que nenhum participante retire seu próprio nome.

Ja que nenhum participante pode tirar seu próprio nome ou seja nenhum elemento deve permanecer no seu lugar de origem, utilizei a permutação caótica

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

$$D_5 = 5!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$$

$$D_5 = 120\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right)$$

$$D_5 = 60 - 20 + 5 - 1$$

$$D_5 = 44$$

Fonte: Resultado da pesquisa

As questões três e seis que tratavam em seus enunciados do princípio da casa dos pombos, mesmo apresentando no pré-teste uma margem de acertos diferenciada das demais questões, após a aplicação do pós-teste esses resultados foram bem mais expressivos, algo possivelmente ocasionado pelo contato que os estudantes tiveram com a estratégia de resolução vivenciada no terceiro encontro das aulas expositivas, deixando um pouco de lado o método da enumeração, que estava sendo um dos recursos bastante utilizado pelos alunos. Nas imagens ,(41) e (42), a seguir apresentamos as soluções de AL3 e AL1

Figura 41 – Questão do pós-teste resolvido por AL3

03. (FCC 2019/Prefeitura de Manaus)
O número mínimo de pessoas em um grupo para que se garanta que, necessariamente, haja 7 delas que fazem aniversário no mesmo mês do ano é

A) 83.
B) 13.
C) 43.
D) 23.
E) 73.

Como haverá mais pessoas para serem distribuídas do que o número de meses, trata-se de um problema análogo ao da casa dos pombos.

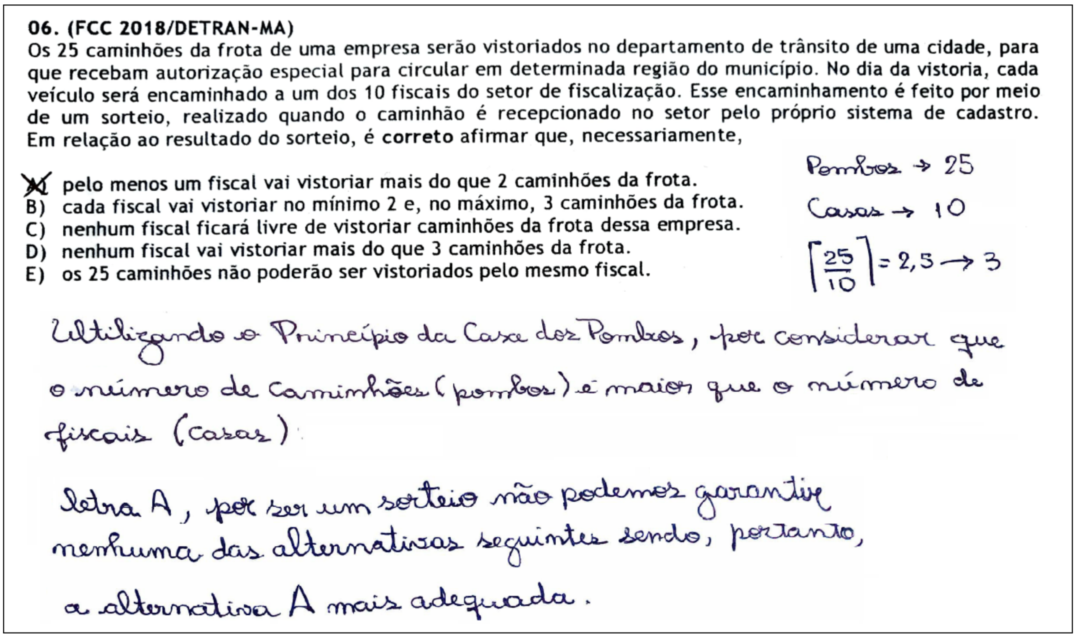
Pombos → pessoas (n)
Casas → meses (K)

$7 < \frac{n}{12} + 1 \quad 6 < \frac{n}{12} \quad \therefore \quad n > 72$

$\left[\frac{n}{K}\right] < \frac{n}{K} + 1 \quad \frac{n}{12} = 7$ nº de pessoas
↳ dentro de uma mesma "casa"

Fonte: Resultado da pesquisa

Figura 42 – Questão do pós-teste resolvido por AL1


06. (FCC 2018/DETRAN-MA)
Os 25 caminhões da frota de uma empresa serão vistoriados no departamento de trânsito de uma cidade, para que recebam autorização especial para circular em determinada região do município. No dia da vistoria, cada veículo será encaminhado a um dos 10 fiscais do setor de fiscalização. Esse encaminhamento é feito por meio de um sorteio, realizado quando o caminhão é recepcionado no setor pelo próprio sistema de cadastro. Em relação ao resultado do sorteio, é **correto** afirmar que, necessariamente,

A) pelo menos um fiscal vai vistoriar mais do que 2 caminhões da frota.
B) cada fiscal vai vistoriar no mínimo 2 e, no máximo, 3 caminhões da frota.
C) nenhum fiscal ficará livre de vistoriar caminhões da frota dessa empresa.
D) nenhum fiscal vai vistoriar mais do que 3 caminhões da frota.
E) os 25 caminhões não poderão ser vistoriados pelo mesmo fiscal.

