



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



José Ivan Dutra Júnior

**O Menor Limite Inferior de Vértices de Grau 2 Para Um Grafo
Minimal 2-Aresta-Conexo**

RECIFE
2019



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



José Ivan Dutra Júnior

**O Menor Limite Inferior de Vértices de Grau 2 Para Um Grafo
Minimal 2-Aresta-Conexo**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José Ferreira Gomes Junior

RECIFE
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

D978m Dutra Júnior, José Ivan

O menor limite inferior de vértices de grau 2 para um grafo minimal 2-aresta-conexo / José Ivan Dutra Júnior. – 2019.
89 f.: il.

Orientador: Antônio José Ferreira Gomes Júnior.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Recife, BR-PE, 2019.
Inclui referências e apêndice(s).

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Teoria dos grafos
3. Representações dos grafos 4. Ensino médio I. Gomes Júnior, Antônio José Ferreira, orient. II. Título

CDD 510

JOSÉ IVAN DULTRA JÚNIOR

**A MENOR QUANTIDADE DE VÉRTICES DE GRAU 2 EM UM GRAFO
MINIMAL 2-ARESTA-CONEXO**

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em ______.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio José Ferreira Gomes Junior (Orientador)-UFRPE

Prof^a . Dr^a Karla Ferreira de Arruda Duque-UFRPE

Prof. Dr Ricardo Burity Croccia Macedo-UFPB

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha mãe Célia Verônica, minha tia Socorro, minha esposa Sílvia, meu filho Vinícius, minhas irmãs Mariana e Raquel, minha tia Iramir Dultra (“In Memoriam”), a minha cunhada Norma Campos e meu estimado amigo Nilson Assis.

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida, por mais essa conquista, e por sempre estar ajudando nos meus sonhos e me confortando nas dificuldades. A meu orientador Professor Dr. Antônio Gomes por toda sua dedicação e paciência em todas as orientações. A minha mãe Célia Verônica por toda a força e incentivo. A minha esposa e filhos, às professoras Micheline Dias e Ana Karina por todo o apoio, ao meu amigo Roberto Costa que esteve presente no desenvolvimento desse trabalho, a meus companheiros de estudos Rui Lima, Andreia Silva, Eliton Mendes, Jorge da Silva e Gustavo Duarte. A meus alunos do curso de Matemática da FACHUCA, a meus dois amigos que colaboraram nesse trabalho, professores Cassio Ricardo e Paulo Henrique.

*"Não é porque você tem uma deficiência,
que isso te torna incapaz."
(Autor Desconhecido)*

DECLARAÇÃO

Eu, **José Ivan Dutra Júnior** declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título **O Menor Limite Inferior de Vértices de Grau 2 Para Um Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo**, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processo administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador **Antonio José Ferreira Gomes Junior**, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 25 de Abril de 2019.

José Ivan Dutra Júnior

Resumo

Estudar teoria dos grafos é sem dúvida, uma experiência que nos mostra a importância desse tema devido a sua aplicabilidade em diversos ramos da Matemática bem como sua notória aparição em situações do cotidiano. Neste sentido, nosso trabalho objetiva primeiramente embasar o leitor sobre os conceitos iniciais de grafos como por exemplo, os seus elementos (vértices e arestas), a valência de cada vértice, tipos de passeio, isomorfismo e operações com grafos. A partir daí, apresentamos o conceito de conexidade para que o leitor possa reconhecer um grafo conexo ou desconexo, as definições de árvores e florestas bem como suas propriedades. Familiarizados com estes conceitos, inserimos então o conceito de grafos minimais 2 – *aresta* – *conexo*. Usando o rigor da Matemática, colocamos à prova, por indução, a equação que nos remete ao menor limite inferior de vértices de grau 2 em um grafo minimal 2 – *aresta* – *conexo*. Nesse momento, nos deparamos com uma inconsistência. Encontramos um caso em que a minimalidade do grafo não foi observada mas, contudo, a eficácia da equação não fora comprometida. Após isso, para a modelagem dos grafos, utilizamos programas e softwares como o geogebra, google maps e o Lucidchart, este último específico para montagem de sistemas de redes. Citamos ainda o uso de materiais concretos como o Geoplano que consiste em uma plataforma com pinos e ligas, completamente manipuláveis que foram utilizados na aplicação de uma atividade lúdica com 32 alunos do ensino médio/técnico em logística o que nos ajudou na questão didática, possibilitando uma maior interação entre as pessoas envolvidas no processo de construção. A proposta de envolvê-los nessa atividade de obtenção de um sistema de conexões viável aplicável em seus projetos de logística gerou resultados interessantes e questionamentos que despertaram a vontade dos mesmos em se aprofundar no tema.

Palavras-chave: conexões, grafo minimal 2 – *aresta* – *conexo*, geoplano.

Abstract

Studying graph theory is undoubtedly an experience that shows us the importance of this subject due to its applicability in several branches of Mathematics as well as its notorious appearance in everyday situations. In this sense, our work aims at first to base the reader on the initial concepts of graphs such as their elements (vertices and edges), valence of each vertex, types of walk, isomorphism and operations with graphs. From this, we present the concept of connectedness so that the reader can recognize a connected or disconnected graph, the definitions of trees and forests as well as their properties. Familiar with these concepts, we then insert the concept of minimal *2 – edge – connected* graphs. Using the rigor of mathematics, we test by induction the equation that brings us to the lowest lower bound of vertices of degree 2 in a minimal *2 – edge – connected* graph. At this point, we are faced with an inconsistency. We found a case where the minimality of the graph was not observed but, however, the effectiveness of the equation was not compromised. After that, for the modeling of graphs, we use programs and software such as geogebra, google maps and Lucidchart, the latter specific for the assembly of network systems. We also cite the use of concrete materials such as the Geoplane that consists of a platform with pins and alloys, completely manipulable that were used in the application of a playful activity with 32 students of high school / technical in logistics which helped us in the didactic question, enabling a greater interaction between the people involved in the construction process. The proposal to involve them in this activity of obtaining a viable connection system applicable in their logistics projects generated interesting results and questions that aroused their desire to delve deeper into the theme.

Keywords: connections, minimal graph *2 – edge – connected*, geoplane.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Grafo	23
Figura 2 – Adjacência	24
Figura 3 – Grafo com Laço	24
Figura 4 – Grafo Simples e Multigrafo	25
Figura 5 – Ordem de Um Grafo	25
Figura 6 – Grau de um Vértice	26
Figura 7 – Grafo 2 – <i>Regular</i>	26
Figura 8 – Grafos Isomorfos	27
Figura 9 – Grafo Completo	27
Figura 10 – Total de Arestas de um Grafo Completo	28
Figura 11 – Grau dos Vértice de um Grafo Completo	28
Figura 12 – Subgrafo Induzido	29
Figura 13 – Passeio em G	30
Figura 14 – Passeio Fechado em G	30
Figura 15 – Trilha em G	31
Figura 16 – Circuito em G	31
Figura 17 – Caminho em G	32
Figura 18 – Ciclo	32
Figura 19 – Deleção da Aresta	33
Figura 20 – Deleção do Vértice	33
Figura 21 – Contração da Aresta	34
Figura 22 – Grafo Conexo	35
Figura 23 – Grafo Desconexo	35
Figura 24 – Componente Conexa de G Conexo	36
Figura 25 – Componente Conexa de G Desconexo	36
Figura 26 – Floresta	37
Figura 27 – Árvore	37
Figura 28 – Folhas de uma Árvore	38
Figura 29 – União de Dois Caminhos	39
Figura 30 – União de Dois Caminhos	39
Figura 31 – Componentes Conexas	40
Figura 32 – Grafo Minimal-Aresta-Conexo	41
Figura 33 – Acréscimo de Aresta	41
Figura 34 – Grafo 3-Aresta-Conexo	42
Figura 35 – Grafo minimal 2-aresta-conexo	43
Figura 36 – Grau de um Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo	44

Figura 37 – Dois Tipos de Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo	44
Figura 38 – Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo com a conta de Mader	46
Figura 39 – Comparação de teoremas no Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo	56
Figura 40 – Tabela Comparando o Número de Vértices de Grau 2 de Cada Teorema	57
Figura 41 – Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo com vértices de Grau 2 de ordem 9 . .	58
Figura 42 – Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo de Grau 2 de ordem 13	59
Figura 43 – Geoplano	62
Figura 44 – Grafo da figura 36 no Geoplano	63
Figura 45 – Grafo G da figura 40 no Geoplano	63
Figura 46 – Grafo G' da figura 33 no Geoplano	64
Figura 47 – Grafo G'' da figura 33 no Geoplano	64
Figura 48 – Representação no Geoplano do arquipélago com 13 ilhas	66
Figura 49 – Conexão Antiga	68
Figura 50 – Conexão com Fibra óptica	68
Figura 51 – Conexão com Fibra óptica no Geoplano	69
Figura 52 – Mapa Feito no Google Maps	70
Figura 53 – Mapa Feito no Geoplano	71
Figura 54 – alunos montando os grafos	75
Figura 55 – 1ª Atividade	76
Figura 56 – 2ª Atividade	77
Figura 57 – 3ª Atividade	78
Figura 58 – Grafo para nova cota	79

Sumário

	Introdução	19
1	CONSIDERAÇÕES SOBRE TEORIA DOS GRAFOS	23
1.1	Grafo	23
1.2	Considerações Sobre Vértices e Arestas	24
1.3	Três Classes Especiais de Grafos	27
1.4	Subgrafos	29
1.5	Tipos de Passeios	30
1.6	Operações com Grafos	33
2	CONEXIDADE	35
2.1	Grafos Conexos e Desconexos	35
2.2	Árvores e Florestas	37
2.3	Propriedades Sobre Árvores	38
2.4	Grafo k-Aresta-Conexo	42
2.5	Grafo Minimal-2-Aresta-Conexo	42
3	MENOR LIMITE INFERIOR DE VÉRTICES DE GRAU 2 NUM GRAFO MINIMAL 2-ARESTA-CONEXO	47
4	MATERIAL MANIPULÁVEL	61
4.1	Geoplano	61
4.2	Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo de Grau 2 No Geoplano	62
5	MODELAGEM DO GRAFO MINIMAL 2-ARESTA-CONEXO	65
5.1	Construção de Pontes em um Arquipélago	65
5.2	Redes de Computadores	66
5.3	Roteirização	69
6	PROPOSTA DE ATIVIDADE	73
6.1	Sugestão De Atividade	79
	Conclusão	81
	REFERÊNCIAS	83
	APÊNDICE A – PLANILHA DO CAPÍTULO 3	85

Introdução

O marco inicial para o estudo de grafos foi uma publicação de Leonhard Paul Euler[1] em 1736 demonstrando o desafio proposto pelos habitantes da cidade de Königsberg. Na época, ele não utilizou o termo grafo, sendo usado como conhecemos pelo matemático inglês James Joseph Sylvester[2].

De forma geral a teoria dos grafos estuda combinação de objetos, modelando problemas em vários ramos das ciências, esse jeito de tratar situações auxilia na contextualização e no aprofundamento de seus estudos em níveis mais elevados e demonstram também a potencialidade matemática que pode desempenhar.

Diversos problemas relacionados a pontes foram representados usando grafos, não é só um privilégio da ponte de Königsberg. A noção de conexidade é muito importante na teoria dos grafos, pois através de critérios já predeterminados podemos modelar conexões entre cidades ou municípios, estados ou países, ilhas ou arqueogeólogos, hub's , swicht's ou roteadores os conectando com estradas, pontes, cabeamentos ou malhas. Todos esses objetos podem ser chamados de vértices e a conexão entre cada vértice de aresta.

Mais de oito décadas se passaram desde a publicação do primeiro livro didático sobre teoria dos grafos escrito por Dénes König[3], esses textos ainda fazem parte do currículo da maioria dos cursos introdutórios até hoje. O conjunto de regras criadas não só por esse e também por livros posteriores, ajudou a identificar outros campos de pesquisa. Muita coisa aconteceu na teoria dos grafos, teoremas novos foram encontrados, métodos e resultados têm-se inter-relacionados, todos a novos ramos do conhecimento com a teoria dos grafos. Para citar apenas alguns desses desenvolvimentos, temos teoria de redes complexas, a matriz Google usando as Cadeias de Markov, algoritmos de escalonamento, layout de circuitos entre outros.

Redução de custos é um tema muito recorrente nos dias de hoje, pode-se gerenciar esses custos por meio de grafos. Seja usando caminhos mais curtos, rotas mais econômicas no que diz respeito a pedágios e trânsito e modelos de grafos que chamados de minimais.

Nesse trabalho usaremos o grafo minimal 2 – *aresta – conexo*. Pois além do mínimo de arestas possíveis, mesmos com a deleção de qualquer aresta o grafo continua conectado. Fato esse muito importante para nossas aplicações, afinal para nosso estudo não adianta montar um sistema de conexões econômico se com a falha em apenas uma conexão o sistema desconecte.

Um grafo minimal 2 – *aresta – conexo* de $|V(G)|$ vértices, não precisa ter apenas vértices de grau 2, em nosso trabalho apresentaremos esse tipo de grafo com vértices de grau maior ou igual a 2. Para isso vamos citar o artigo do matemático W.Mader[4] que publicou uma fórmula que propõe um limite inferior para quantidade vértices de grau

k em grafos minimal k – *aresta* – *conexo*. O diferencial do nosso trabalho não está em procurar um limite, e sim o menor limite inferior de vértices de grau dois em um grafo minimal 2 – *aresta* – *conexo*. Esse menor limite foi apresentado pelo matemático Zhu[5] afirmando que serve para grafos com cinco ou mais vértices. Usando indução na tentativa de demonstrar esse fato e fazer algumas considerações sobre esse menor limite além de comparar com o limite de W.Mader[4], vamos a partir desse menor limite montar uma família desses grafos para aplicá-la em exemplos voltados ao novo ensino médio.

A reforma do ensino médio em 2017 trata entre outros assuntos da flexibilidade do currículo no Ensino Médio e na oportunidade de escolher em qual área do conhecimento querem aprofundamento. No texto aprovado do Senado, ficaram definidos cinco itinerários formativos: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Formação Técnica e Profissional.

Sabendo disso, mesmo antes da aprovação, o Centro Profissional Especial, colégio em Jaboatão dos Guararapes adotou essa prática em 2016 colocando em seu contra turno disciplinas técnicas de forma que o aluno concluinte do ensino médio além do seu diploma básico vai ter também o da formação técnica. Uma das formações técnicas que o aluno pode escolher é administração de empresas, onde temos a disciplina de logística, distribuição e armazenagem. Onde seu principal foco é procurar maneiras de aumentar os lucros não só com as vendas, mas também reduzindo os custos da empresa. Uma proposta interessante de atividade é uma melhor opção de rotas até um determinado número de empresas usando para isso a família com o menor limite inferior de vértices de grau 2 num grafo minimal 2 – *aresta* – *conexo*. Para montagem do grafo usaremos como material manipulável, o Geoplano trazendo ao aluno além de um instrumento lúdico que desperta a curiosidade e o motiva a desenvolver a atividade.

Os seis capítulos deste trabalho foram desenvolvidos na intenção de identificar os elementos de um grafo, o grau de cada vértice e os tipos de grafos; saber aplicar corretamente as operações de delegação e contração de um vértice e de uma aresta; montar todos os passeios; montar as famílias de vértices de grau 2 de grafos minimal 2 – *aresta* – *conexo*; utilizar o geoplano para montagem de grafos.

Para o desenvolvimento do presente trabalho foi realizada uma pesquisa bibliográfica que baseou-se no livro Graph Theory de Diestel[6] para definir grafos e seus elementos bem como suas operações. Para escrever sobre conexidade e árvores, foram usados além do livro Graph Theory, dissertações do PROFMAT sobre grafos e notas de aula para auxiliar na demonstração de alguns teoremas sobre árvore, artigos científicos sobre grafos minimais e opções de quantidades de vértices de grau 2. Os estudos de casos foram desenvolvidos, usando temas como conexão entre ilhas, redes de computadores e roteirização. Para construção dos grafos foi usado o Geoplano como material manipulável, e softwares como Geogebra, Lucidchart, Google Maps. Levamos o Geoplano para sala de aula como proposta de atividade visando entender a percepção dos alunos sobre os grafos minimais.

No capítulo 1, será abordado de forma objetiva e ilustrada as definições preliminares sobre grafos e sua classificação quanto a seus elementos, os tipos de grafos que podem ser construídos, as operações e propriedades sobre teoria dos grafos.

No capítulo 2, será abordado conexidade, os grafos conexo e desconexo, definições e teoremas sobre árvores e finalmente a definição e exemplos de um grafo minimal 2 – *aresta – conexo* onde esse grafo será utilizado em todos os próximos capítulos.

O capítulo 3, consiste na apresentação do teorema que possibilita estimar a menor quantidade de vértices de grau 2 num grafo minimal 2 – *aresta – conexo*. Considerações sobre a demonstração do teorema, exemplos ilustrados e uma comparação para confirmar que nosso teorema fornece a menor cota e a modelagem de uma família montada a partir desse teorema.

No capítulo 4, será apresentado o geoplano, um material manipulável que vai nos auxiliar na montagem dos grafos e exemplos de grafos apresentados no capítulo 3.

O capítulo 5, consiste em três exemplos onde é utilizada a família construída a partir do teorema do capítulo 3 e para construção dos grafos desse capítulo foi usado geoplano em todos os exemplos, e softwer's como Lucidchart no segundo exemplo e Google Maps no terceiro.

No capítulo 6, apresentamos os conceitos básicos de teoria dos grafos e o grafo minimal 2 – *aresta – conexo*. Depois três atividades, para serem modeladas no geoplano, onde duas por meio de tentativas e uma usando o menor limite inferior de vértices de grau 2 para o grafo minimal 2 – *aresta – conexo*.

1 Considerações Sobre Teoria dos Grafos

Neste capítulo apresentamos alguns dos conceitos básicos da Teoria dos Grafos, necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Este capítulo bem como o capítulo 2, foi elaborado a partir do livro Graph Theory (Edição Eletrônica de 2000) de Reinhard Diestel.

1.1 Grafo

A maneira usual de imaginar um grafo é desenhar um ponto para cada vértice e juntando dois desses pontos por uma linha formamos uma aresta. O modo como esses pontos e linhas são desenhados é considerado irrelevante. Tudo o que importa é quais pares de vértices formam uma aresta e quais não.

Definição 1.1. Um *grafo* é um par $G = (V, A)$ onde os elementos de A são subconjuntos de 2 elementos de V ($A \subseteq [V]^2$). Representamos um elemento de A por $a = v_i v_j$, para evitar ambiguidades notacionais, vamos sempre assumir tacitamente que $V \cap A = \emptyset$. Os elementos de V são chamados de *vértices*, *nós*, ou *pontos*. Os elementos de A são chamados de *arestas*, *linhas* ou *bordas*. O conjunto de vértices de um grafo G é referido como $V(G) = V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ e seu conjunto de arestas como $A(G) = A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$.

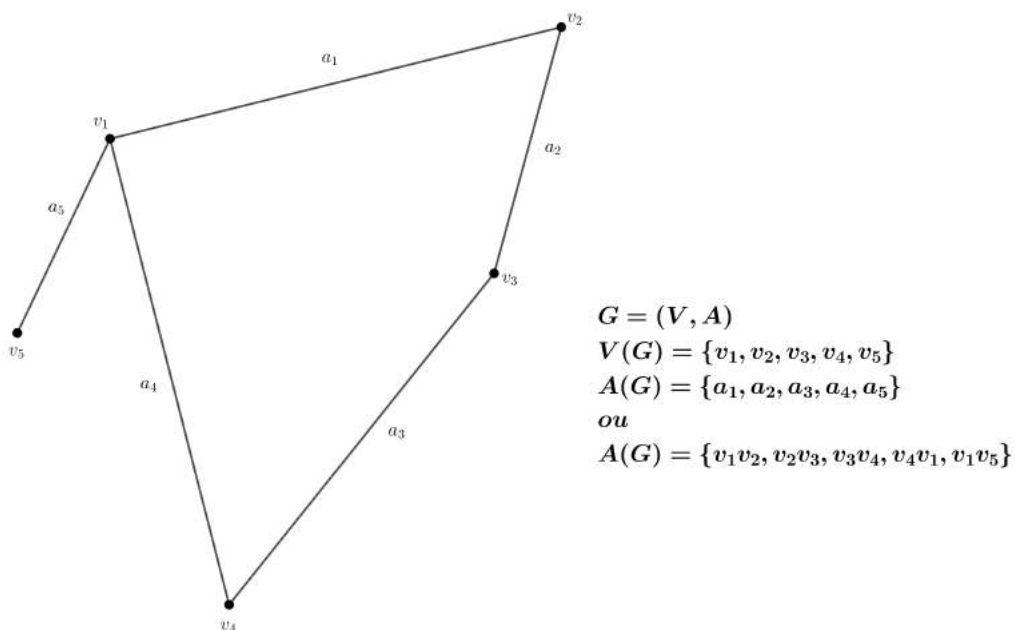


Figura 1 – Grafo

1.2 Considerações Sobre Vértices e Arestas

Definição 1.2. Dois vértices v_i e v_j de G são ditos *incidentes*, *adjacentes* ou *vizinhos*, se $v_i v_j$ é uma aresta de G . Os dois vértices incidentes com uma aresta são seus extremos, e uma aresta une suas extremidades. Duas arestas a_1 e a_2 , com $a_1 \neq a_2$ são ditas *adjacentes* se tiverem um vértice comum.

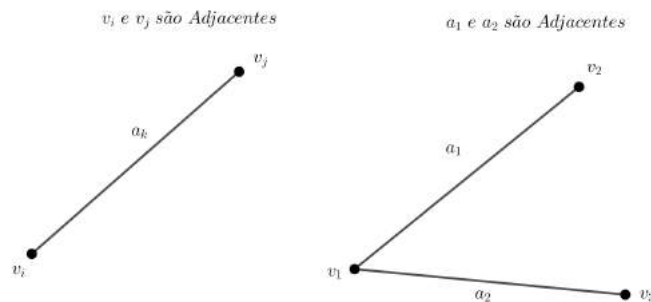


Figura 2 – Adjacência

Definição 1.3. Uma aresta é dito *laço* se for do tipo $a = v_i v_i$.

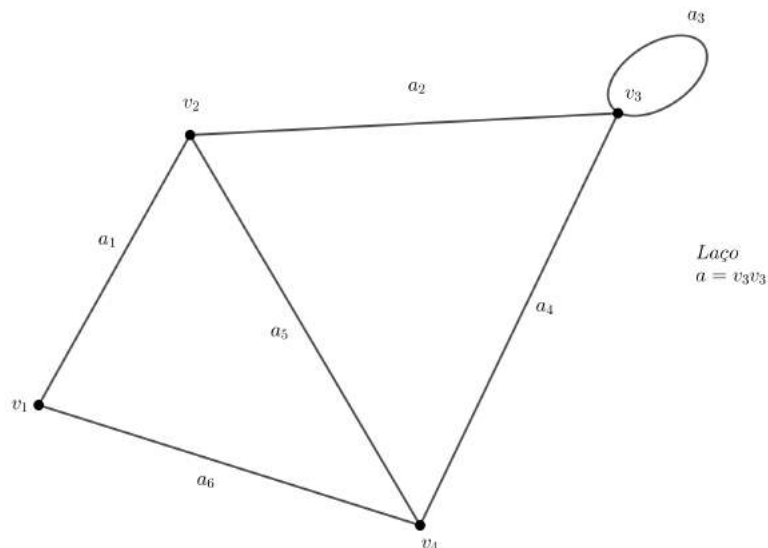


Figura 3 – Grafo com Laço

Definição 1.4. Duas arestas $a_m, a_n \in A$, são ditas *paralelas*, se $a_m = a_n = v_i v_j$. Um grafo que possui arestas paralelas ou laço é chamado de *multigrafo*. Os grafos que não tem laço nem arestas paralelas são ditos *simples*.