Pombos → 25
Casas → 10
$\left\lceil \frac{25}{10} \right\rceil = 2,5 \rightarrow 3$

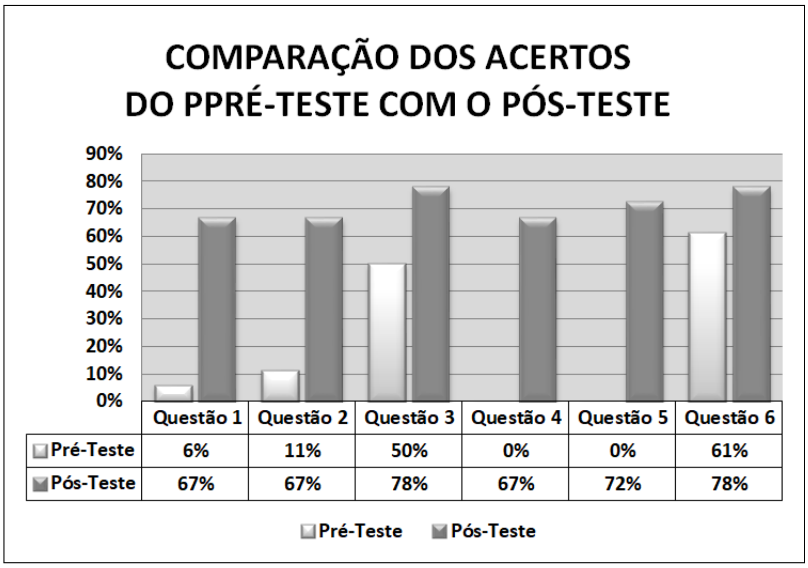
Utilizando o Princípio da Casa dos Pombos, por considerar que o número de caminhões (pombos) é maior que o número de fiscais (casas).

Letra A, por ser um sorteio não podemos garantir nenhuma das alternativas seguintes sendo, portanto, a alternativa A mais adequada.

Fonte: Resultado da pesquisa

Em resumo, através do gráfico apresentado pela figura 43, é possível observar que o percentual de acertos, em todas as questões do pós-teste, mostrou-se maior quando comparado com o do pré-teste, principalmente nos problemas em que o método da enumeração foi utilizado, com o propósito de se definir as possibilidades em que os elementos poderiam ser organizados, mas essa estratégia pareceu não ter ajudado muito, pois a técnica em alguns casos tornou as resoluções bem mais longas e complexas.

Figura 43 – Comparação dos acertos (Pré-teste x Pós-teste)



Fonte: Resultado da pesquisa

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer das observações das atividades, foi possível perceber várias técnicas utilizadas pelos alunos para tentar resolver as questões do pré-teste. A maioria dos alunos apresentou artifícios coerentes e satisfatórios, mas a criatividade e o empenho fizeram-se presentes nas resoluções e, a partir disso, ficou claro que seria possível alinhar, por meio de um recurso didático, as habilidades desenvolvidas por cada um para redigir e desenvolver seus raciocínios.

Partindo do fato que os alunos foram submetidos ao primeiro contato com o questionário (pré-teste), tendo vislumbrado apenas as técnicas de contagem que são trabalhadas regularmente no 2º ano do ensino médio, os resultados obtidos foram de expressivos, visto que algumas resoluções adequaram-se ao resultado esperado. Porém, ficou nítido que os conhecimentos acerca do Princípio da Casa dos Pombos, Lemas de Kaplansky e Permutações Caóticas, apresentados no desenvolvimentos da sequência didática, proposta neste trabalho, contribuíram para uma aprendizagem significativa, pois acrescentaram às suas estratégias novos métodos de contagem, que tornaram o processo de solução dos problemas explicitamente mais simples, algo que foi de fácil verificação quando os resultados do pré-teste foram comparados aos do pós-teste, ficando este último com uma margem percentual média, de acertos, 50% acima do resultado do primeiro.

Desta forma,espera-se que os frutos obtidos com esse trabalho estimulem e encorajem professores a inserirem, em suas sequências didáticas, outros métodos de contagem, nas turmas de 2º ano do ensino médio, com o objetivo de auxiliar os alunos a alcançarem êxito nessa árdua empreitada que é a resolução de problemas de análise combinatória.