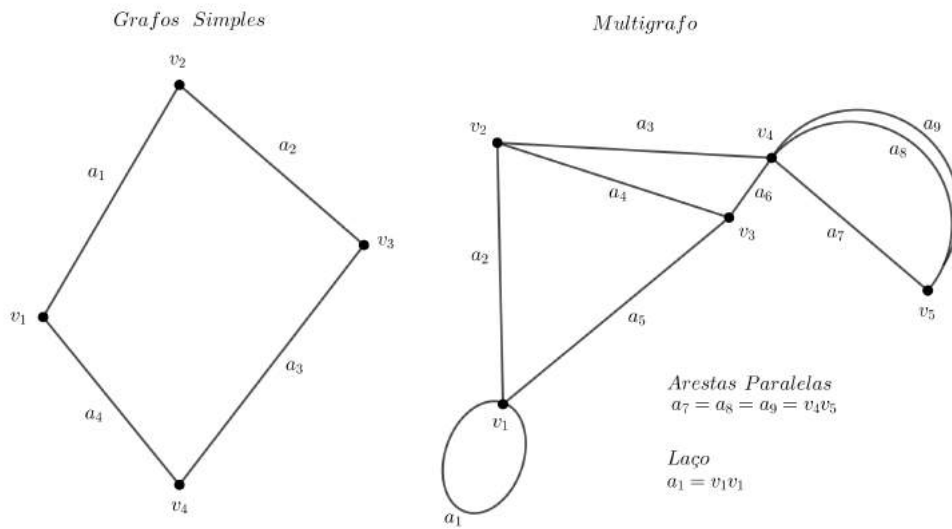


Figura 4 – Grafo Simples e Multigrafo

Definição 1.5. O número de vértices de um grafo G é representado por $|V(G)|$, já o número de arestas é representado por $n(a)$. Dizemos que $|V(G)|$ é a ordem de um grafo G . Os grafos são finitos ou infinitos de acordo com sua ordem. Os grafos que vamos considerar são todos finitos. Um grafo de ordem 1 é chamado trivial.

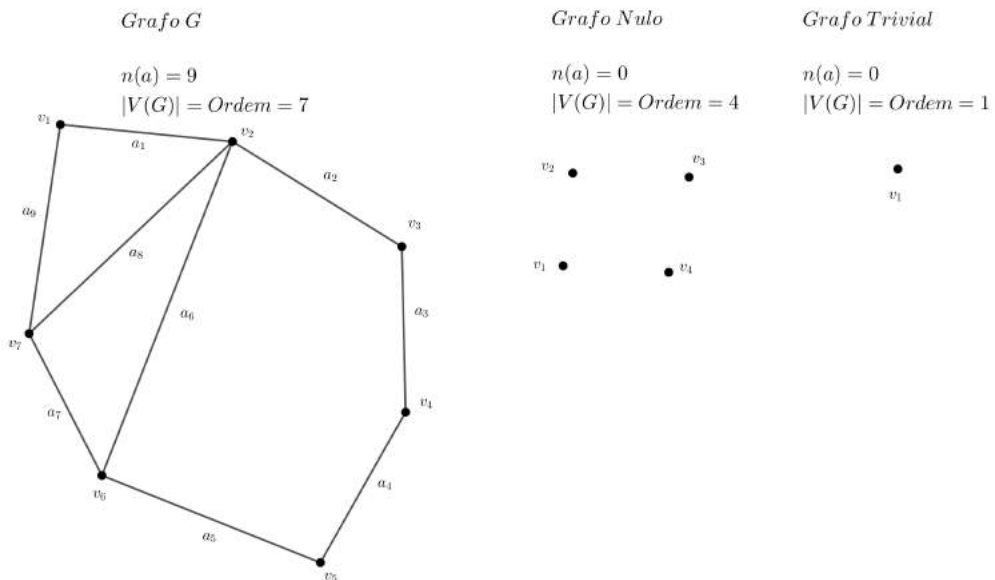


Figura 5 – Ordem de Um Grafo

Definição 1.6. Seja $G = (V, A)$ um grafo não vazio, o número de arestas incidentes em v é representado por $d(v) = d_g(v)$, e chamamos de *grau ou valência do vértice v* . Pela definição de grafo, isso é igual ao número de vizinhos de v . Um vértice de grau 0 é dito *isolado* e de grau 1 é vértice *folha ou terminal*. O número $\delta(G) := \min\{d(v) \mid v \in V\}$ é o *grau mínimo* de G , o número $\Delta(G) := \max\{d(v) \mid v \in V\}$ seu *grau máximo*. Neste

trabalho o número de vértices de grau k de um grafo G é dado por $|\mu(G)|$. Se todos os vértices de G tem o mesmo grau k , então G é dito grafo k – regular, ou simplesmente regular.

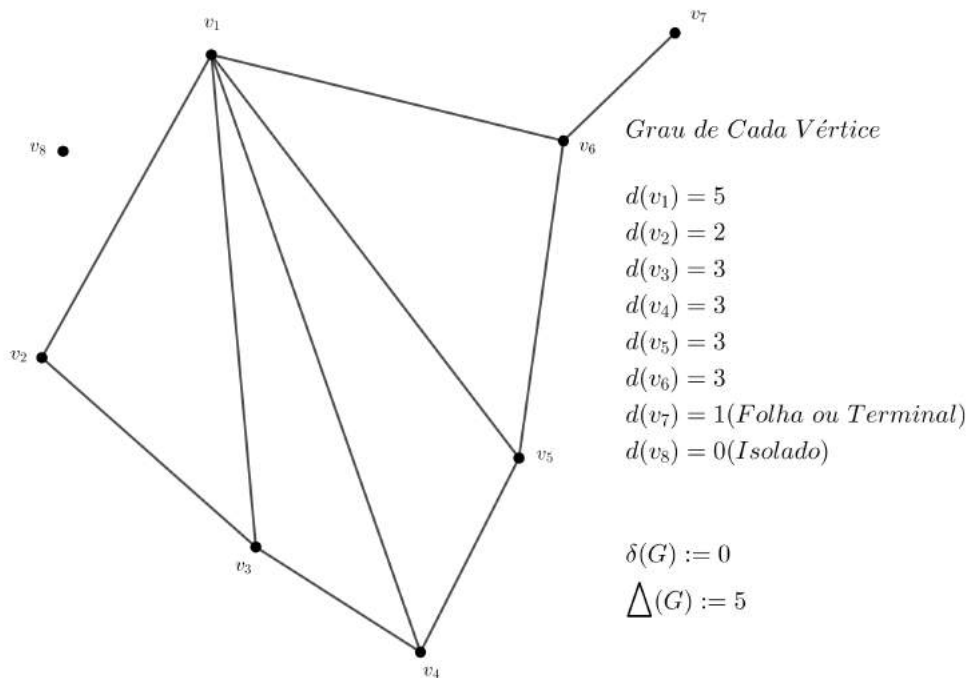


Figura 6 – Grau de um Vértice

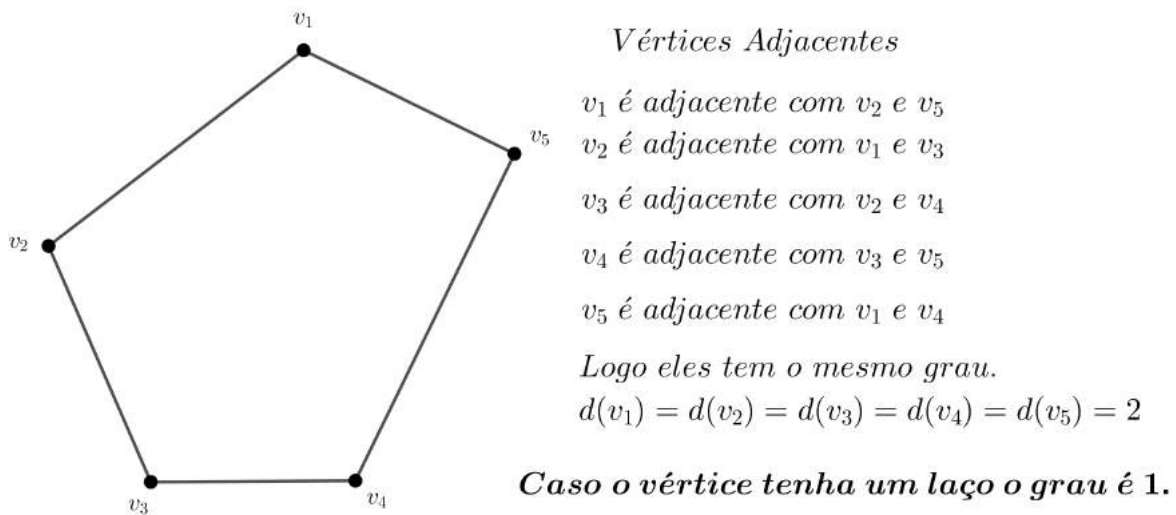


Figura 7 – Grafo 2 – Regular

Definição 1.7. Seja $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ dois grafos. Chamamos G e G' de isomorfos, e denotamos $G \simeq G'$, se houver uma bijeção $\varphi : V \rightarrow V'$, com $v_i v_j \in A \Leftrightarrow \varphi(v_i) \varphi(v_j) \in A'$, para todo $v_i, v_j \in V$. Tal mapa φ é chamado um isomorfismo, se $G = G'$, é chamado de automorfismo.

Proposição 1.9. *Seja $G = (V, A)$ um grafo completo, o número total das arestas desse mesmo grafo é dado por, $n(a) = \frac{n(n-1)}{2}$.*

Demonstração. Faremos a combinação dos n vértices organizados 2 a 2 de G . De fato, $n(a) = c_{n,2} \implies n(a) = \frac{n!}{2!(n-2)!} \implies n(a) = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} \implies n(a) = \frac{n(n-1)}{2}$ \square

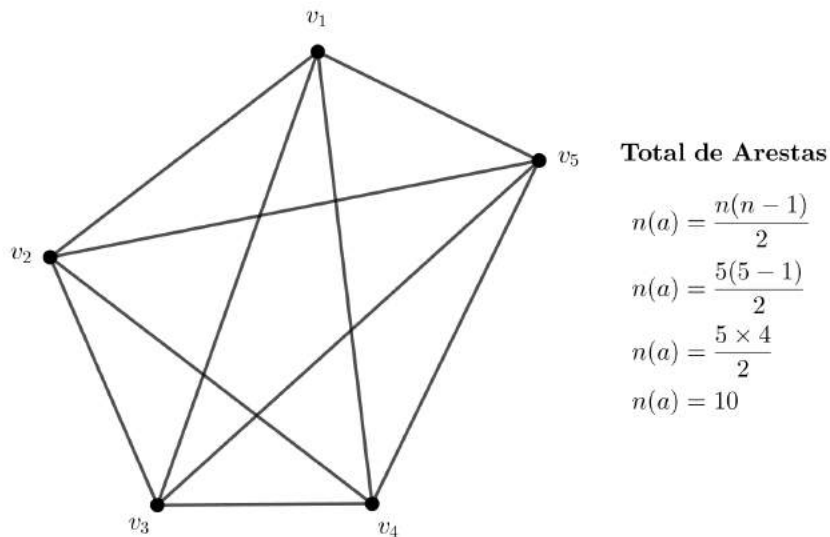


Figura 10 – Total de Arestas de um Grafo Completo

Observação 1.10. Todos os vértices de K^n tem o mesmo grau $n - 1$, então K^n é um grafo $(n - 1)$ – regular.

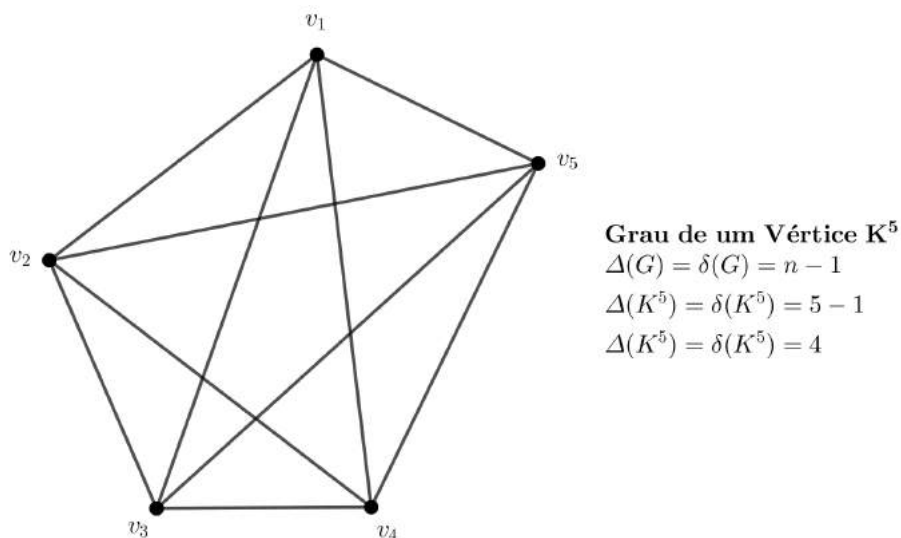


Figura 11 – Grau dos Vértice de um Grafo Completo

1.4 Subgrafos

Definição 1.11. Dizemos que $G' = (V', A')$ é *subgrafo* de $G = (V, A)$, se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$, neste caso também diremos que G é um *supergrafo* de G' . Se $G' \subset G$ e G' contiver todas as arestas $v_i v_j \in A$ com $v_i, v_j \in V'$, então G' é um *subgrafo induzido* de G , dizemos que V' induz G' em G , e denotaremos por $G' =: G[V']$. Assim, se $V'' \subseteq V$ é qualquer conjunto de vértices, então $G[V'']$ denota o grafo em V'' , cujas suas arestas são precisamente as arestas de G .

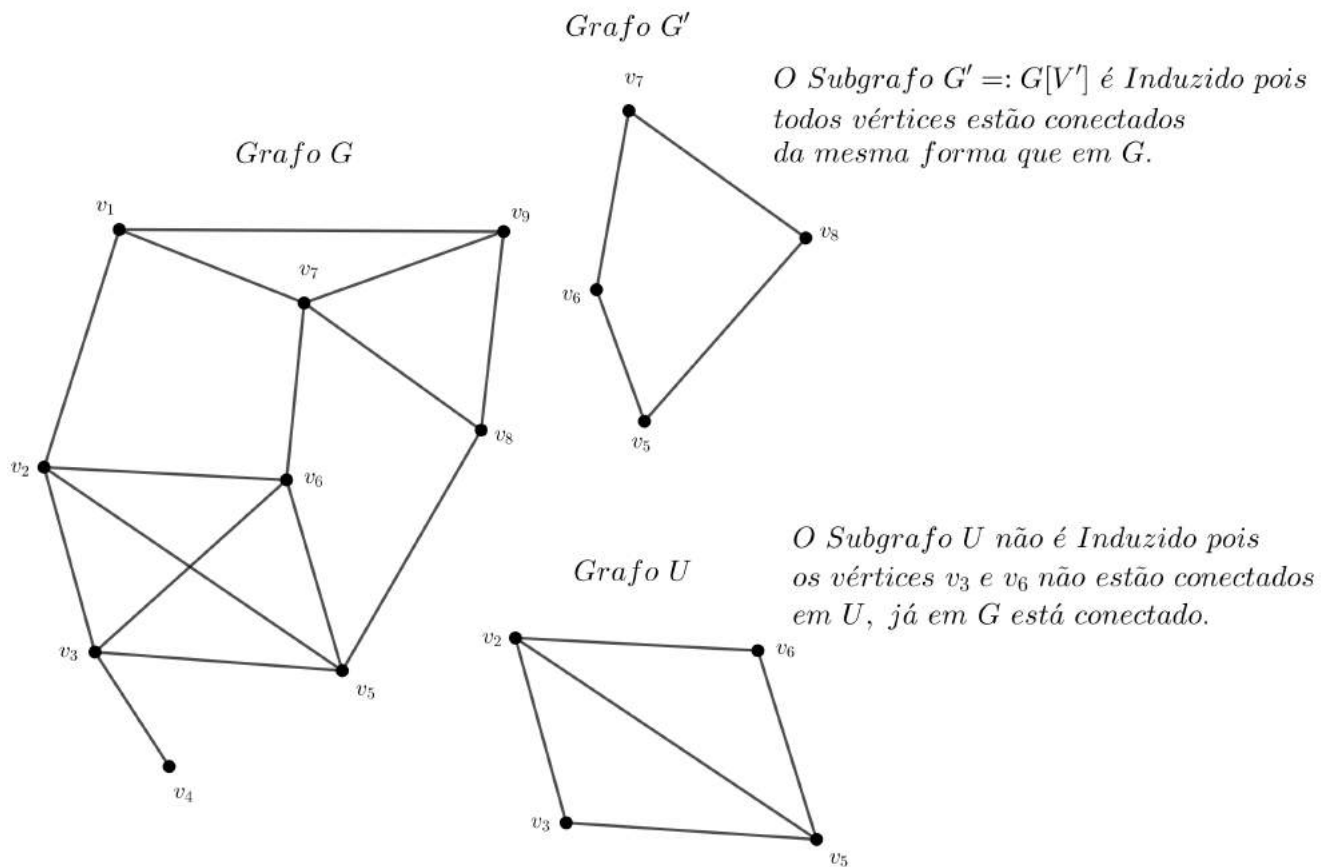


Figura 12 – Subgrafo Induzido

1.5 Tipos de Passeios

Definição 1.12. $v_1v_2\dots v_n$, é dito um *passeio* em G , se $v_{i-1}v_i \in A(G) \forall i = 2, \dots, n$.

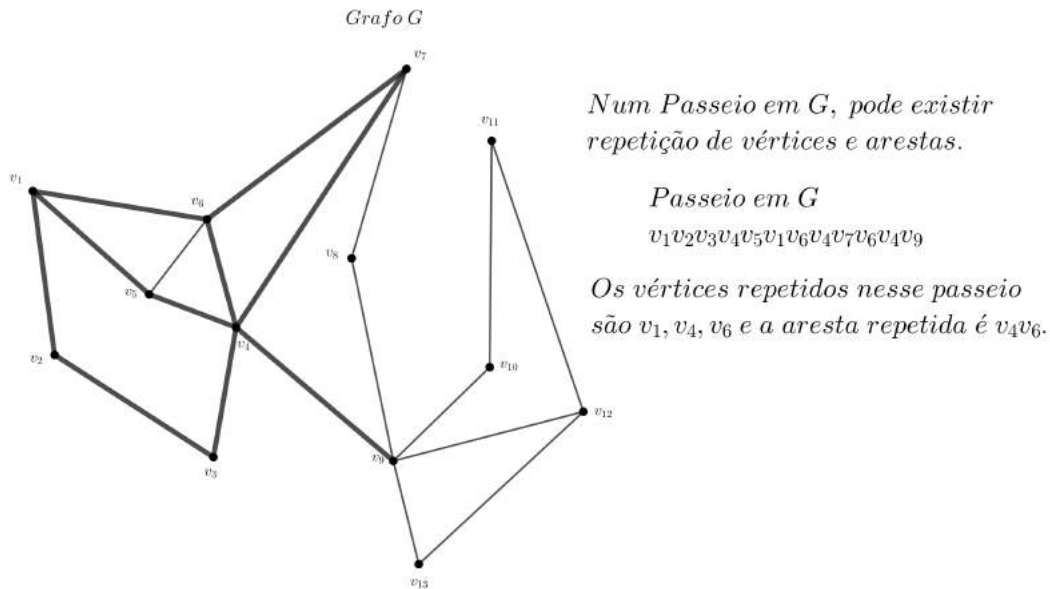


Figura 13 – Passeio em G

Definição 1.13. $v_1v_2\dots v_n$, é dito um *passeio fechado* em G , se $v_{i-1}v_i \in A(G) \forall i = 2, \dots, n$ e os vértices inicial e final sejam *coincidentes*, $v_1 = v_n$.

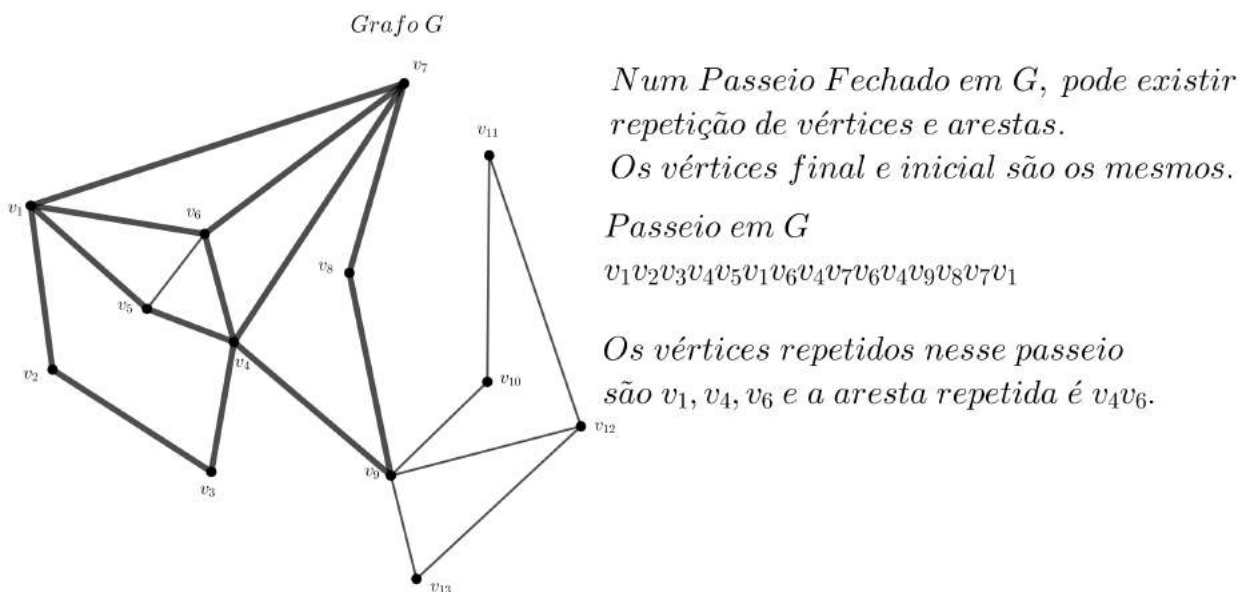


Figura 14 – Passeio Fechado em G

Definição 1.14. Um Passeio $v_1v_2\dots v_n$, é dito uma *trilha* em G , se não houver repetição de aresta.

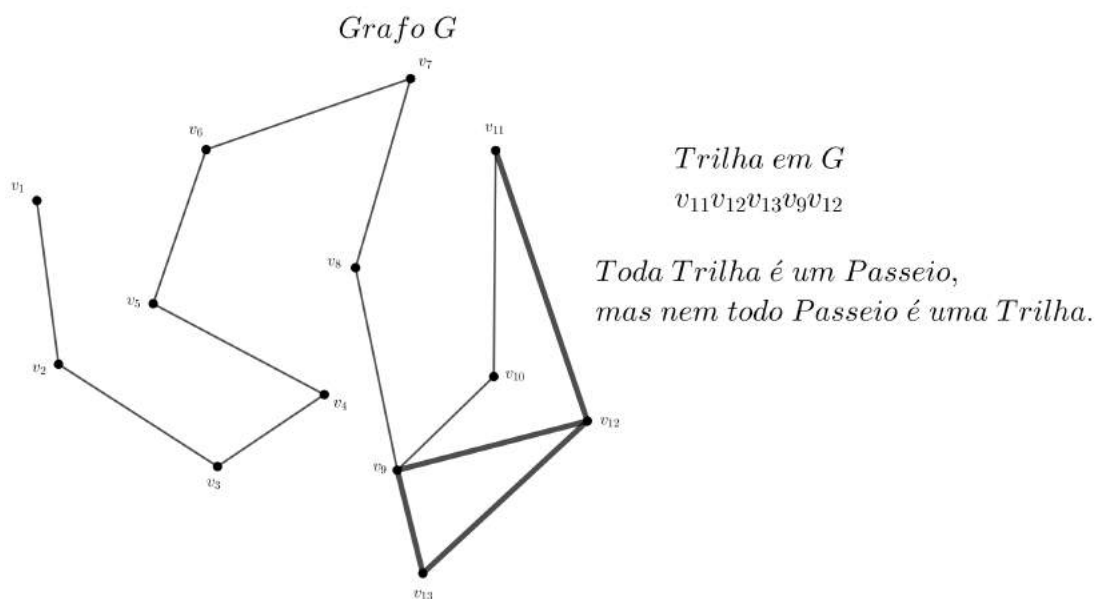


Figura 15 – Trilha em G

Definição 1.15. Uma Trilha $v_1v_2\dots v_n$, é dito um *circuito* em G , se os vértices inicial e final sejam coincidentes, $v_1 = v_n$.

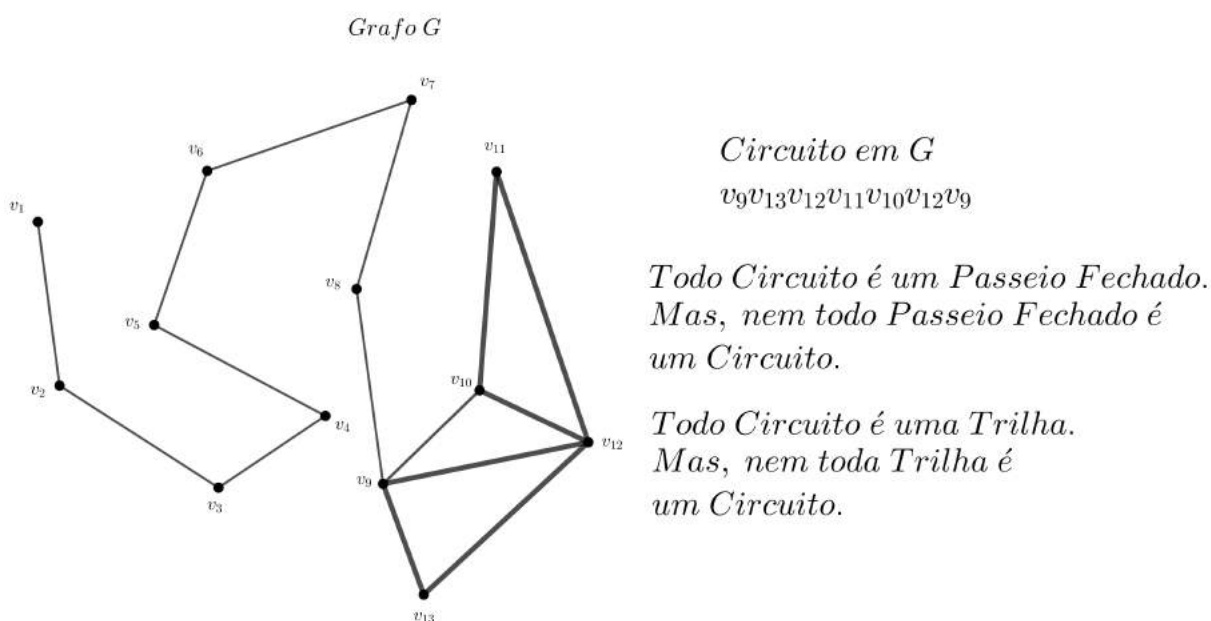


Figura 16 – Circuito em G

Definição 1.16. Um Passeio $v_1v_2\dots v_n$, é dito um *caminho* em G , se não houver repetição de vértices e arestas.

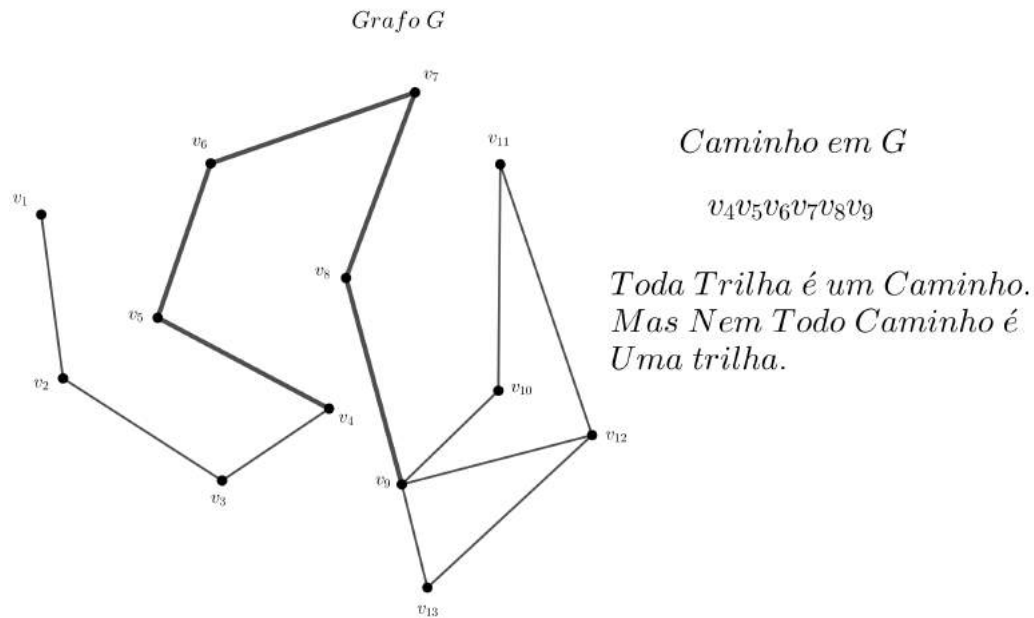


Figura 17 – Caminho em G

Definição 1.17. Um Caminho $v_1v_2\dots v_n$, é dito um *ciclo* em G , se seus vértices inicial e final sejam coincidentes.

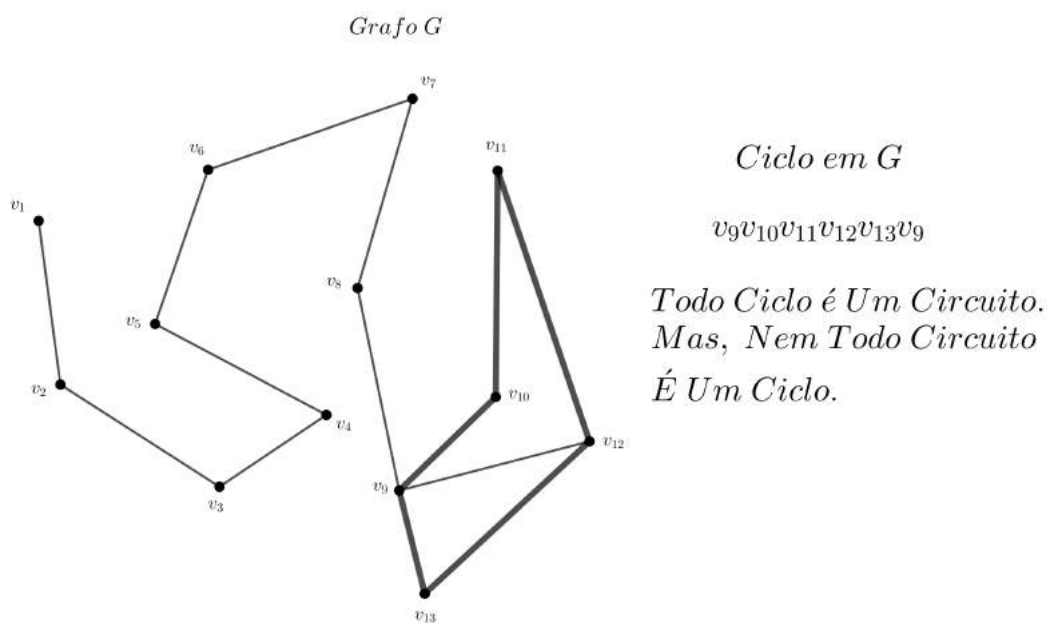
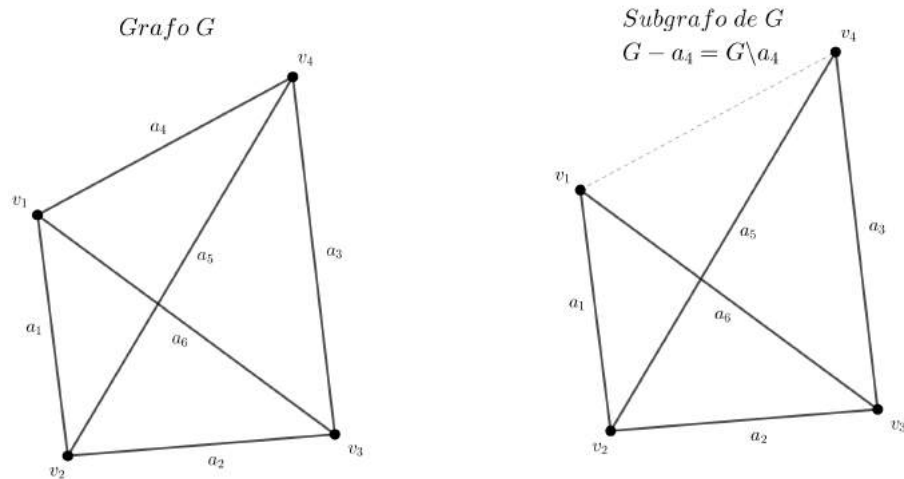


Figura 18 – Ciclo

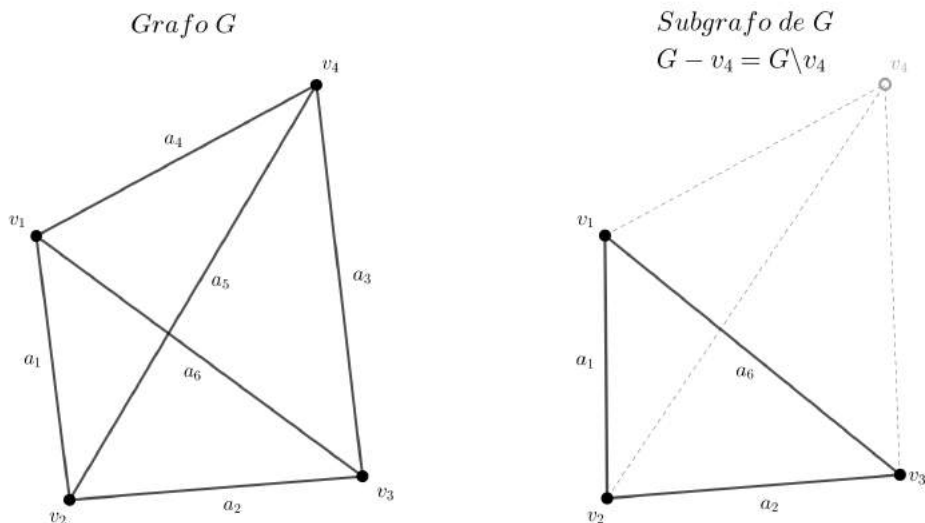
1.6 Operações com Grafos

Definição 1.18. Seja um grafo $G = (V, A)$, chamamos de *deleção* a retirada de vértices ou arestas de G . A deleção de um vértice v , representamos por $G - v$ ou $G \setminus v$. O que implica na retirada de todas as arestas incidentes a v . A deleção de uma aresta $a = v_i v_j$, representada por $G - a$ ou $G \setminus a$ implica na quebra da adjacência dos vértices v_i e v_j em G .



Deleção da aresta a_4 os vértices incidentes v_4 e v_1 permanecem inalterados.

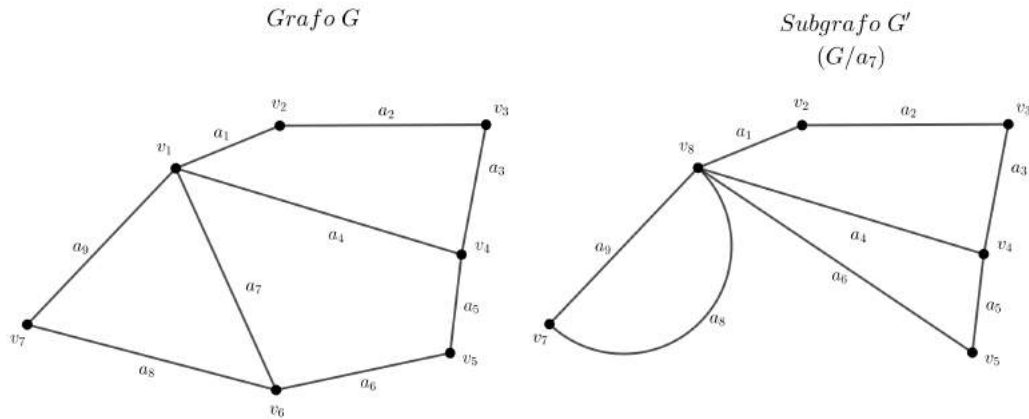
Figura 19 – Deleção da Aresta



Deleção do vértice v_4 as arestas adjacentes a v_4 são deletadas.

Figura 20 – Deleção do Vértice

Definição 1.19. Seja um grafo $G = (V, A)$, chamamos de *contração da aresta*, a retirada de uma aresta $a = v_i v_j$ de G , unindo suas duas extremidades v_i e v_j de tal forma que o vértice resultante seja incidente às arestas originalmente incidentes a v_i e v_j . Essa contração é representada por G/a .



Contraindo a_7 de G , seus vértices incidentes v_1 e v_6 foram unidos. Formando o vértice v_8 de G' .

Figura 21 – Contração da Aresta

2 Conexidade

2.1 Grafos Conexos e Desconexos

Definição 2.1. Um grafo não vazio $G = (V, A)$ é dito *conexo* se para qualquer dois vértices $v_i, v_j \in V(G)$ existir um caminho que os une. Dois vértices $v_i, v_j \in V(G)$ são ditos *conectados* se existir um caminho entre v_i e v_j em G .

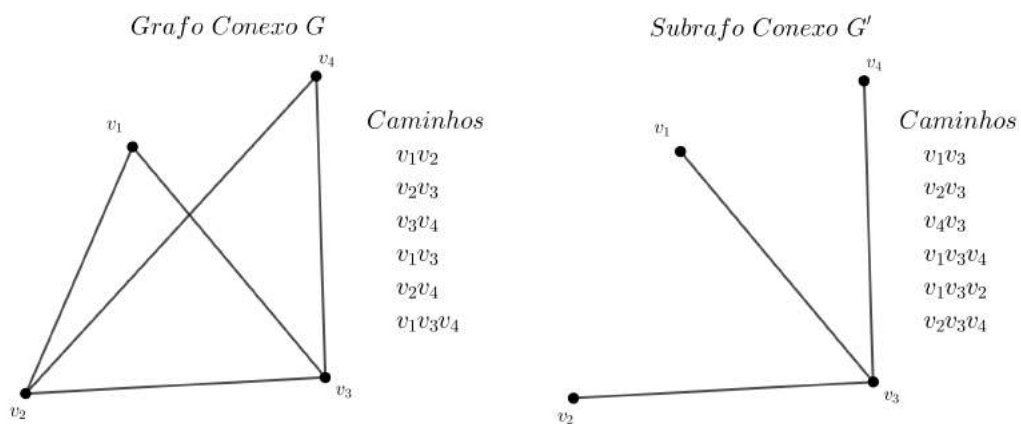
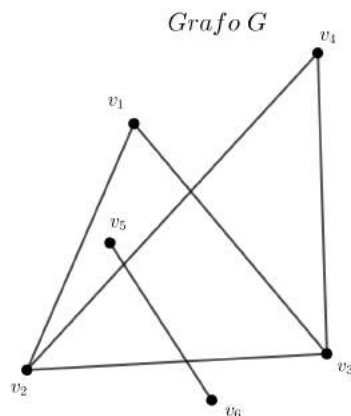


Figura 22 – Grafo Conexos



O Grafo G é desconexo, pois não existe, por exemplo um caminho que une v_5 a v_4 .

Figura 23 – Grafo Desconexo

Definição 2.2. Seja $G = (V, A)$ um grafo conexo, seu subgrafo G' é dito uma *componente conexa* de G , se não estiver estritamente contido em outros subgrafos de G .

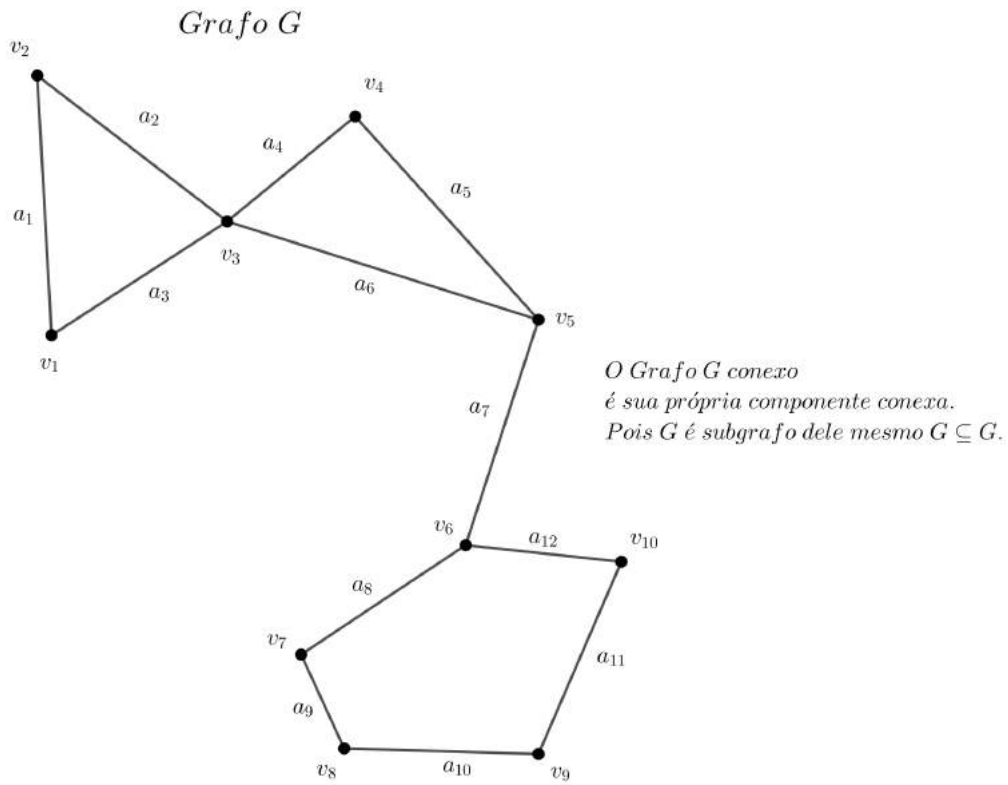


Figura 24 – Componente Conexa de G Conexa

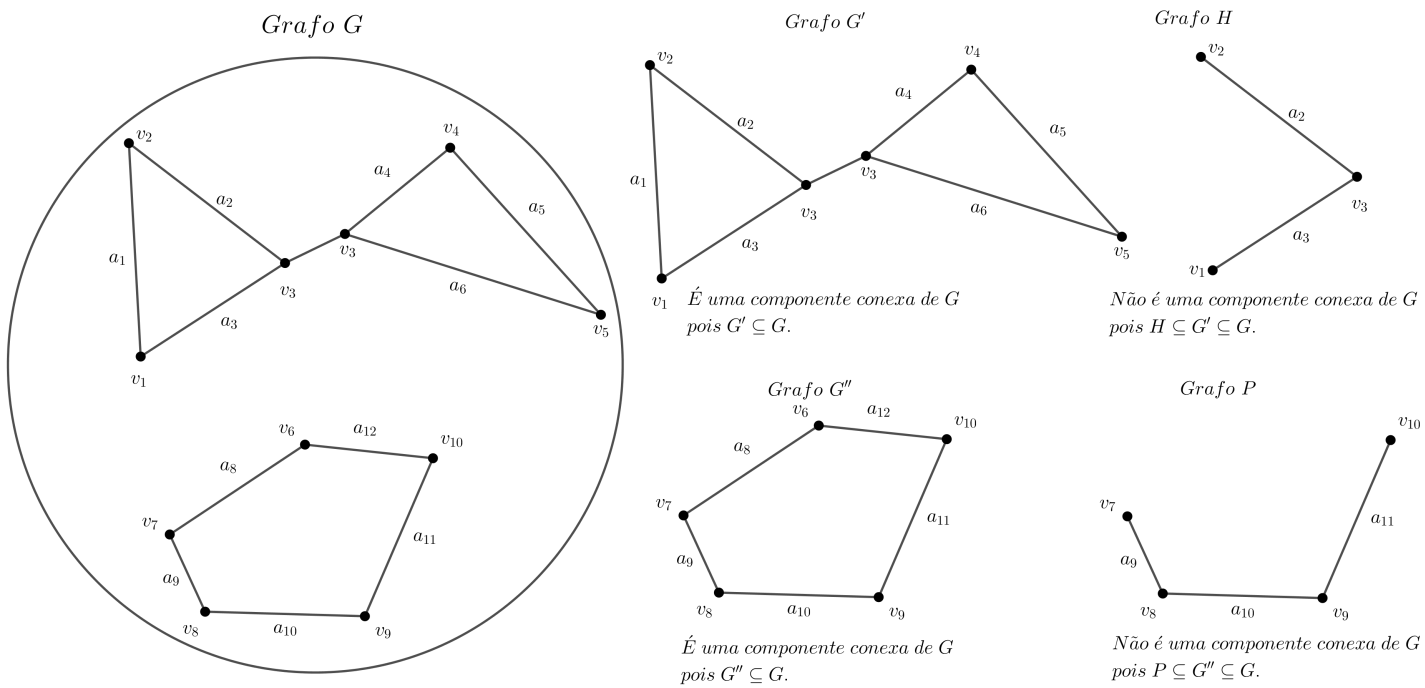


Figura 25 – Componente Conexa de G Desconexo

2.2 Árvores e Florestas

Definição 2.3. Um grafo $G = (V, A)$ é dito *floresta*, se não contiver ciclos.

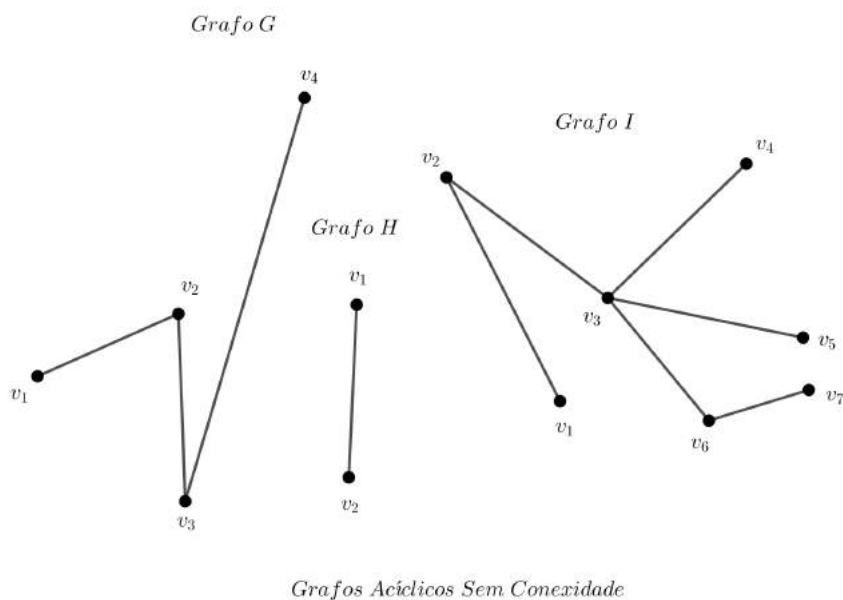


Figura 26 – Floresta

Definição 2.4. Um grafo $G = (V, A)$ é dito *árvore*, se for uma floresta conexa.