Referências

AMARAL, F.; BORBA, R. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. *Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia. Recife: UFPE*, v. 2, p. 1–21, 2007.

BASS, H.; LAM, T. Y. Irving kaplansky 1917–2006. *Notices of the AM*, 2007.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. d. O. *Matemática discreta: coleçao PROFMAT*. [S.l.: s.n.], 2014.

MACHADO, R. *O Princípio da Casa Dos Pombos*. [S.l.]: Jornal de Matemática Olímpica UFRPE, 2018. v. 1.

MENDES, D. F. Abrangência das permutações na análise combinatória. 2014.

MERRIS, R. *Combinatorics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003. v. 67.

MORGADO, A. C. d. O. et al. *Análise combinatória e probabilidade*. [S.l.]: Instituto de Matemática pura e aplicada, 1991.

PACIFICO, T. M. *O princípio das gavetas de Dirichlet-problemas e aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo.

PESSOA, C.; BORBA, R. Problemas combinatórios: estratégias e respostas de alunos da educação básica. *V Sipem. Quinto seminário internacional de pesquisa em educação matemática. Petrópolis*, 2012.

ROSEN, K. H. *Discrete Mathematics and Its Applications*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1998.

TECNOLÓGICA, B. da Educação. Secretaria de Educação Média e. *Parâmetros Curriculares Nacionais:ensino médio*. [S.l.]: Brasília: MEC, 1999.

Anexo 1 - Pré-Teste

Questão 01. (OBMEP 2018 – ADAPTADA) Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto, um carro rosa e um carro branco chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar três vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?

Figura 44 – carros estacionados em vagas não consecutivas

criada pelo autor (2019)

a) 720
b) 672
c) 336
d) 72
e) 36

Questão 02. (FCC 2019/ PREFEITURA DO RECIFE - ASSISTENTE DE GESTÃO PÚBLICA) Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si. Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação

a) de 4 maneiras diferentes.
b) de 24 maneiras diferentes.
c) de 9 maneiras diferentes.
d) de 6 maneiras diferentes.
e) de 12 maneiras diferentes.

Questão 03. (FCC 2019/Prefeitura de Manaus) O número mínimo de pessoas em um grupo para que se garanta que, necessariamente, haja 7 delas que fazem aniversário no mesmo mês do ano é
a) 83.

b) 13.
c) 43.
d) 23.
e) 73.

Questão 04. (ITA) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

Questão 05. (FUVEST 2017 - ADAPTADA) Cláudia, Paulo, Rodrigo, Ana e Beatriz brincam entre si de amigo-secreto (ou amigo-oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso. Determine de quantas formas a distribuição dos papéis pode ocorrer desde que nenhum participante retire seu próprio nome.

Questão 06. (FCC 2018/DETRAN-MA) Os 25 caminhões da frota de uma empresa serão vistoriados no departamento de trânsito de uma cidade, para que recebam autorização especial para circular em determinada região do município. No dia da vistoria, cada veículo será encaminhado a um dos 10 fiscais do setor de fiscalização. Esse encaminhamento é feito por meio de um sorteio, realizado quando o caminhão é recepcionado no setor pelo próprio sistema de cadastro.Em relação ao resultado do sorteio, é correto afirmar que, necessariamente,

a) pelo menos um fiscal vai vistoriar mais do que 2 caminhões da frota.
b) cada fiscal vai vistoriar no mínimo 2 e, no máximo, 3 caminhões da frota.
c) nenhum fiscal ficará livre de vistoriar caminhões da frota dessa empresa.
d) nenhum fiscal vai vistoriar mais do que 3 caminhões da frota.
e) os 25 caminhões não poderão ser vistoriados pelo mesmo fiscal.

Anexo 2 - Carta de Anuência

Diferencial Concursos & Cursos Ltda.
Av. Mariana Amália, 11 A, Matriz, Vitoria De Santo Antão - PE
CEP 55602-010 - tel. (81)984977074

Carta de Anuência

Declaramos, pelo presente termo, que concordamos em conceder as nossas instalações para LUIZ MANOEL DE SANTANA NETO, estudante do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, com polo na UFRPE (Universidade Federal Rural de Pernambuco) para que possa desenvolver o seu projeto de pesquisa intitulado "ANÁLISE COMBINATÓRIA: LEMAS DE KAPLANSKY, PERMUTAÇÕES CAÓTICAS E O PRINCÍPIO DAS CASAS DOS POMBOS E SUAS APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO", sob a coordenação e orientação do Professor Dr. Ricardo Machado.

Vitória de Santo Antão, 09 de Setembro de 2019.

Leonardo David Marques
Coordenador do Diferencial Cursos

Luiz Manoel de Santana Neto
Aluno do PROFMAT-UFRPE