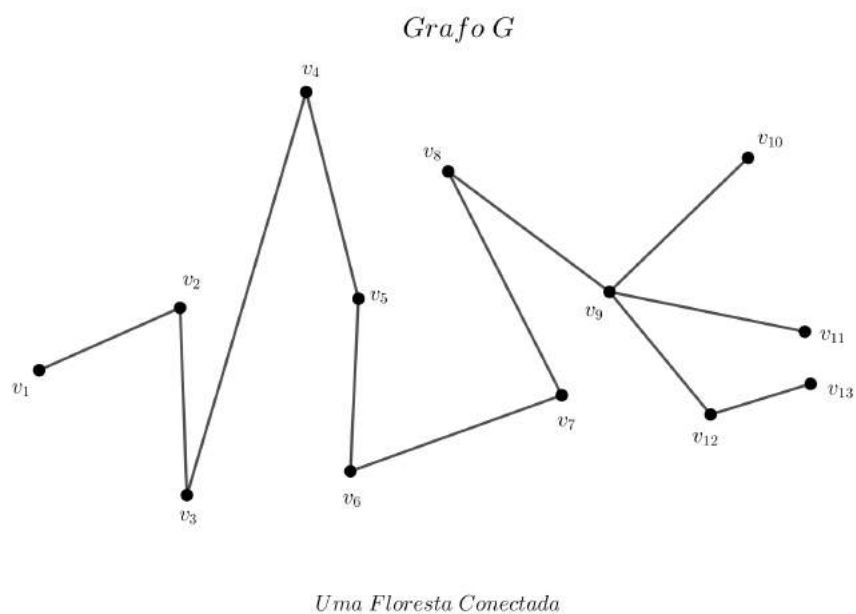
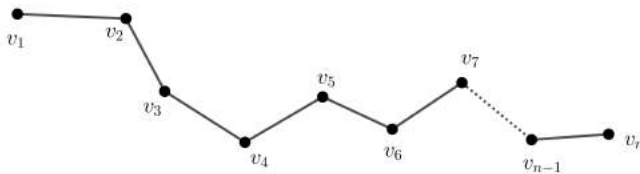


Figura 27 – Árvore

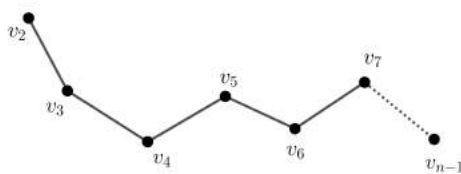
Observação 2.5. Os vértices de grau 1 em uma árvore são suas folhas. Cada árvore não trivial tem pelo menos duas folhas, por exemplo, as extremidades de um caminho mais longo. Este fato muitas vezes auxilia em provas de indução sobre caminhos. Se removermos uma folha de uma árvore, o que resta é ainda uma árvore.

Árvore G



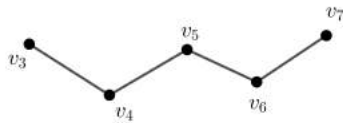
Seja $v_1v_2\dots v_n$, o caminho mais longo onde seus extremos $v_1 \neq v_n$, tem grau 1 $d(v_1) = d(v_n) = 1$

Árvore G'



Com a deleção dos vértices v_1 e v_n a nova Árvore G' Tem como caminho mais longo $v_2v_3v_4\dots v_{n-1}$ onde seus extremos $v_2 \neq v_{n-1}$, tem grau 1 $d(v_2) = d(v_{n-1}) = 1$

Árvore G''



Com a deleção dos vértices v_2 e v_{n-1} a nova Árvore G'' Tem como caminho mais longo $v_3v_4\dots v_7$ onde seus extremos $v_3 \neq v_7$, tem grau 1 $d(v_3) = d(v_7) = 1$

Figura 28 – Folhas de uma Árvore

2.3 Propriedades Sobre Árvores

Nessa seção vamos utilizar as notas de aulas do professor Gagnon[8] ilustrando cada uma das demonstrações. Antes de iniciar, vamos mostrar um lema que será útil nas demonstrações.

Lema 2.6. *Seja C_1 e C_2 dois caminhos distintos, entre dois vértices v_i e v_j , de um grafo G . A união $C_1 \cup C_2$ contém no mínimo um circuito.*

Demonstração. Considere dois caminhos distintos C_1 e C_2 que iniciam em v_i e terminam em v_j , existe no mínimo um vértice onde eles se separam e um vértice onde eles se juntam. Seja v_p o primeiro vértice onde eles se separam e v_q o último vértice onde eles se juntam. A partir de v_p até v_q , podemos formar um circuito, saindo de v_p , indo até v_q por C_1 , e voltar a v_p por C_2 . \square

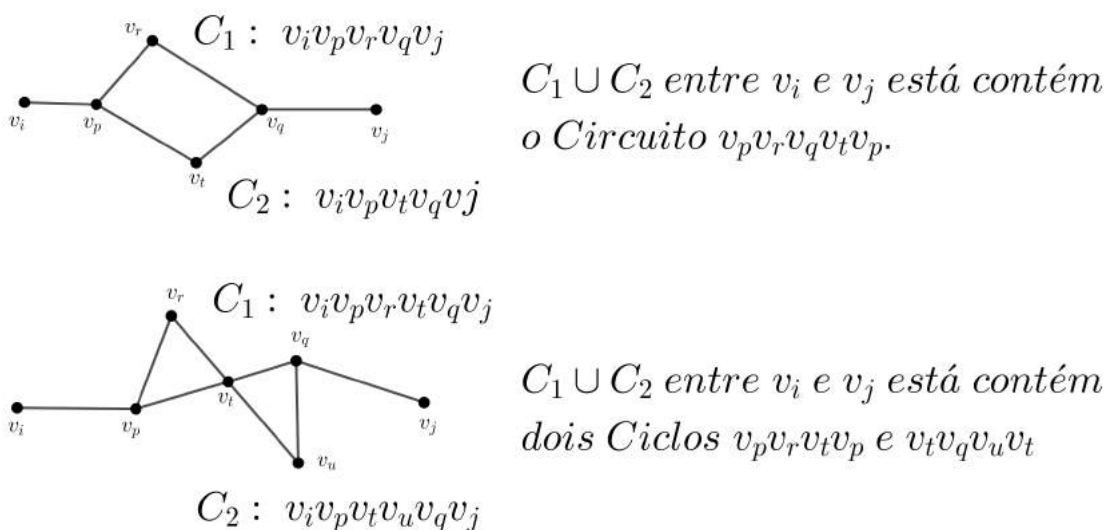


Figura 29 – União de Dois Caminhos

Teorema 2.7. *Se $G = (V, A)$ é uma árvore, então existe exatamente um caminho entre qualquer par de vértices distintos.*

Demonstração. Toda árvore é um grafo conexo, e por definição existe apenas um caminho entre cada par de vértices. Considere por absurdo, que existem dois caminhos distintos entre dois vértices v_i e v_j de uma árvore. Pelo lema 2.6, existe um circuito entre v_i e v_j , o que contraria a definição de árvore. \square

Nos Grafos G e H existem dois caminhos distintos entre v_i e v_j , o que contraria a definição de Árvore.

No entanto o subgrafo $G' = G \setminus v_r$, é uma árvore. Pois entre v_i e v_j existe apenas um Caminho.

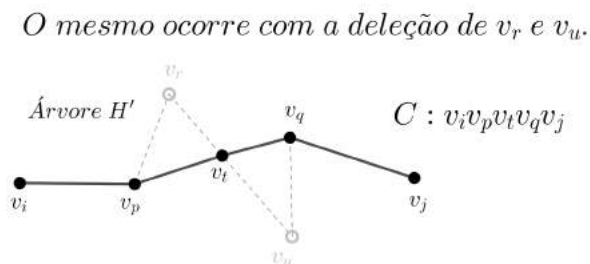
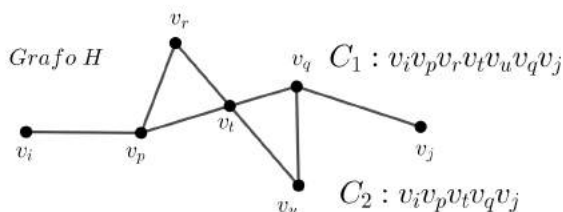
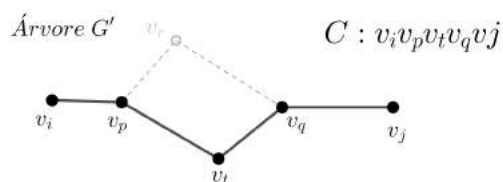
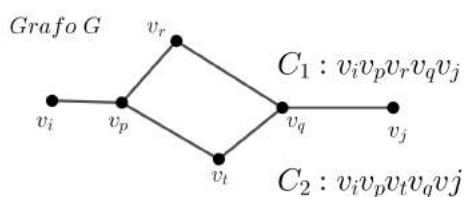


Figura 30 – União de Dois Caminhos

Teorema 2.8. *Se $G = (V, A)$ é uma árvore, então possui $|V(G)| - 1$ arestas.*

Demonstração. A demonstração é por indução em $|V(G)|$. O caso base: para $|V(G)| = 1$, $n(a) = |V(G)| - 1 \implies n(a) = 1 - 1 = 0$. É trivial. Consideramos agora uma árvore G de $|V(G)|$ vértices. Seja a uma aresta que liga dois vértices v_i e v_j . Segundo o teorema 2.7, o único caminho entre v_i e v_j é a aresta a . Portanto, $G \setminus a$ é desconexo. Seja G' e G'' as duas componentes conexas do grafo $G \setminus a$. Essas componentes contêm, respectivamente, $|V(G')|$ e $|V(G'')|$ vértices, onde $|V(G')| + |V(G'')| = |V(G)|$. Necessariamente, se G é uma árvore, G' e G'' são também árvores. Ambos G' e G'' têm menos vértices que G , então por indução G' e G'' tem $|V(G')| - 1$ e $|V(G'')| - 1$ arestas. Portanto, o número de arestas no grafo G , que é composto de G' e G'' mais a aresta $v_i v_j$, ou seja $[|V(G')| - 1] + [|V(G'')| - 1] + 1 \implies |V(G')| + |V(G'')| - 1 - 1 + 1 \implies |V(G')| + |V(G'')| - 1 \implies |V(G)| - 1$. \square

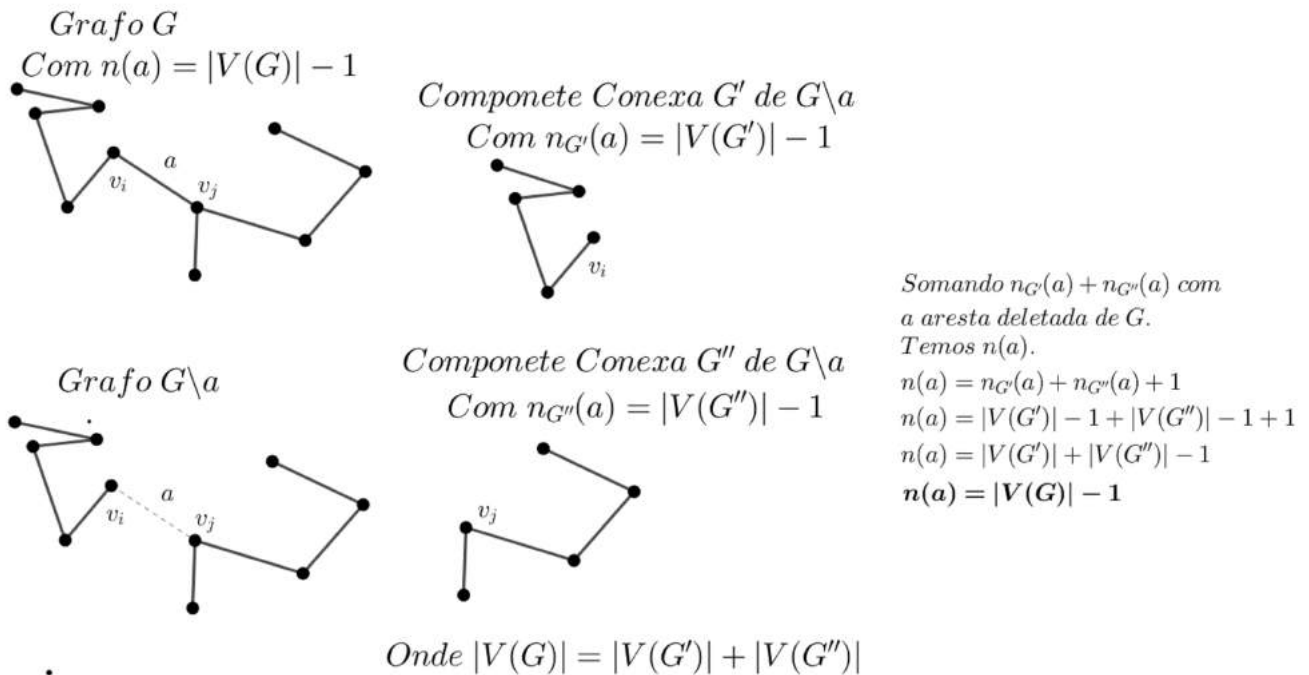


Figura 31 – Componentes Conexas

Teorema 2.9. *O grafo $G = (V, A)$ é uma árvore, se e somente se for minimal – aresta – conexo.*

Demonstração. Implicação: Não existe circuito em uma árvore. Seja v_i e v_j dois vértices distintos. Tirando o caminho liga esses dois vértices, o grafo necessariamente se torna desconexo, pois não existe caminho alternativo entre esses dois vértices. Se tivesse, esse caminho junto com a aresta retirada formaria um circuito, o que é impossível por definição. Reciprocamente: Um grafo minimamente conexo não pode ter circuito, pois nesse caso se tirarmos uma aresta do circuito, o grafo continua conexo. Portanto, esse grafo é uma árvore. \square

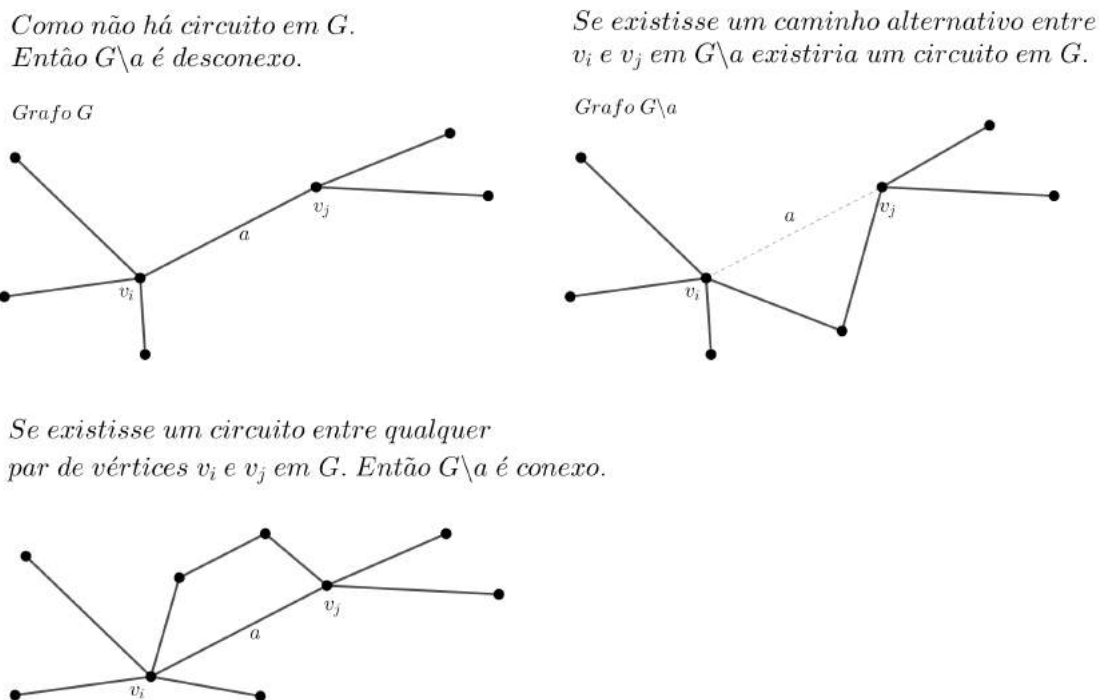


Figura 32 – Grafo Minimal-Aresta-Conexo

Teorema 2.10. *Um grafo $G = (V, A)$ conexo é uma árvore se e somente se o acréscimo de uma aresta entre quaisquer dois vértices cria exatamente um circuito.*

Demonstração. Se acrescentamos uma aresta entre quaisquer dois vértices de uma árvore, o resultado é um grafo que contém exatamente um circuito. Isso porque já existe um caminho entre esse dois vértices. A nova aresta acrescenta mais um caminho, criando assim um circuito. Suponhamos agora que o acréscimo de uma aresta em um grafo produz exatamente um circuito. Isso significa que antes de acrescentar essa aresta, digamos entre v_i e v_j , existia um caminho entre v_i e v_j . Logo esse grafo era uma árvore. \square

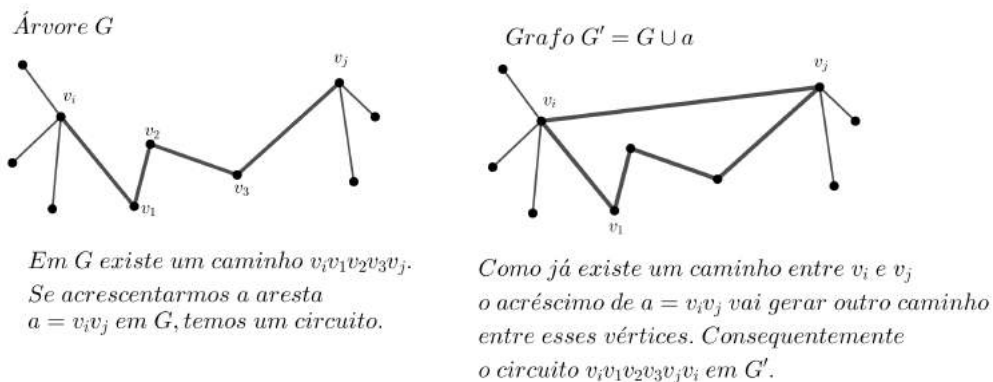


Figura 33 – Acréscimo de Aresta

2.4 Grafo k-Aresta-Conexo

Definição 2.11. O grafo $G = (V, A)$, conexo é dito *k-aresta-conexo*, se seu subgrafo $G' = (V', A \setminus H)$ for conexo para todo $H \subseteq A$ onde $|H| < k$, para $k \in \mathbb{N}$ e $k > 1$.

O Grafo G é 3 – Aresta – Conexo, pois realizando a deleção de uma aresta distinta por vez Depois de um par distinto por vez, o grafo continua conexo.

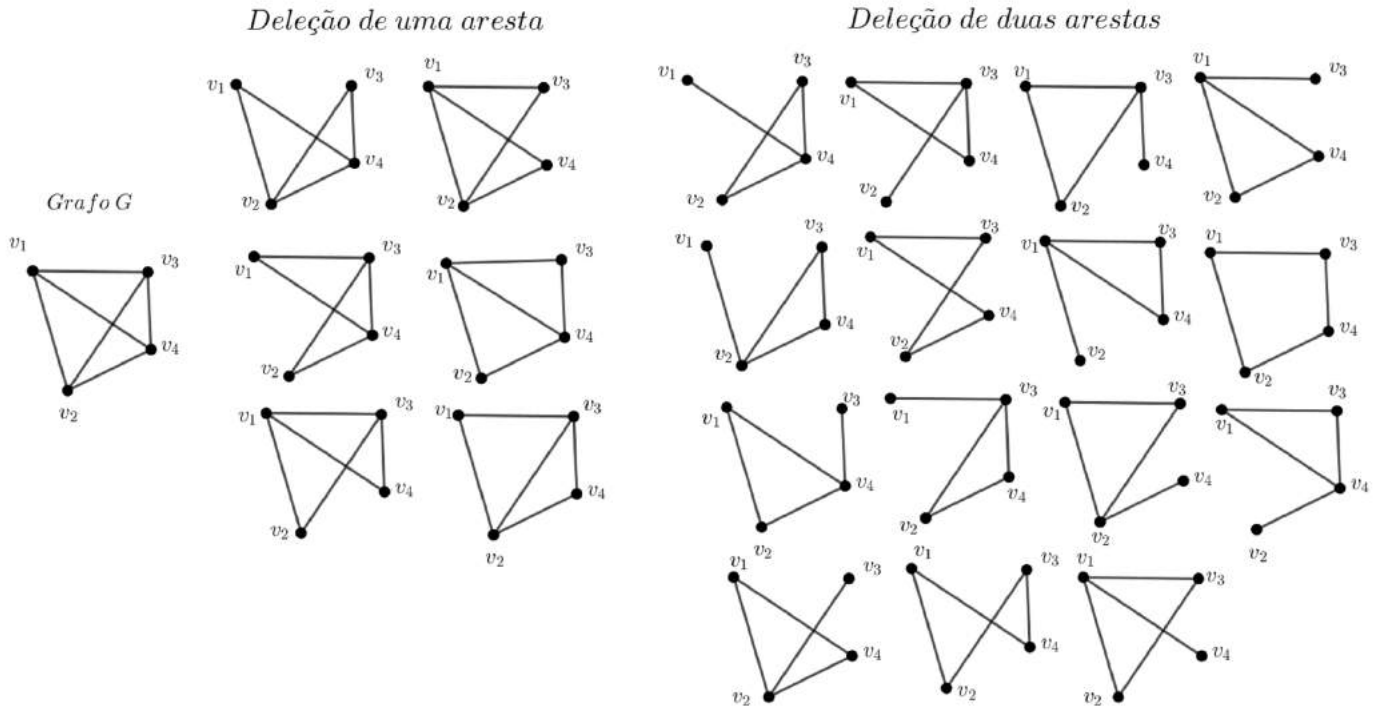


Figura 34 – Grafo 3-Aresta-Conexo

Definição 2.12. O grafo $G = (V, A)$, conexo é dito *minimal – aresta – conexo*, se para todo $a \in A$, tal que seu subgrafo $G' = (V', A \setminus a)$ for desconexo. Toda árvore é um grafo *minimal – aresta – conexo*.

Os próximos capítulos desse trabalho são diretamente ligados ao tipo de grafo que vamos estudar a seguir, tendo ele uma grande relevância em nossa pesquisa.

2.5 Grafo Minimal-2-Aresta-Conexo

Definição 2.13. O grafo $G = (V, A)$, conexo é dito *minimal 2 – aresta – conexo*, se o subgrafo $G' = (V, A \setminus a)$ não for 2 – aresta – conexo. Para $\forall a \in A$.

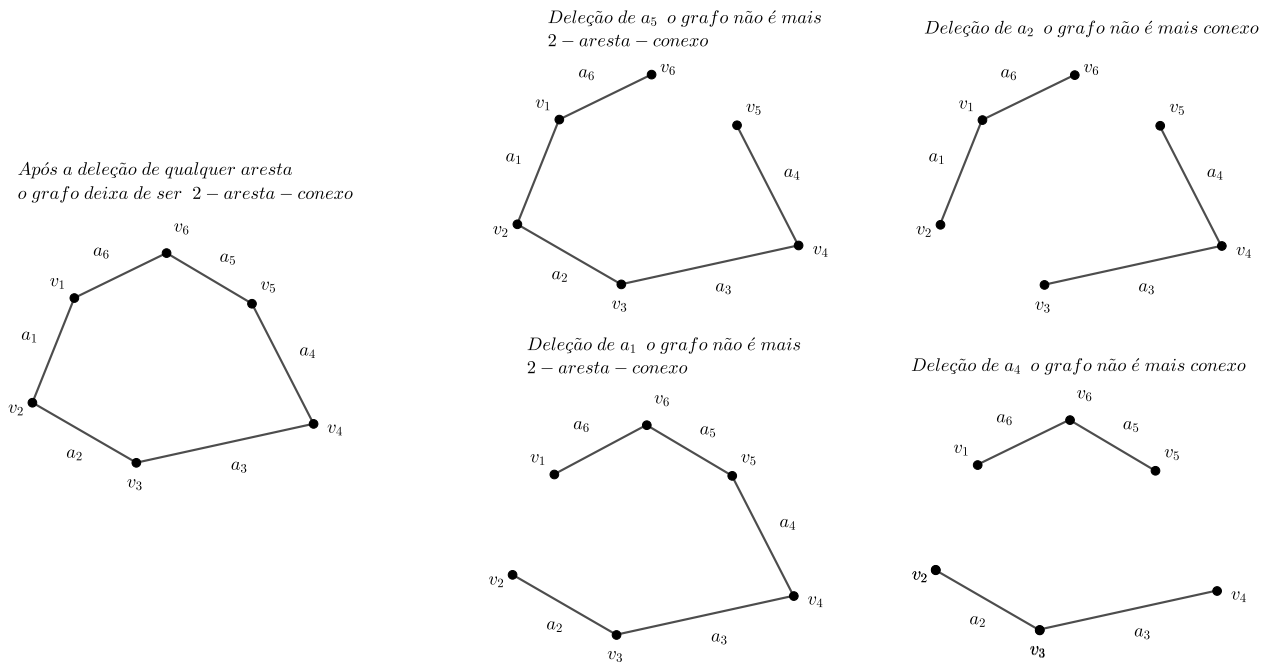
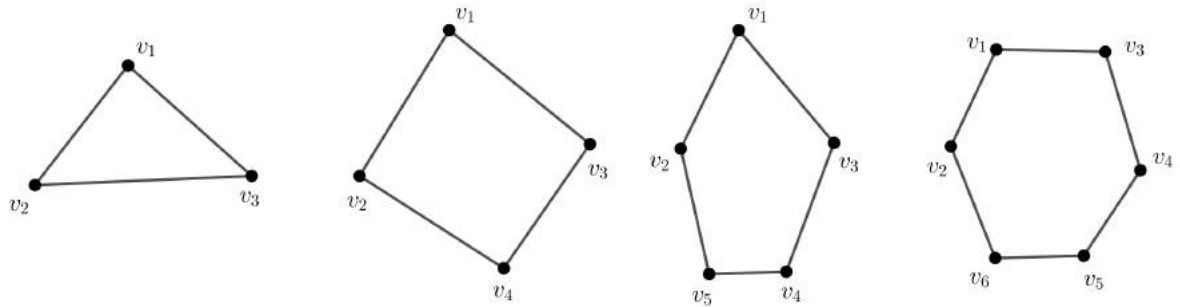


Figura 35 – Grafo minimal 2-aresta-conexo

Observação 2.14. Quando iniciamos os estudos dos grafos minimal 2 – *aresta – conexo*, normalmente o primeiro modelo que imaginamos é um ciclo.



Todos os seus vértices tem grau 2, este é o menor grau para vértices de um grafo minimal 2 – *aresta – conexo*. Logo o ciclo é o modelo mais econômico possível em relação ao número de conexões.

Teorema 2.15. *Todo vértice de um grafo minimal 2 – aresta – conexo, tem grau maior ou igual a 2.*

Demonstração. Suponha por contradição que num grafo minimal 2 – *aresta – conexo*, exista um vértice de grau 0, então ou G é desconexo ou é K_1 . Suponha agora, também por contradição, que exista nesse grafo um vértice de grau 1, com a deleção da sua única aresta incidente ele já fica desconexo. Logo seus vértices tem grau maior ou igual a 2. \square

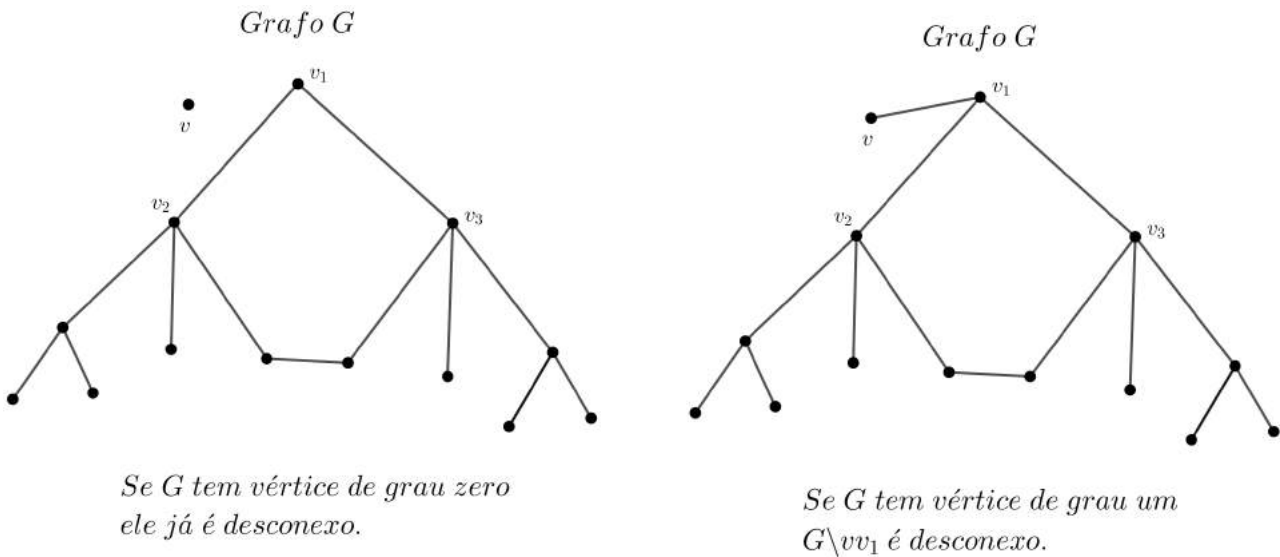


Figura 36 – Grau de um Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo

Observação 2.16. Como vimos na figura 34, num grafo G minimal 2 – aresta – conexo com a deleção de qualquer aresta, seu subgrafo G' não será 2 – aresta – conexo. De fato se deletarmos uma aresta específica de G' , seu subgrafo G'' será desconexo.

*Os Grafos G e H são minimal 2 – aresta – conexo.
Sendo que G tem 4 vértices de grau 2, e 2 vértices
de grau 3. Já H tem todos os vértices de grau 2.*

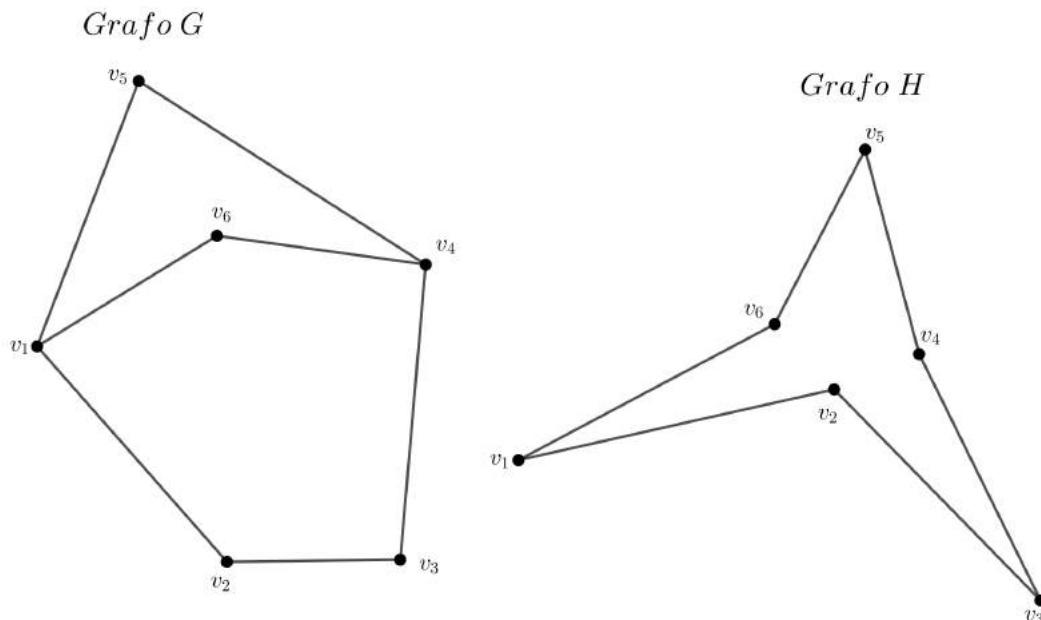


Figura 37 – Dois Tipos de Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo

O grafo H apesar de ser o modelo "mais econômico", para nosso estudo não é interessante, pois todos os vértices tem grau 2, e em nossa modelagem vamos precisar que alguns vértices tenham grau maior que 2, o que ocorre no grafo G . A seguir vamos

enunciar um teorema que nos fornece, a quantidade de vértices de grau k , para um grafo simples, minimal k – aresta – conexo

Teorema 2.17. Segundo W.Mader[4], para um grafo simples, minimal k – aresta – conexo o número de vértices de grau k é dado por:

$$(I) |\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| - 1}{2k + 1} + k + 1, \text{ para } k \geq 2$$

$$(II) |\mu(G)| \leq \frac{|V(G)|}{k + 1} + k, \text{ para } k \geq 5$$

$$(III) |\mu(G)| \leq \frac{2|V(G)|}{k + 1} + k - 2, \text{ para } k \geq 7.$$

Observação 2.18. Com base no teorema 2.17(I) vamos montar o número de vértices de grau 2 para um grafo G minimal 2 – aresta – conexo.

$$|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| - 1}{2k + 1} + k + 1,$$

Para $k = 2$ temos:

$$|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| - 1}{2 \times 2 + 1} + 2 + 1$$

$$|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| - 1}{5} + 3$$

$$|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| + 14}{5}$$

Exemplo 2.19. Seja $G=(V,A)$ um grafo simples e minimal 2 – aresta – conexo, com 5 vértices. Quantos vértices de grau 2 podem ter nesse grafo?

$$|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| + 14}{5}$$

$$|\mu(G)| \geq \frac{5 + 14}{5}$$

$$|\mu(G)| \geq \frac{19}{5}$$

$$|\mu(G)| \geq 3,8$$

$$|\mu(G)| \geq 4$$

Podemos concluir que dos 5 vértices, pelo menos 4 podem ter grau 2, e 1 vértice de grau maior que 2.

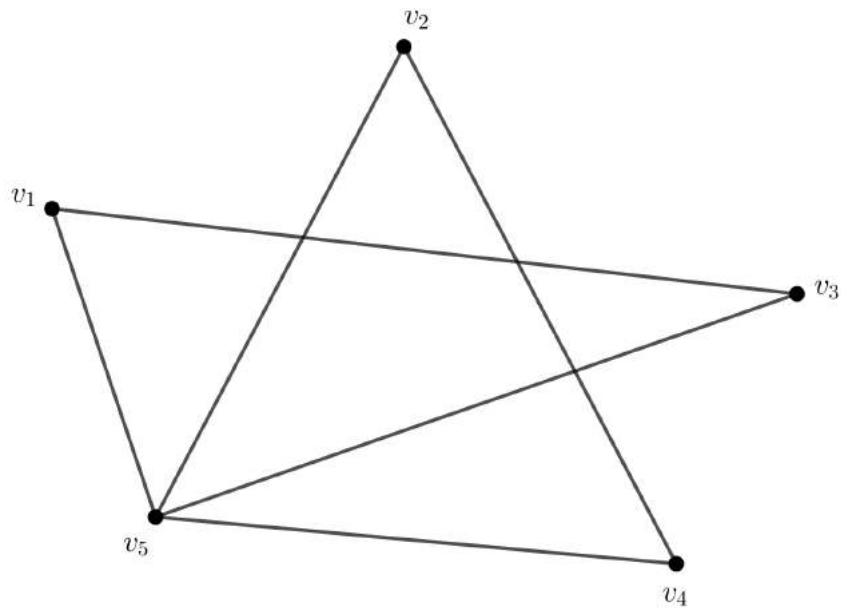


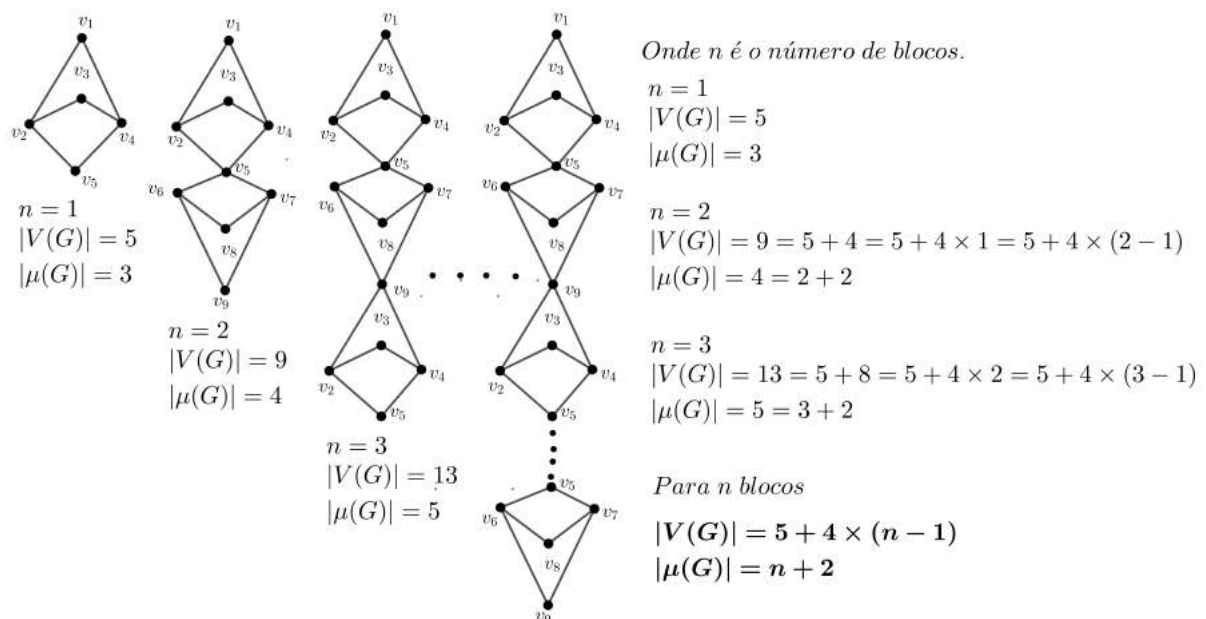
Figura 38 – Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo com a conta de Mader

A fórmula que acabamos de estudar nos fornece um limite inferior de vértices de grau 2 no grafo minimal 2 – *aresta* – *conexo*, no próximo capítulo estudaremos o menor limite inferior de vértices de grau 2 para esse tipo de grafo.

3 Menor Limite Inferior de Vértices de Grau 2 num Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo

Teorema 3.1. Se $G = (V, A)$ é um grafo simples, minimal 2 – aresta – conexo de ordem $|V(G)| \geq 5$, então $|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| + 7}{4}$.

Vamos inicialmente mostrar que $|\mu(G)| = \frac{|V(G)| + 7}{4}$, é o menor limite inferior de vértices de grau 2 em uma série de grafos minimal 2 – aresta – conexo. Para isso iremos montar uma família desse tipo de grafo com essa menor quantidade de vértices de grau 2 e conseqüentemente uma relação de $|V(G)|$ e $|\mu(G)|$ com o número de blocos usado para cada grafo dessa família.



Agora vamos montar $|\mu(G)|$ em função de $|V(G)|$.

Temos que $|V(G)| = 5 + 4n - 4 = 1 + 4n$ e $|\mu(G)| = n + 2$

Multiplicando $|\mu(G)|$ por -4 e somando com a equação $|V(G)|$ temos:

$$-4|\mu(G)| + |V(G)| = -4n - 8 + 1 + 4n$$

$$-4|\mu(G)| + |V(G)| = -7 \Rightarrow$$

$$-4|\mu(G)| = -|V(G)| - 7 \Rightarrow$$

Multiplicando os dois membros por menos 1 temos:

$$4|\mu(G)| - |V(G)| = 7 \Rightarrow$$

$$4|\mu(G)| = |V(G)| + 7 \Rightarrow$$

$$|\mu(G)| = \frac{|V(G)| + 7}{4}.$$

Obtendo assim o menor limite inferior de vértices de grau 2. Por meio de indução tentamos mostrar que para $|V(G)| \geq 5$, temos $|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)|+7}{4}$. Onde no decorrer da demonstração nos deparamos com um caso que compromete a minimalidade do grafo, não interferindo na validade do teorema já demonstrado por Zhu[5], bem como não nos impede de iniciar nossa demonstração mostrando o porquê desse teorema ser válido para $|V(G)| \geq 5$ e a dificuldade encontrada.

Demonstração. Vamos demonstrar por indução em $|V(G)|$.

Caso Base: Provar que para um grafo simples, minimal 2 – *aresta* – *conexo* com $|V(G)| = 5$, terá $|\mu(G)| \geq 3$.

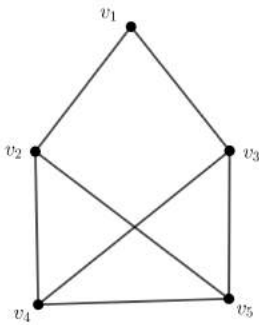
Para $|\mu(G)| = 0$

Como um grafo k – *conexo* pode ser por vértice ou por aresta, então pelo teorema de Halin[7], um grafo minimal 2 – *Aresta* – *Conexo* possui pelo menos um vértice de grau 2. Sendo assim, $|\mu(G)| = 0$ é falso. O que nos leva a mais dois casos, $|\mu(G)| = 1$ e $|\mu(G)| = 2$.

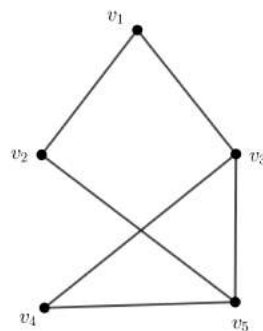
Para $|\mu(G)| = 1$

Seja v_1 o único vértice de grau 2 de G , onde v_2 e v_3 são seus vizinhos. O que implica que seus outros vértices v_4 e v_5 , tem pelo menos grau 3, além de v_2 e v_3 . Vamos considerar os seguintes casos:

$$d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = d(v_5) = 3$$

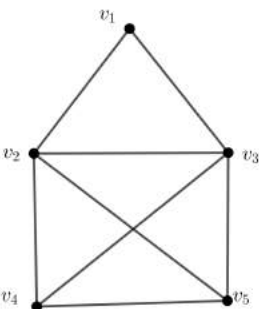


Deleção da aresta v_2v_4 .

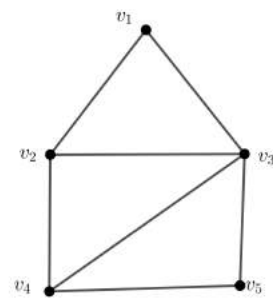


Podemos deletar qualquer aresta de $G \setminus v_2v_3$ que mesmo assim o grafo continua conexo.

$$d(v_2) = d(v_3) = 4 \text{ e } d(v_4) = d(v_5) = 3$$



Deleção da aresta v_2v_5 .



Podemos deletar qualquer aresta $G \setminus v_2v_5$ que mesmo assim o grafo continua conexo.

Logo esses grafos não são minimal 2 – *aresta* – *conexo*, o que contraria a hipótese.

Para $|\mu(G)| = 2$

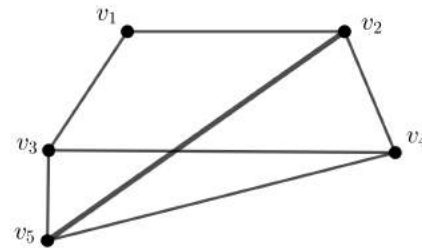
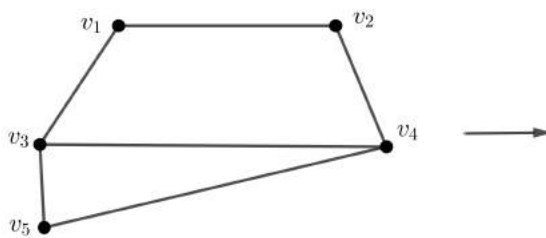
Seja v_1 e v_2 os dois únicos vértices de grau 2 em G , onde v_3 e v_4 são seus vizinhos. Temos 2 casos a considerar: a aresta v_1v_2 pertencendo e não pertencendo a G .

Para $\{v_1v_2\} \in A(G)$

Podemos dividir também em dois casos: seus vizinhos não sendo coincidentes e sendo coincidentes.

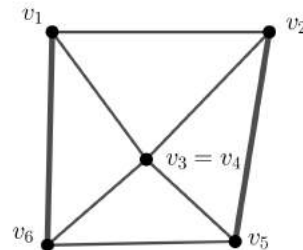
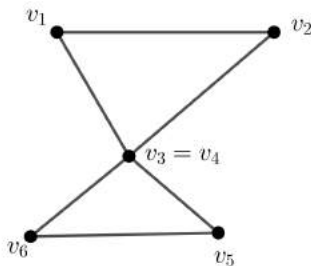
Para $v_3 \neq v_4$

Sabemos que $d(v_3), d(v_4)$ e $d(v_5) \geq 3$



Para $v_3 = v_4$

Sabemos que $d(v_3), d(v_4)$ e $d(v_5) \geq 3$



Para $d(v_5) \geq 3$, precisa ser conectado com v_1 ou v_2 . O que é absurdo pois por hipótese $d(v_1) = d(v_2) = 2$.

Para $d(v_5)$ e $d(v_6) \geq 3$, precisam ser conectados com v_1 ou v_2 . O que é absurdo pois por hipótese $d(v_1) = d(v_2) = 2$.

Para $\{v_1v_2\} \notin A(G)$

Vamos adotar que $N(v_1)$ e $N(v_2)$ são os conjuntos dos vizinhos de v_1 e v_2 .

Caso consigamos montar um grafo minimal 2 – *aresta* – *conexo* onde $|N(v_1) \cap N(v_2)| \leq 2$, fica falso afirmar que $d[N(v_1)], d[N(v_2)] \geq 3$.

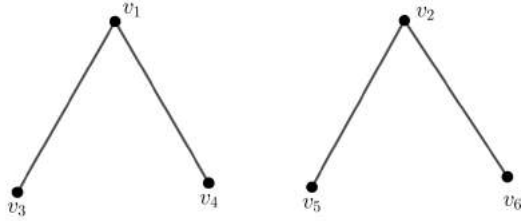
Temos assim três casos a considerar:

$$(I) N(v_1) \cap N(v_2) = \emptyset$$

$$(II) N(v_1) \cap N(v_2) = \{v_3\}$$

$$(II) N(v_1) \cap N(v_2) = \{v_3, v_4\}$$

$$N(v_1) \cap N(v_2) = \emptyset$$



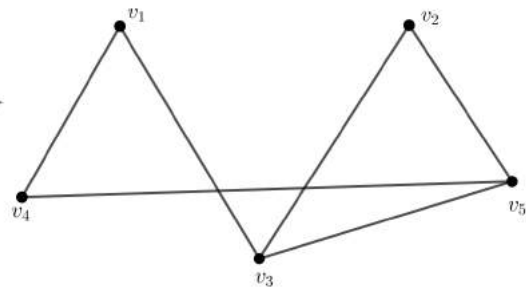
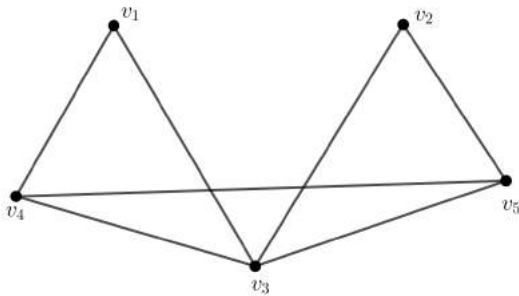
Com $d(v_1) = d(v_2) = 2$, só ocorre se houver 6 vértices. O que é um absurdo pois o grafo G tem 5 vértices.

$$N(v_1) \cap N(v_2) = \{v_3\}$$

Onde $N(v_1) = \{v_3, v_4\}$ e $N(v_2) = \{v_3, v_5\}$

Como $d(v_4), d(v_5) \geq 3$

Mesmo com a deleção da aresta v_3v_4 não há uma aresta que deletada deixe o grafo $G \setminus v_3v_4$ desconexo. Logo ele não é minimal 2 – aresta – conexo o que é um absurdo.

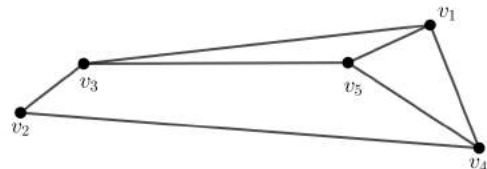
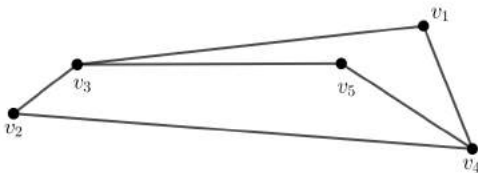


$$N(v_1) \cap N(v_2) = \{v_3, v_4\}$$

Onde $N(v_1) = N(v_2) = \{v_3, v_4\}$

Como $d(v_3), d(v_4), d(v_5) \geq 3$

Para $d(v_5) \geq 3$, precisa ser conectado com v_1 ou v_2 . O que é absurdo pois por hipótese $d(v_1) = d(v_2) = 2$.



Logo podemos concluir que para $|V(G)| = 5, |\mu(G)| \geq 3$.

Hipótese:

Vamos supor que esse resultado é válido para grafos minimal 2 – aresta – conexo, com menos de $|V(G)|$ vértices e provar que o resultado é válido, nas mesmas hipóteses, para grafos com $|V(G)|$ vértices.

Demonstração:

Por Halin[7], existe um vértice v_1 de grau 2 visto que o grafo G é minimal 2 – aresta – conexo e vamos considerar v_2 e v_3 seus vizinhos. Onde temos dois casos a analisar:

Para $\{v_2v_3\} \notin A(G)$

Considere o grafo $G' = [G \setminus v_1] \cup \{v_2v_3\}$ com $|V(G')| \geq 6$. Após a deleção de v_1 , vértice de grau 2 em G , foi acrescentada a aresta v_2v_3 . Deixando os vértices v_2 e v_3 com o mesmo grau de antes da deleção de v_1 . Como todo o restante dos vértices do grafo G permaneceram os mesmos. Sendo assim $|V(G')| = |V(G)| - 1$ e $|\mu(G')| = |\mu(G)| - 1$.

Então podemos afirmar, por hipótese de indução, que $|\mu(G')| \geq \frac{|V(G')| + 7}{4}$.

Substituindo $|\mu(G')|$ e $|V(G')|$ temos:

$$|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| - 1 + 7}{4} + 1 \Rightarrow$$

$$|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| + 6}{4} + 1 \Rightarrow$$

$$|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| + 10}{4} > \frac{|V(G)| + 7}{4}.$$

Confirmando nossa hipótese. Vamos agora provar que G' é simples e minimal 2 – aresta – conexo.

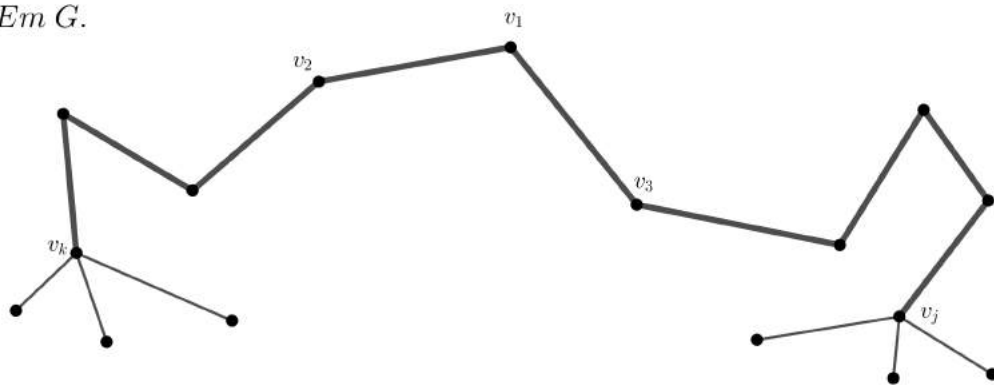
G' é Simples: Por hipótese G é um grafo simples, mesmo antes da deleção de v_1 não havia arestas incidente entre v_2 e v_3 , então o acréscimo de v_2v_3 não acarretará em arestas paralelas em G' , como o restante do grafo G permanece inalterado, G' também vai ser é um grafo simples.

G' é Conexo: Sejam v_k e v_j vértices quaisquer de G , vamos mostrar que existe um caminho em G' ligando v_k e v_j . Como v_k e v_j são vértices de G , que por hipótese é conexo, então existe um caminho em G ligando v_k e v_j . Se esse caminho não envolve o vértice v_1 , então ele conectará v_k e v_j em G' .

Se o caminho envolve v_1 , significa que envolverá seus vizinhos v_2 e v_3 em G .

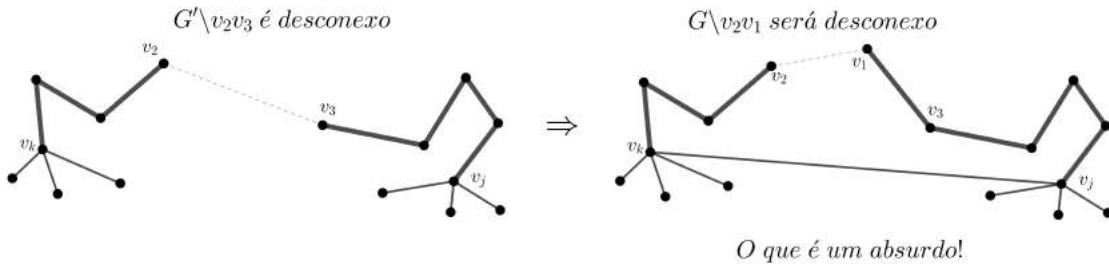
$$C = v_k \dots v_2 v_1 v_3 \dots v_j \text{ ou } C = v_k \dots v_3 v_1 v_2 \dots v_j$$

Em G .

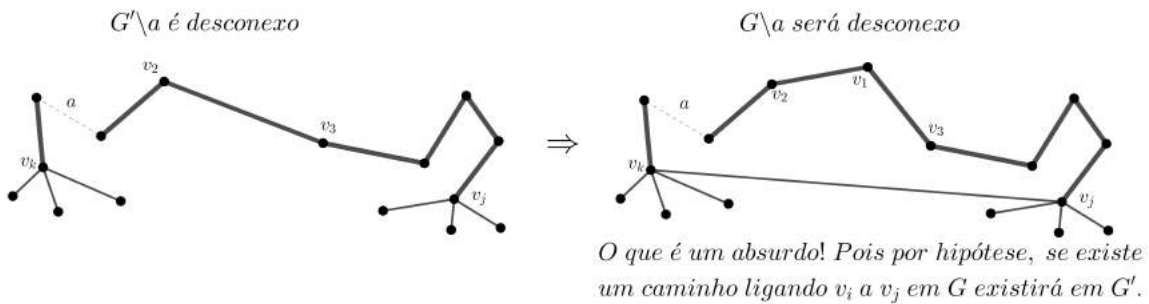


Caso isso aconteça teremos o caminho $C' = v_k \dots v_2 v_3 \dots v_j$ em G' ligando v_k e v_j . O que prova que G' é conexo.

G' é 2-Conexo: Sendo G' 2 – conexo, vamos provar que com a deleção de qualquer aresta de G' o grafo continua conexo. Suponha por contradição que $G' \setminus v_2 v_3$ é desconexo, então $G' \setminus v_2 v_1$ será desconexo.

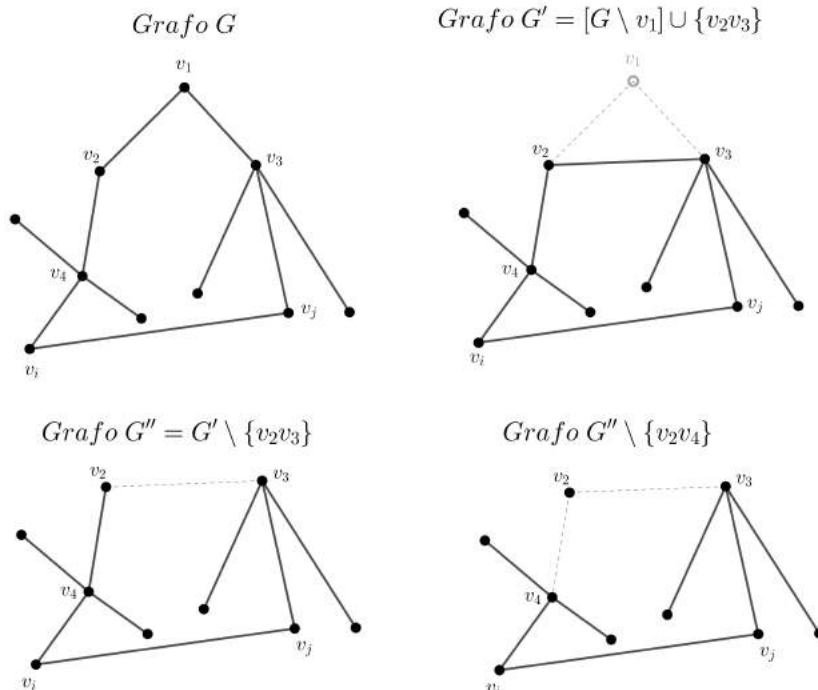


Tome uma aresta $a \neq v_2v_3$ em G' , o que implica que a é aresta de G . Supondo, também por contradição, que vão existir vértices v_j e v_k em que não há caminho em $G' \setminus a$ ligando eles, também não haverá em $G \setminus a$ o que é um absurdo.

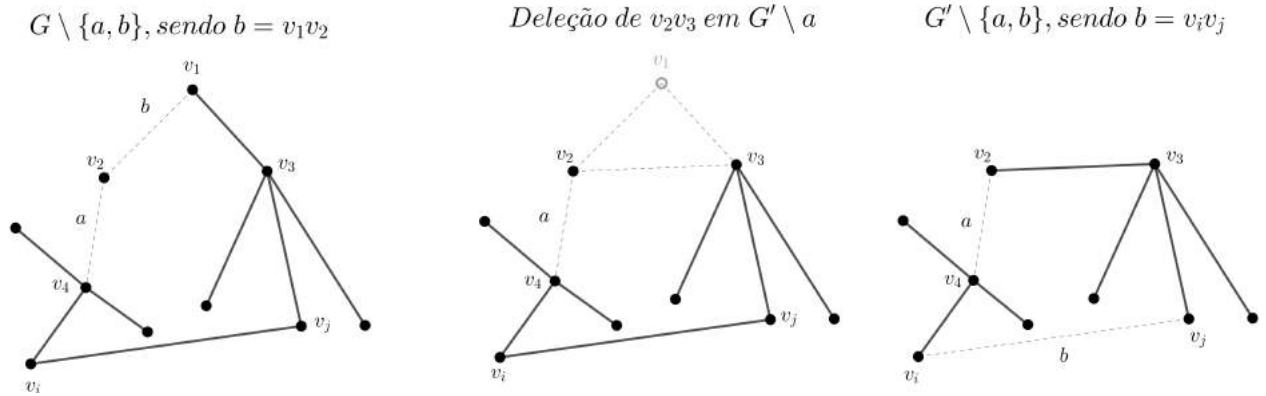


O que prova que $G' \setminus a$ é conexo.

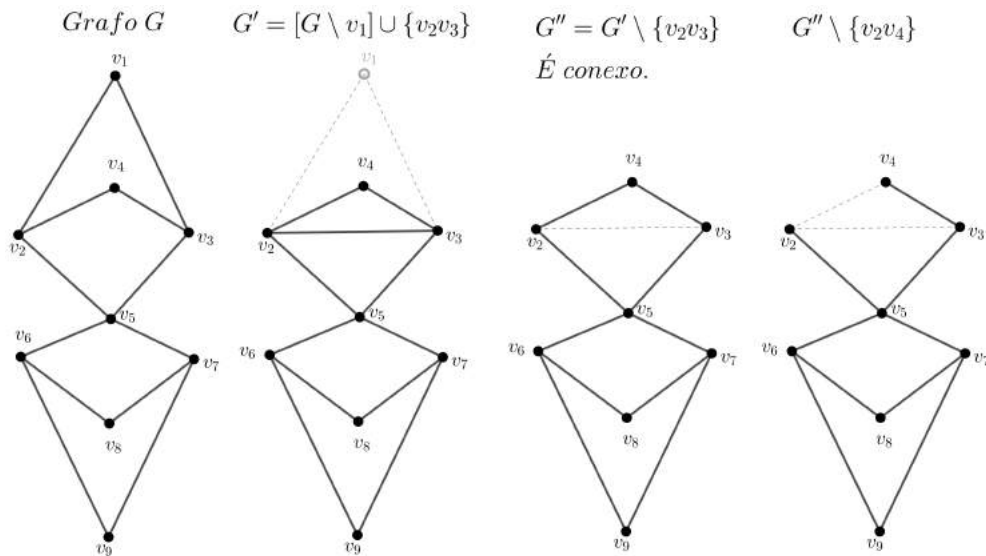
G' é **Minimal**: Sejam v_2 e v_3 os vértices incidentes de v_1 . Vamos supor que $d_G(v_2) = 2$. Já analisamos que v_2 e v_3 vão permanecer com o mesmo grau em G' , logo $d_{G'}(v_2) = 2$. Iniciaremos com a deleção de v_2v_3 . Bastando deletar a outra aresta incidente em v_2 que o G' fica desconexo.



Agora vamos tratar para uma aresta qualquer $a \neq v_2v_3$, onde a é uma aresta de G . Em $G \setminus a$ deve existir uma aresta b que torna o grafo $G \setminus \{a, b\}$ desconexo. Se b for v_1v_2 ou v_1v_3 ao deletarmos v_2v_3 em $G' \setminus a$ desconectariamos o grafo. Se a aresta b não for v_1v_2 nem v_2v_3 essa aresta em $G' \setminus a$ já desconectaria.



Caso isso não aconteça G' não é minimal. Nossa dificuldade apareceu quando nos deparamos com essa situação.



O que nos mostra que G' Não é minimal.

Poderíamos considerar o grafo $G'' = G \setminus v_2v_3$, que é minimal 2 – aresta – conexo, o problema é que ele tem um vértice de grau 2 a mais que em G , e o uso da hipótese de indução para G' não implicaria no resultado para G .

$$|\mu(G'')| \geq \frac{|V(G'')| + 7}{4}.$$

Substituindo $|\mu(G'')| = |\mu(G)| + 1$ e $|V(G'')| = |V(G)| - 1$ temos:

$$|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| - 1 + 7}{4} - 1 \Rightarrow$$

$$|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| + 6}{4} - 1 \Rightarrow$$

$$|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| + 2}{4} < \frac{|V(G)| + 7}{4}.$$

Contrariando assim nossa hipótese.

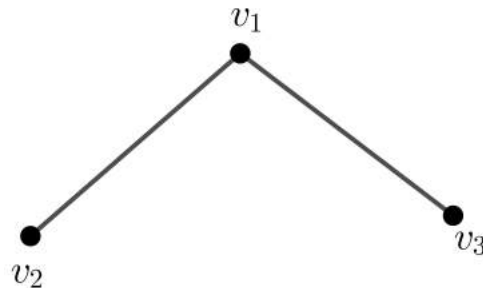
Observação 3.2. Agora para o caso em que $d(v_2)$ e $d(v_3)$ são maiores ou iguais a 4, não existiria o acréscimo de vértices de grau 2 e o resultado seria válido para as hipóteses.

Para $\{v_2v_3\} \in A(G)$

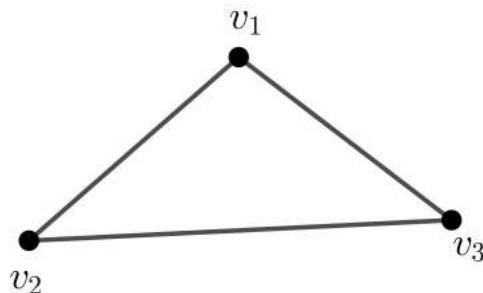
Estamos trabalhando nesse caso, que se divide em outros sub-casos e no problema que encontramos na minimalidade. Essa conclusão bem como a minimalidade será tema possível artigo ou até mesmos um tópico para outra dissertação.

Lema 3.3. *Um grafo simples $G = (V, A)$, minimal 2 – aresta – conexo só vai possuir vértices de grau maior que 2 se tiver pelo menos 5 vértices. Para os casos em que $|V(G)| = 3$ ou $|V(G)| = 4$ teremos um circuito.*

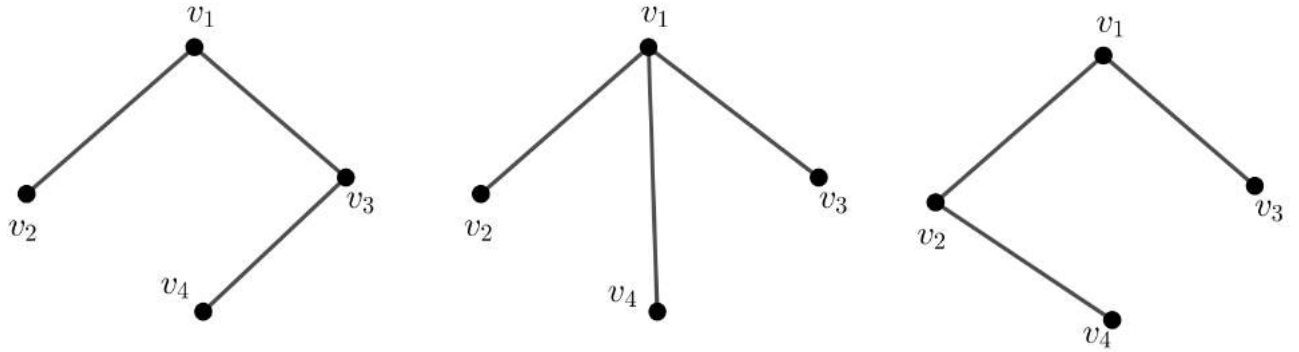
Inicialmente vamos analisar para $|V(G)| = 3$. Sejam v_1, v_2, v_3 os três vértices de G . Com $d(v_1) \geq 2$, obrigatoriamente v_1 conecta v_2 e v_1 conecta v_3 donde temos:



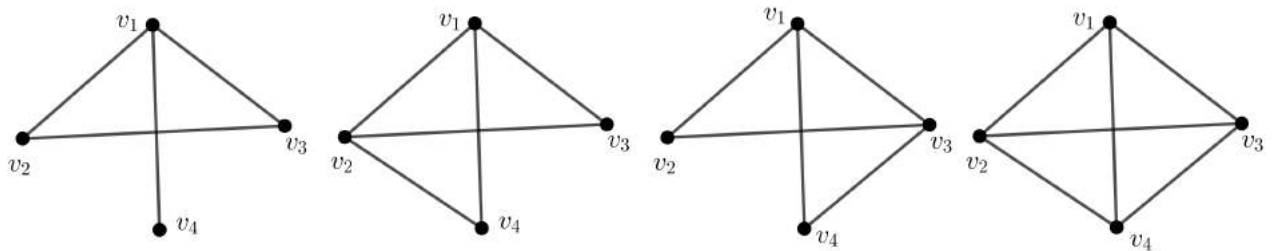
Agora com $d(v_1)$ e $d(v_2) \geq 2$, e não podendo ter arestas em paralelo, obriga v_2 a ligar com v_3 tendo assim:



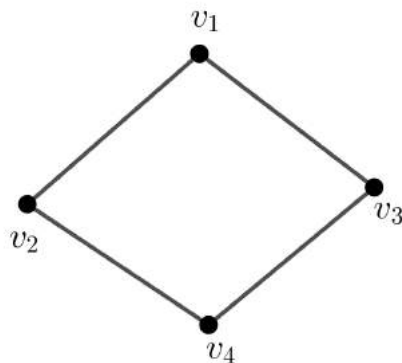
Vamos analisar agora para $|V(G)| = 4$. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 os quatro vértices de G . Com $d(v_1) \geq 2$, considere que v_2 e v_3 são os vértices incidentes a v_1 com v_4 podendo se conectar a qualquer um dos três vértices das seguintes formas:



Considere agora que $d(v_1), d(v_2), d(v_3) \geq 2$ como o grafo é simples não temos arestas paralelas. Logo podemos conectar v_4 a qualquer um dos três vértices da seguinte forma:



Por fim, considere que $d(v_1), d(v_2), d(v_3) = 2$, para que isso ocorra, não deve existir a aresta v_2v_3 em G , e v_4 incide apenas em v_2 e v_3 .



O que implica que em um grafo minimal 2 – aresta – conexo só a partir de $|V(G)| = 5$ temos vértices de grau maior que 2. Antes temos apenas ciclos. \square

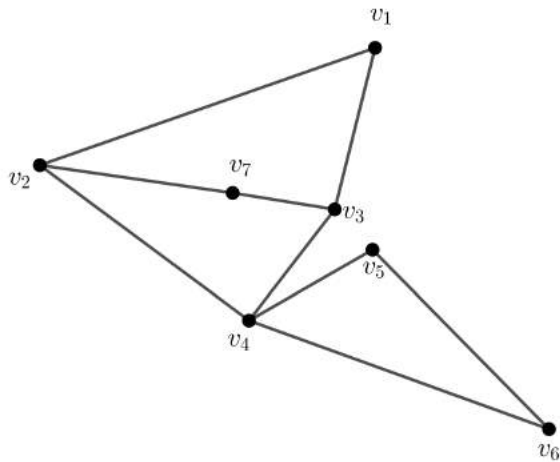
Observação 3.4. Agora vamos fazer uma comparação entre os teoremas para vértices de grau 2 de Zhu[5] e de Mader[4]. Iniciaremos a comparação montando dois grafos minimal 2 – aresta – conexo, com 7 vértices usando as duas cotas.

$$\text{Para Zhu: } |\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| + 7}{4}, \text{ temos } |\mu(G)| \geq 3, 5 \implies |\mu(G)| \geq 4$$

$$\text{Para Mader: } |\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| + 14}{5}, \text{ temos } |\mu(G)| \geq 4, 2 \implies |\mu(G)| \geq 5$$

Percebemos que, para $|V(G)| = 7$, a menor cota é a de Zhu[5].

Para $|\mu(G)| = 4$, temos :



Para $|\mu(G)| = 5$, temos :

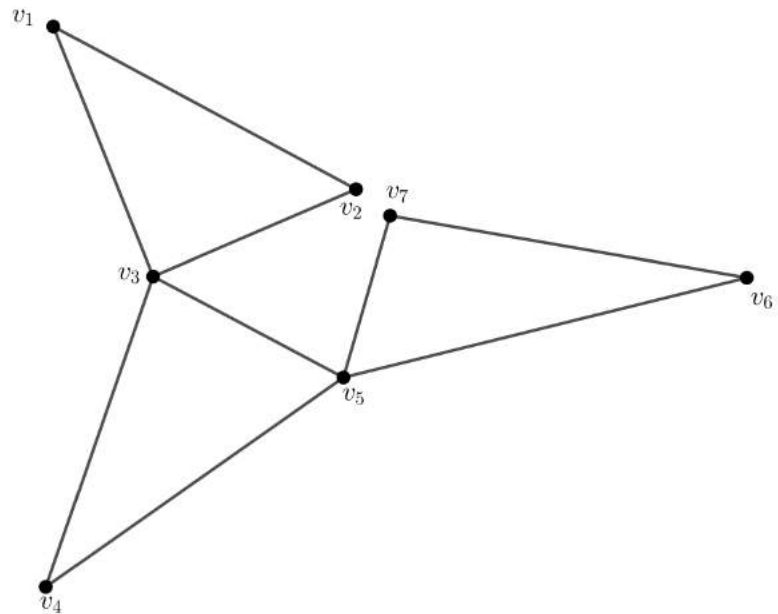


Figura 39 – Comparação de teoremas no Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo

Observação 3.5. Agora, vamos fazer uma comparação entre as duas equações, considerando o caso eles se igualam.

$$\frac{|V(G)| + 7}{4} = \frac{|V(G)| + 14}{5} \Rightarrow$$

$$5|V(G)| + 35 = 4|V(G)| + 56 \Rightarrow$$

$$|V(G)| = 21$$

Na tabela abaixo percebemos que, para $|V(G)| \leq 21$ a quantidade de vértices de grau 2 de Zhu são menores ou iguais que a de Mader, passando de 21, a situação inverte. Note que o menor limite inferior de vértices de grau 2 é o de Zhu, confirmando nessa tabela o que já havíamos dito no início deste capítulo.

$ V(G) $	Zhu	Mader
	$ \mu(G) $	$ \mu(G) $
5	3	4
6	3	4
7	4	4
8	4	4
9	4	5
10	4	5
11	5	5
12	5	5
13	5	5
14	5	6
15	6	6
16	6	6
17	6	6
18	6	6
19	7	7
20	7	7
21	7	7
22	7	7
23	8	7
24	8	8
25	8	8
26	8	8
27	9	8
28	9	8

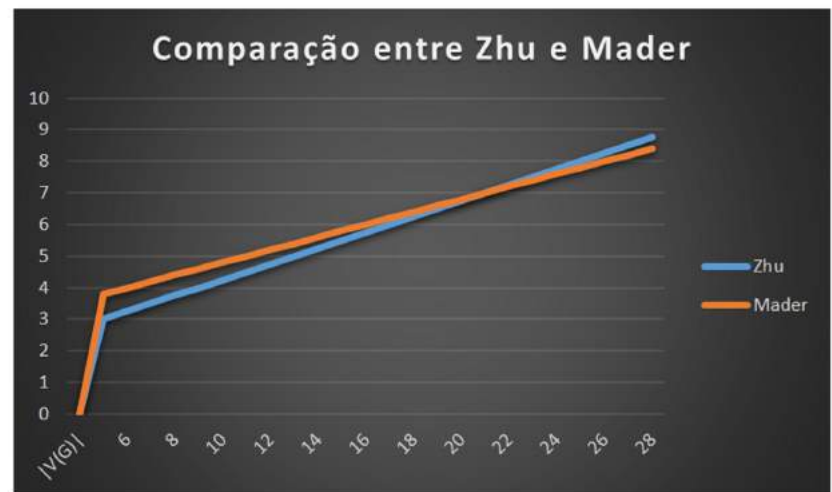


Figura 40 – Tabela Comparando o Número de Vértices de Grau 2 de Cada Teorema

A planilha dada para grafos minimal 2-*aresta-conexo* segue no apêndice iniciando com 5 e terminando com 100 vértices. A planilha foi dividida em seis colunas. As duas primeiras se referem as cotas de Zhu e Mader de vértices de grau 2. As duas próximas, fizemos a diferença entre o total de vértices de cada grafo com as cotas de Zhu e Mader,

resultando no número de vértices para cada cota de grau maior que 2. Por fim, mais duas colunas fazendo a diferença entre a quantidade de vértices de grau maior que 2 com a quantidade de vértices de grau igual a 2, tanto com Zhu quanto com Mader. Para quase todos os casos até os 100 vértices, essa diferença é menor, em módulo, na cota de Zhu. Mostrando que esta cota é a que melhor equilibra as quantidades de vértices de grau igual 2 e maior que 2.

Exemplo 3.6. Determinemos o menor limite inferior de vértices de grau 2 que deve ter em um grafo minimal 2 – *aresta* – *conexo*, de ordem 9 e monte o grafo.

Para $|V(G)| = 9$, e $|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| + 7}{4}$, temos:

$$|\mu(G)| \geq \frac{9 + 7}{4}$$

$$|\mu(G)| \geq \frac{16}{4}$$

$$|\mu(G)| \geq 4$$

Com esse resultado vamos montar o grafo G , com 9 vértices onde 4 é de grau 2, e mostrar que ele é minimal 2 – *aresta* – *conexo*.

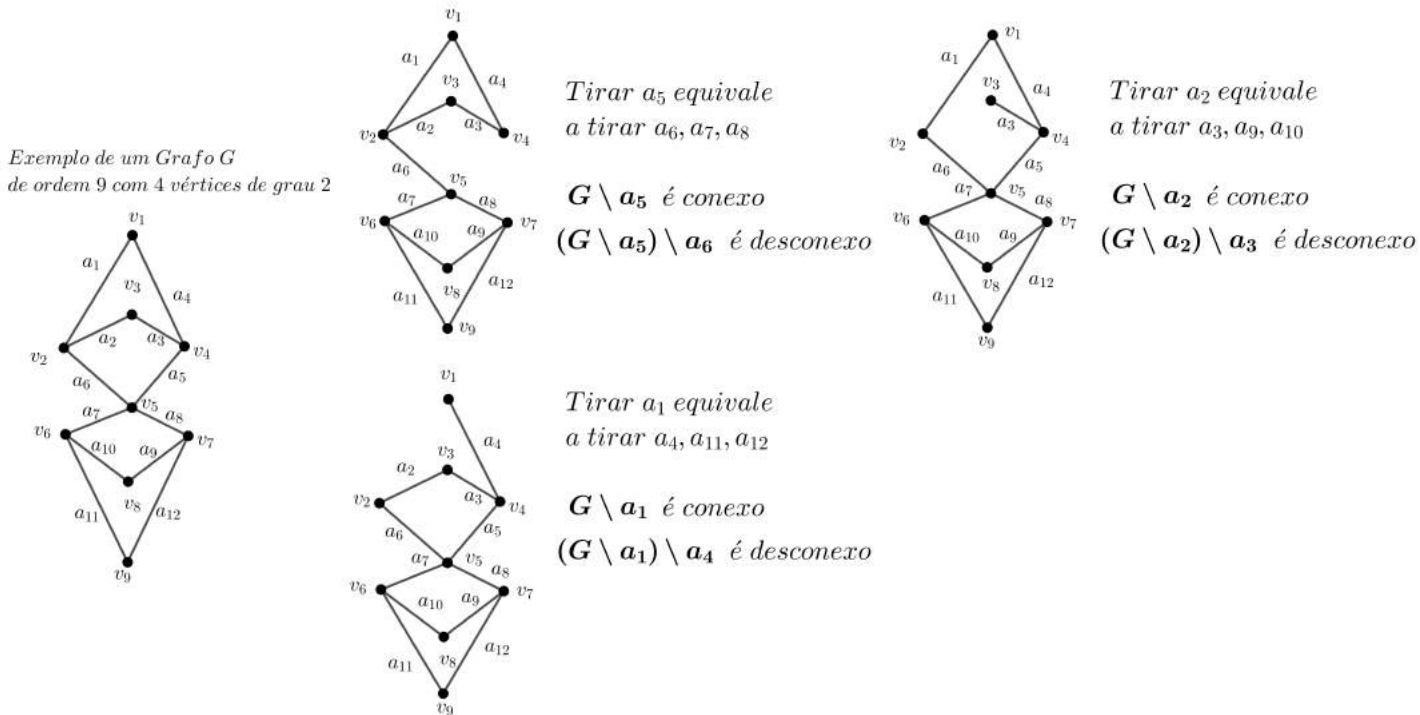


Figura 41 – Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo com vértices de Grau 2 de ordem 9

Exemplo 3.7. Determinemos o menor limite inferior de vértices de grau 2 que deve ter em uma grafo minimal 2 – *aresta* – *conexo* de ordem 13.

Para $|V(G)| = 13$, e $|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| + 7}{4}$, temos:

$$|\mu(G)| \geq \frac{13 + 7}{4}$$

$$|\mu(G)| \geq \frac{20}{4}$$

$$|\mu(G)| \geq 5$$

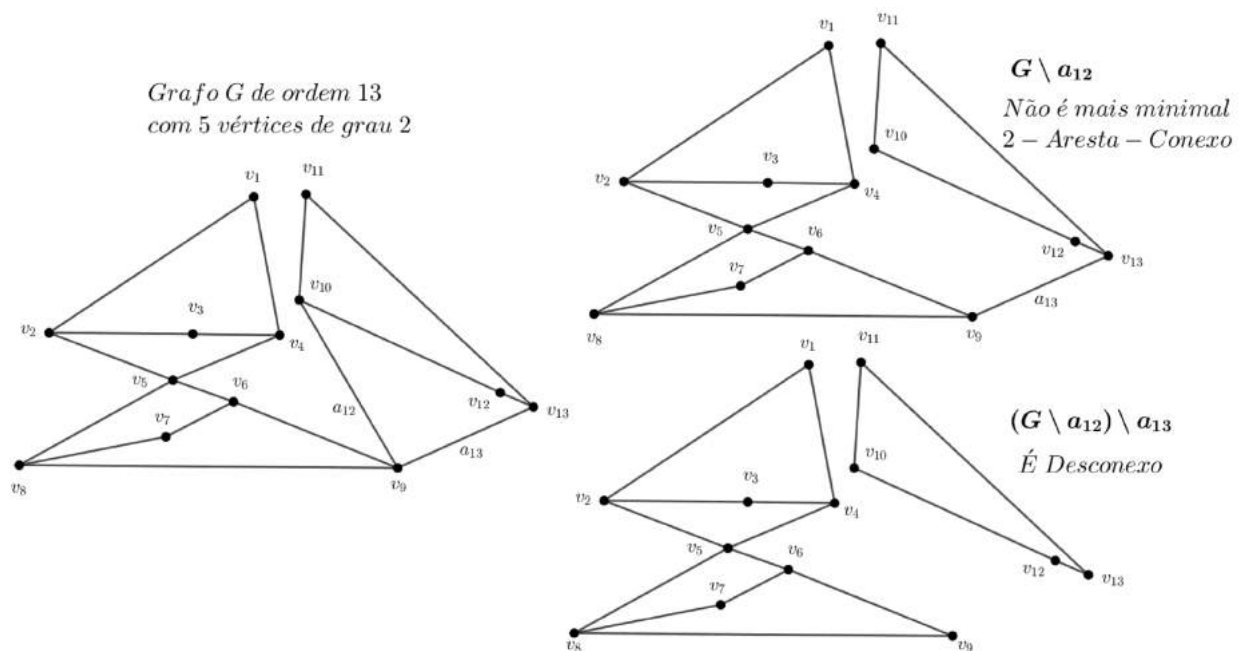


Figura 42 – Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo de Grau 2 de ordem 13

Como já mostramos na questão anterior que o grafo G é minimal 2–*aresta*–*conexo*, então nesse último, apenas mostramos um exemplo onde ao deletarmos uma aresta qualquer de G , o grafo continua conexo, e deletando uma específica o grafo fica desconexo.

4 Material Manipulável

Em relação a aprendizagem da matemática, um dos interesses dos estudiosos é buscar métodos e práticas que melhorem o entendimento desta disciplina. Para isso, os docentes assumem um papel importantíssimo na condução de suas práticas pedagógicas a fim que produza uma maior assimilação por parte dos alunos, e muitas das vezes, os educadores precisam lançar mão de artifícios como jogos lúdicos e materiais manipuláveis para que esse entendimento seja concretizado de forma contextualizada e eficaz.

Neste sentido, os jogos e os materiais manipuláveis são recursos importantes a serem utilizados pelo professor, desde que eles tenham clareza do seu papel e de que eles por si só não vão garantir a aprendizagem de certos saberes que precisam ser sistematizados e correlacionados à proposta e aos objetivos pedagógicos que se esperam atingir.

A partir daí, este trabalho se insere exatamente nesse contexto, e tem como finalidades a construção do conhecimento e sua socialização por meio do Geoplano, material manipulável formado por pinos e elásticos, na Teoria dos Grafos. Seja entre os alunos do ensino médio, visando estimular a vivência destes indivíduos através da experimentação e da criação, comprovando que a Matemática é uma ciência dinâmica, criativa, resultante de uma construção coletiva realizada e aprimorada ao longo dos séculos.

4.1 Geoplano

O criador do geoplano, Caleb Gattegno, professor do Institute of Education, London University, em seu artigo "A Pedagogia da Matemática", diz: "todos os geoplanos têm indubitável atrativo estético e foram adotados por aqueles professores que os viram ser utilizados. Podem proporcionar experiências geométricas a crianças desde cinco anos, propondo problemas de forma, dimensão, de simetria, de semelhança, de teoria dos grupos, de geometria projetiva e métrica que servem como fecundos instrumentos de trabalho, qualquer que seja o nível de ensino"(apud KNIJNIK, BASSO e KLÜSENER, 1996, p. 5-6).

Segundo o Grupo Geoplano de Estudo e Pesquisa (GGEP) o geoplano consiste numa prancha com pinos e elásticos, usados para produzir formas geométricas no plano. Esse recurso e as redes de pontos impressas em papel certamente contribuem para o ensino criativo de matemática, por meio de práticas educacionais propostas por professores dos ensinos fundamental e médio.

Para nosso estudo usaremos o kit do explorador matemático da Brink mobil. É um geoplano quadrangular, composto por:

- 1) Uma caixa organizadora que é o suporte dos planos
- 2) Um plano bidimensional quadrado em acrílico de 300x300mm;
- 3) Um plano circular em acrílico de 240mm de diâmetro;
- 4) Figuras planas de encaixe (4 triângulos, 3 quadrados, 1 retângulo, 1 pentágono e 1 hexágono);
- 5) 60 pinos em cores diferentes: 12 amarelos, 12 azuis, 12 pretos, 12 verdes e 12 vermelhos
- 40 elásticos coloridos (amarelo, azul, vermelho e verde);
- 6) Elásticos com alça (10 vermelhos de 40mm de comprimento, 10 azuis de 60mm de comprimento e 10 verdes de 80mm de comprimento);
- 7) Transferidor de 180° com 60 mm de diâmetro (indica os graus de 15 em 15);
- 8) Régua de 150mm graduada em centímetros
- 9) Jogo de Esquadros: 45°, 45°, 90° e 30°, 60°, 90°
- 10) 12 folhas auxiliar de visualização através dos planos em acrílico.



Figura 43 – Geoplano

4.2 Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo de Grau 2 No Geoplano

Com o auxílio do Geoplano vamos montar os grafos minimal 2 – *aresta* – *conexo* das figura 36 e 40.

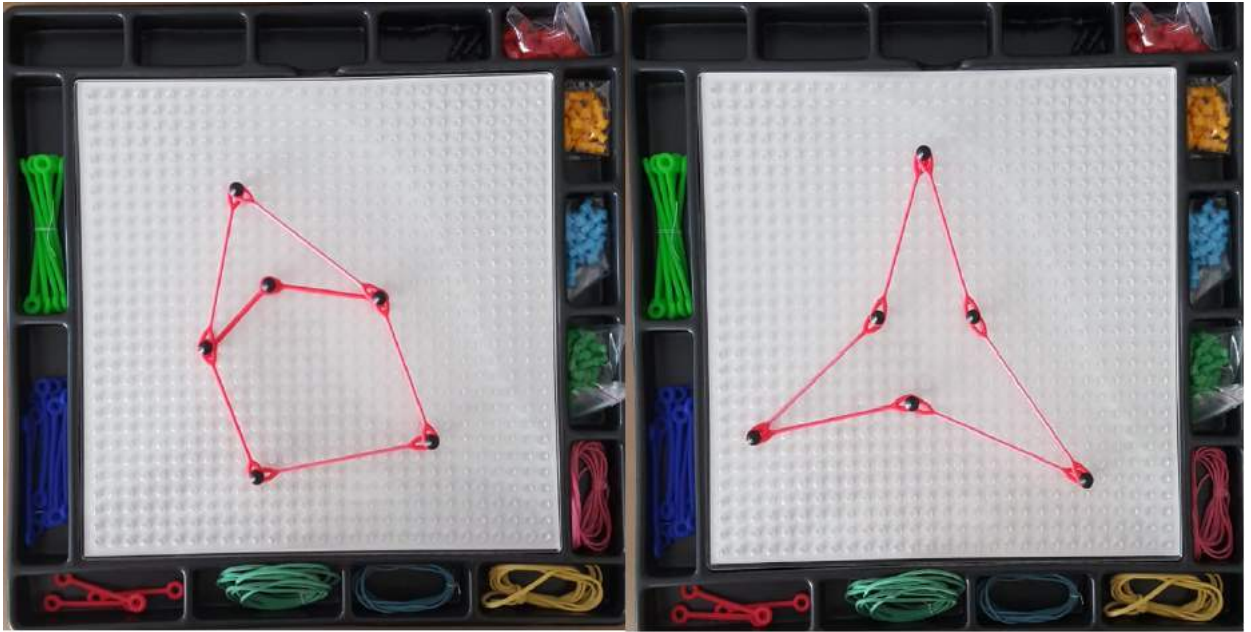


Figura 44 – Grafo da figura 36 no Geoplano

Observação 4.1. As deleções de arestas nas figuras 45 e 46, não comprova que o grafo da figura 44 é minimal 2 – *aresta* – *conexo*, para isso veja a figura 40. Mas serve como ilustração do nosso estudo no geoplano e como é interessante para a visualização do problema.

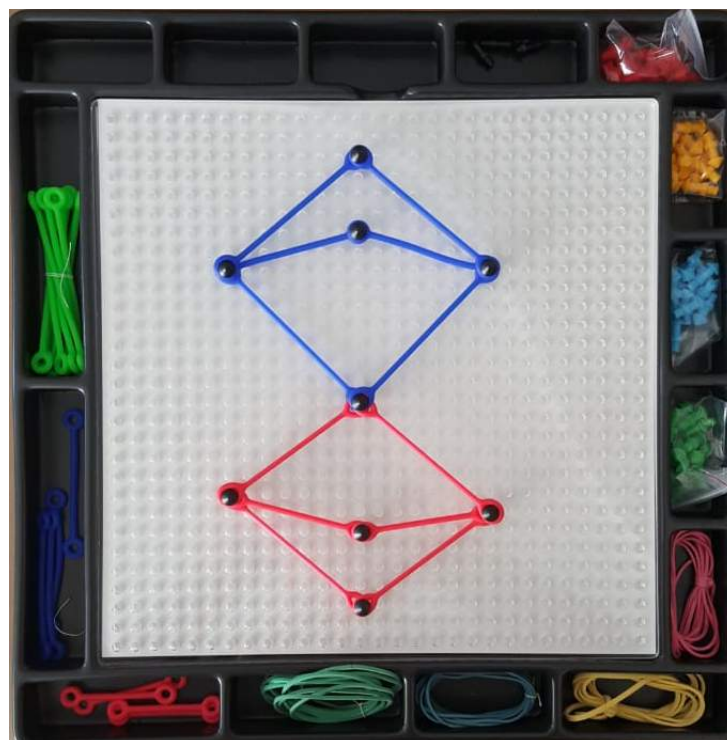
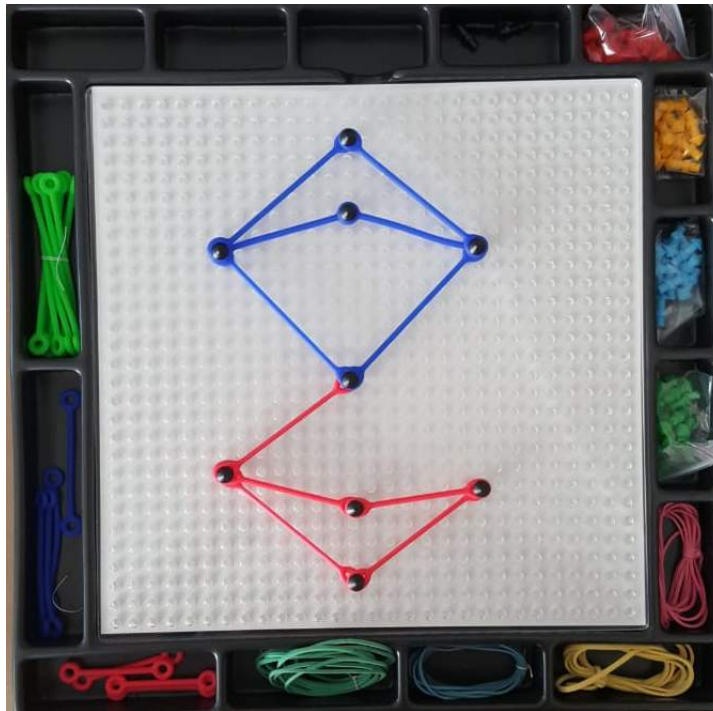
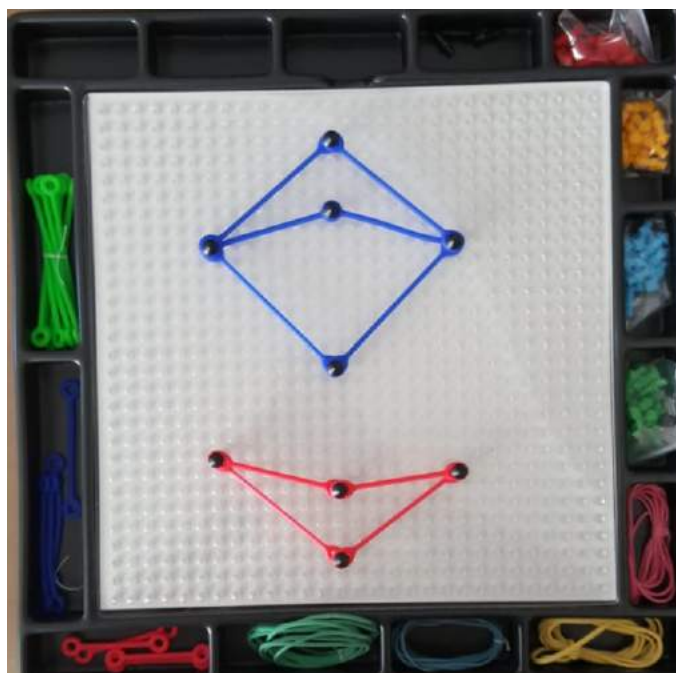


Figura 45 – Grafo G da figura 40 no Geoplano

Figura 46 – Grafo G' da figura 33 no GeoplanoFigura 47 – Grafo G'' da figura 33 no Geoplano

5 Modelagem do Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo

Inúmeras situações podem ser modeladas por meio de grafos, todas as situações desse capítulo consiste na montagem de um grafo minimal 2 – *aresta – conexo*, com o menor limite inferior de vértices de grau 2. Usaremos também o geoplano como ferramenta para montar cada grafo desse capítulo. Esses problemas e seus grafos são uma excelente sugestão de atividades que podem ser executadas em sala de aula.

5.1 Construção de Pontes em um Arquipélago

Problemas envolvendo pontes são muito recorrentes no estudo dos grafos. O problema que apresentaremos a seguir, cita conexão entre ilhas.

Problema 5.1. Considere um arquipélago com 13 ilhas que vai se tornar um "paraíso turístico". Para isso temos que conectar as ilhas desse arquipélago com pontes para locomoção de veículos de passeio, de forma que se possa ir de uma ilha para outra utilizando somente pontes, tendo em vista que a distância entre elas e as condições climáticas são favoráveis para essa construção. Em reunião com o dono do empreendimento, o engenheiro de estradas fez três considerações. A primeira é que construir pontes ligando cada ilha com todas as outras do arquipélago é inviável, devido ao custo com a construção e manutenção dessas pontes. A segunda é que deve chegar em qualquer ilha desse arquipélago no mínimo duas pontes, de forma que se qualquer ponte desmorone ainda se consiga ir de uma ilha para outra. A terceira consideração é que algumas ilhas, por serem maiores, tem maior número de turistas, logo precisa de mais de duas pontes para evitar congestionamentos. Logo o engenheiro deve modelar uma conexão entre as ilhas que possa satisfazer o pedido do dono do empreendimento bem como suas considerações.

Solução 5.2. Nesse problema, um modelo interessante é o grafo minimal 2 – *aresta – conexo*, estudado no capítulo 2. Como cada ilha deve chegar no mínimo duas pontes, é interessante saber o menor número de ilhas que podem ficar com apenas duas pontes de modo que o projeto ainda seja econômico. Para isso vamos utilizar o teorema do capítulo 3. Sendo $|V(G)| = 13$, temos:

$$|\mu(G)| \geq \frac{13 + 7}{4}$$

$$|\mu(G)| \geq \frac{20}{4}$$

$$|\mu(G)| \geq 5.$$

Esse resultado significa que das 13 ilhas do arquipélago, pelo menos 5 ilhas devem ficar conectadas com apenas 2 pontes, isso levando em consideração o critério de quantos mais turistas mais pontes deve ter a ilha. Montaremos esse grafo no geoplano(capítulo 4), onde as 5 ilhas com apenas 2 pontes estão representadas por pinos vermelhos, e 8 ilhas com mais de 2 pontes por pinos pretos.

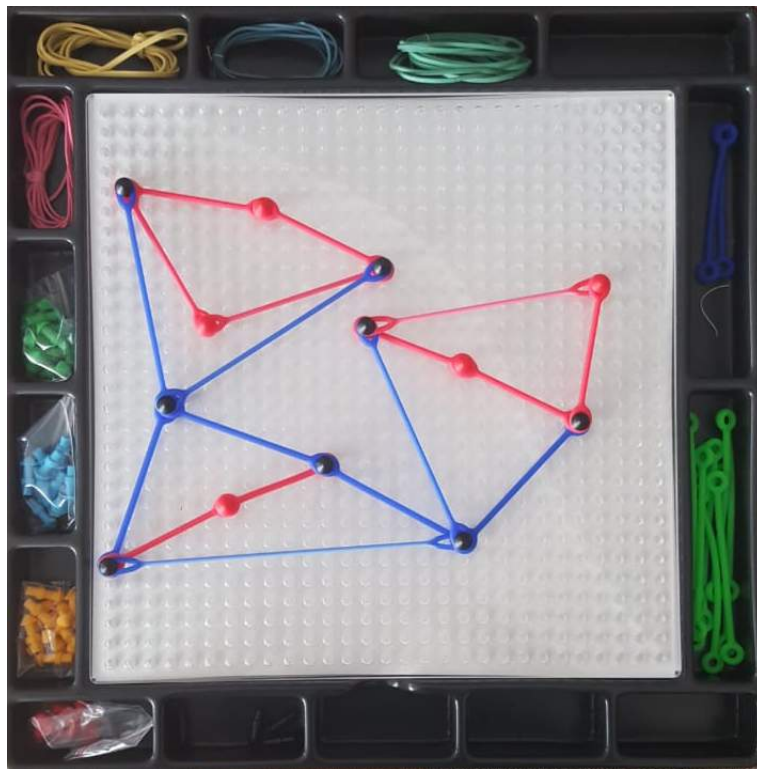


Figura 48 – Representação no Geoplano do arquipélago com 13 ilhas

Observação 5.3. No grafo da figura 47 temos dois vértices de grau 4, com a deleção de duas arestas específicas de qualquer um desses dois vértices, um bloco inteiro com 4 ou até 5 ilhas se desconectará do arquipélago. Por isso a importância de um vértice de grau 4.

5.2 Redes de Computadores

É uma estrutura de computadores e dispositivos conectados através de um sistema de comunicação que compartilha dados. O *hub* é um dispositivo que encaminha os dados para todas as máquinas conectadas. O *switch* é um dispositivo que encaminha os dados para as máquinas conectadas através de um critério. Para nosso problema, os *hub's* e *switch's* vão ser os vértices e os cabos arestas.

Problema 5.4. Uma empresa de telefonia é responsável por um certo número de cidades, em cada cidade tem um *hub* ligando a todas as outras para distribuir os dados. Com o objetivo de aumentar a velocidade de sua internet, o sistema de cabeamento antigo será trocado por um de fibra óptica, e no lugar dos *hub's* serão instalados *switch's* para um melhor direcionamento desses dados. Onde esses dados são transmitidos de uma cidade para outra utilizando somente os cabos de fibra óptica. Considerando que não podemos usar o mesmo modelo de conexão, pois o custo para sua implementação seria muito alto, uma sugestão para viabilizar o projeto, foi montar uma rede com o mínimo de conexões possíveis, de maneira que uma cidade esteja ligada a exatamente duas outras diferentes. O que também não é possível, pois em algumas cidades o consumo de dados é mais alto, necessitando de mais de duas conexões. Logo para atender essa demanda, foi montado uma rede de computadores com duas, e mais de duas conexões em cada cidade, onde se uma das conexões falhar ainda vai existir uma que deixa a rede conectada. Para esse total de cidades a menor quantidade possível com apenas duas conexões são 4. Com base nessas informações determine o total de cidades contempladas por essa nova rede.

Solução 5.5. Nos moldes do problema acima uma opção interessante é o grafo minimal 2 – *areta – conexo*, para montar a nova rede. Temos que a menor quantidade possível de cidades com apenas 2 conexões é $|\mu(G)| = 4$. Utilizando o teorema do capítulo 3, temos:

$$|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| + 7}{4} \Rightarrow$$

$$4 \geq \frac{|V(G)| + 7}{4} \Rightarrow$$

$$4 \times 4 \geq |V(G)| + 7 \Rightarrow$$

$$16 \geq |V(G)| + 7 \Rightarrow$$

$$|V(G)| \geq 9.$$

Esse resultado significa que das 9 cidades favorecidas com essa rede pelo menos 4 podem ficar com apenas 2 conexões. O que significa que nas outras duas cidades vão ter mais de duas conexões e mesmo assim ainda vai ser um grafo minimal 2 – *areta – conexo*. Com o auxílio do programa Lucidchart[5], montamos os grafos das figuras 48 e 49 e o da 50 no geoplano. Onde os 4 *switch's* com apenas 2 conexões estão representadas por pinos vermelhos, e 2 *switch's* com mais de 2 conexões por pinos pretos.

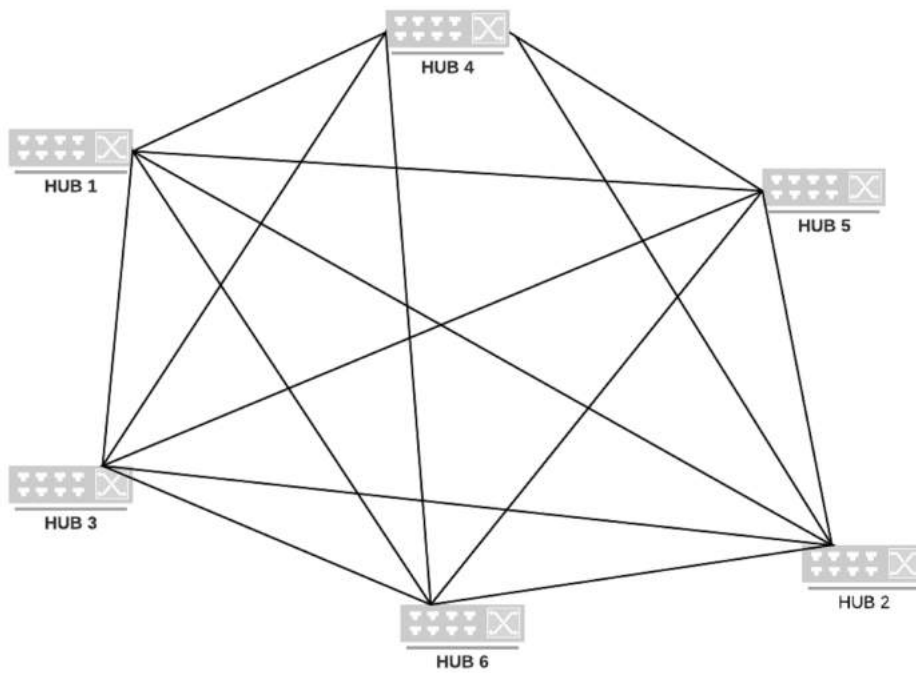


Figura 49 – Conexão Antiga

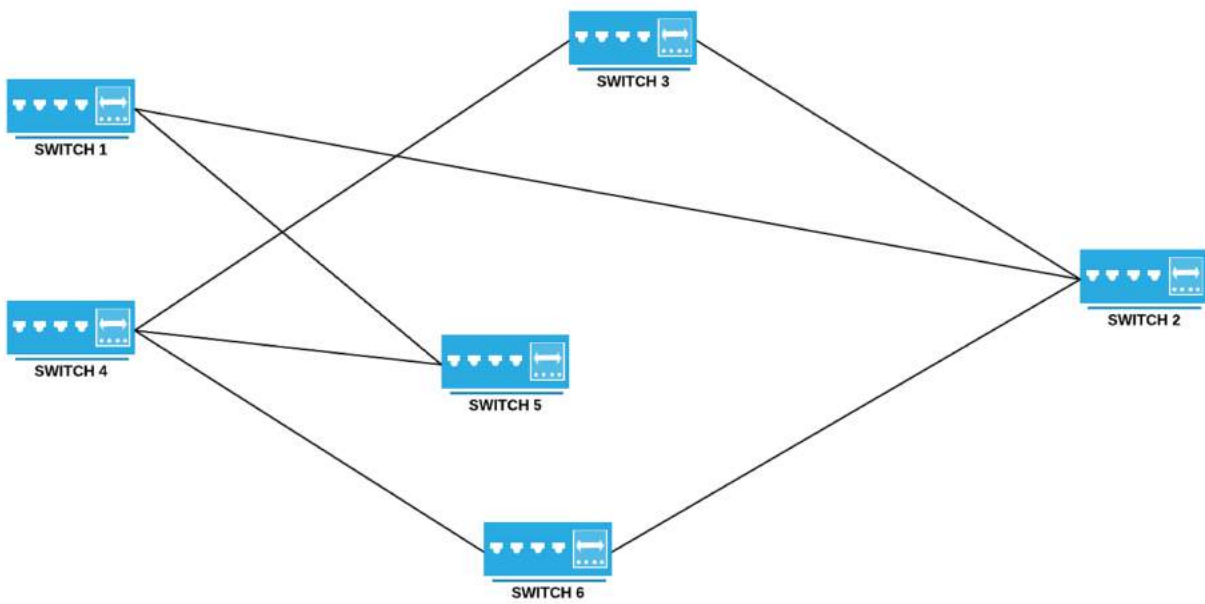


Figura 50 – Conexão com Fibra óptica

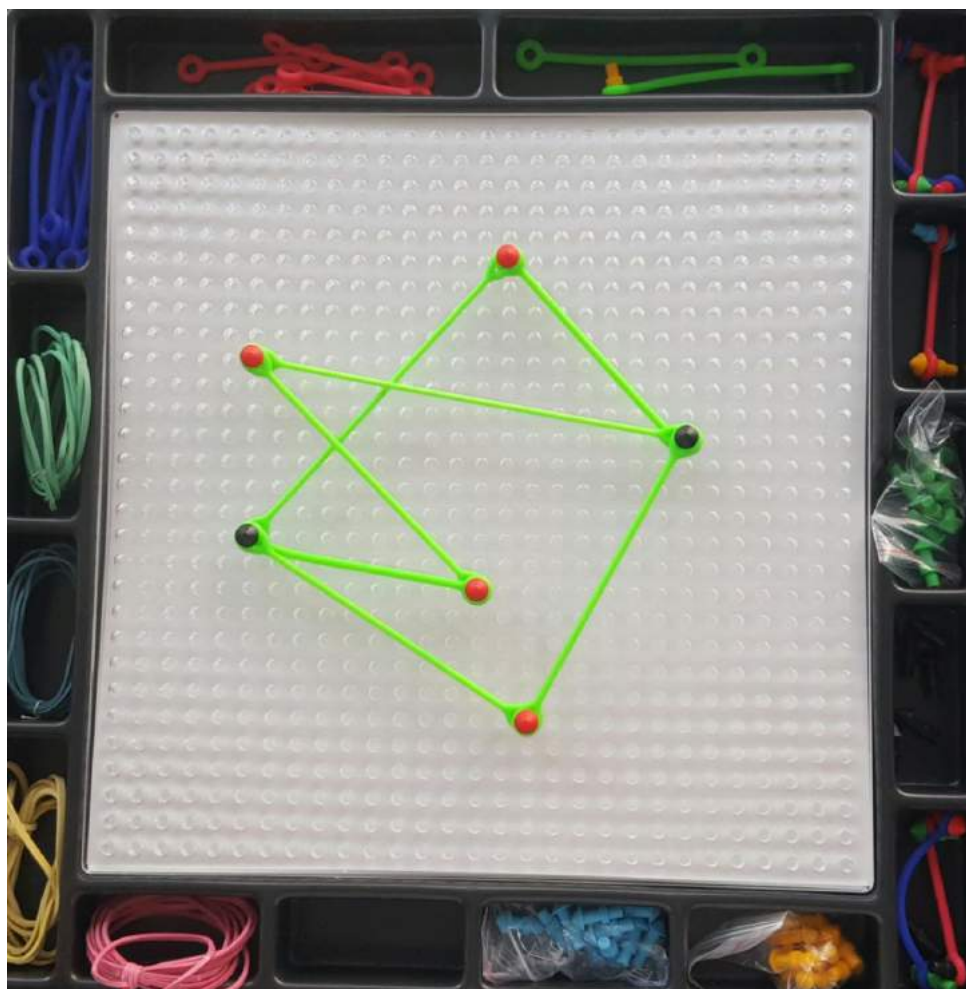


Figura 51 – Conexão com Fibra óptica no Geoplano

5.3 Roteirização

Problema 5.6. O centro de distribuição de uma fábrica de fios de cobre tem suas entregas gerenciadas pelo sistema de gerenciamento logístico (SGL). Esse sistema cria, em consonância com o GPS e de acordo com as condições de trânsito diárias, mapas com opções de rotas que devem ser escolhidas por seus eventuais motoristas. Tais mapas são formados por grafos minimal 2 – *aresta* – *conexo*. Deste modo, cada estrada representa uma aresta do grafo e cada ponto de entrega, inclusive o centro de distribuição, representa um vértice do referido grafo. Imagine a situação em que um motorista tenha atendido a cinco pontos de entrega que se assemelham, cada um deles, a vértices de grau maior que 2. Para que se respeite a condição de formação de cada mapa, qual a quantidade mínima de pontos de entrega que devem ser atendidos por esse motorista para que se tenha a menor cota de vértices de grau 2 nessa situação?

Solução 5.7. Denote, $|\mu(G)| = x$ e $|V(G)| = x + 5$,

Como $|\mu(G)| \geq \frac{|V(G)| + 7}{4}$, então:

$$x \geq \frac{x + 5 + 7}{4} \Rightarrow$$

$$4x \geq x + 12 \Rightarrow$$

$$x \geq 4 \Rightarrow$$

$$|V(G)| = 4 + 5 = 9.$$

Na montagem desse grafo usamos o Google Maps e desenhamos as conexões com o Geogebra, lembrando que uma aresta não tem forma definida o que está claro nesse grafo.



Figura 52 – Mapa Feito no Google Maps

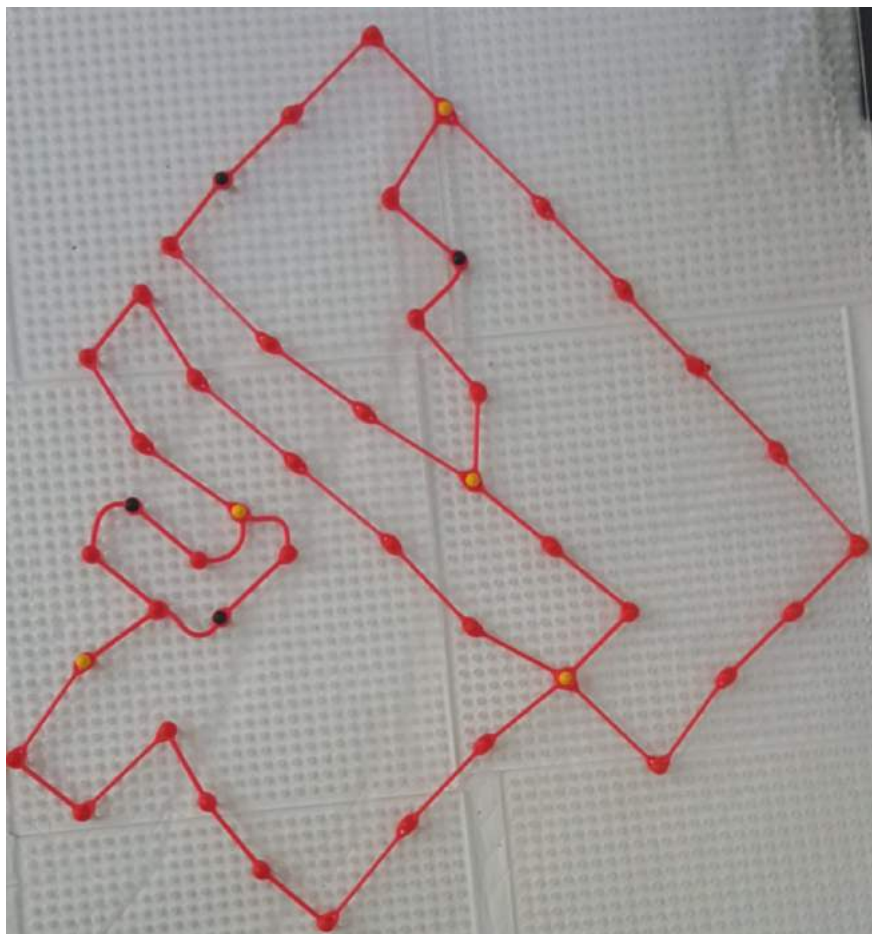


Figura 53 – Mapa Feito no Geoplano

Montamos também no geoplano, onde os 4 pontos de entrega com apenas 2 conexões estão representadas por pinos pretos, e os 5 pontos de entrega com mais de 2 conexões por pinos verdes e os pinos vermelhos estão apenas auxiliando na montagem das conexões.

6 Proposta de Atividade

De acordo com os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) do Estado de Pernambuco, "Refletir sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática implica em estabelecer relações entre alguém que ensina (o professor), alguém que aprende (os estudantes) e o objeto de conhecimento (o saber)". (PERNAMBUCO, 2012, p.25)

A escola tem sofrido modificações no sentido de possibilitar novas metodologias onde o estudante pode construir o conhecimento na interação com os colegas de sala bem como com o professor. É no bojo destas novas propostas que aparece o material concreto como recurso que pode contribuir para uma melhor aprendizagem de matemática. (ESTEPHAN,2000,p.7) O material concreto que usaremos para auxiliar na teoria de grafos é o geoplano.

O objetivo desse capítulo é montar uma atividade, com uso do Geoplano, que contemple o conteúdo estudado nesse trabalho, para os alunos do 2º ano do ensino médio no Centro Profissional Especial(CPE) na disciplina do contra turno de Logística, distribuição e estoque. Onde seu principal foco é minimizar os custos. Por essa razão usaremos o grafo minimal 2 – *aresta – conexo* no Geoplano para mostrar aos alunos uma opção de mapa ou sistema de conexão que se aplicado gera diminuição nos custos.

Aula 1:

- Objetivos

Apresentar a teoria dos grafo, seus elementos, pré-requisitos, e como sua modelagem pode ser útil nos setores de administração e logística.

- Conteúdo da Aula

- O que é um grafo e seus elementos;
- O que é grau de um vértice;
- O que é isomorfismo;
- O que é conexidade e um grafo k-conexo;
- O que é um grafo minimal *aresta – conexo*.

- Metodologia

Com o auxílio do data show iniciamos a aula com uma breve história sobre grafos, falando da ponte de Königsberg, depois mostramos aos alunos exemplos práticos de grafos, como um arquipélago ligado por pontes, estradas e rede de computadores. Em seguida eles tiveram uma aula expositiva abordando o conteúdo acima. Por fim cada aluno fez um modelo de grafo minimal *aresta – conexo*, por meio de tentativas em seu caderno.

Aula 2:

• Objetivos

Construir 3 grafos minimal $2 - \text{aresta} - \text{conexo}$ no Geoplano por meio de tentativas.

• Conteúdo da Aula

Conceito de Geoplano;

Construindo um grafo no geoplano;

Apresentação da fórmula da melhor cota de vértices de grau 2 para um grafo minimal $2 - \text{aresta} - \text{conexo}$.

• Metodologia

Após apresentar o Geoplano, o professor explicou o que seria um grafo minimal $2 - \text{aresta} - \text{conexo}$ e suas vantagens, já abordadas nesse trabalho, sem o construir com a intenção de observar se apenas com os conceitos já informados, os alunos conseguiriam construir esse grafo. Eles foram divididos em grupos de 4 pessoas, com as seguintes instruções:

1) Montar um grafo minimal $2 - \text{aresta} - \text{conexo}$ com 9 vértices podendo ter ou não vértices de grau maior que 2;

2) Montar um grafo minimal de 5 empresas todas conectadas por estradas, onde cada empresa tenha pelo menos duas opções de acesso. Algumas dessas empresas tem produtos mais populares, logo vão precisar de mais de duas opções de estradas;

3) Montar um grafo minimal $2 - \text{aresta} - \text{conexo}$ com 9 vértices, onde deve ser usada a melhor cota inferior de vértices de grau 2.

Os alunos tiveram duas aulas de 50 minutos para montar os grafos de acordo com o que foi explicado.

Observação 6.1. A seguir vamos mostrar os grafos, certos ou errados, montados pelos alunos do 2ºano do ensino médio, e a análise feita pelo professor.

Início do trabalho:

Os alunos se mostraram bem empolgados no início da atividade, trocando ideias e fazendo sugestões de tal forma que ficou bem notório o entendimento da teoria e que a primeira atividade seria rápida para todos os grupos com grandes possibilidades de acertos.

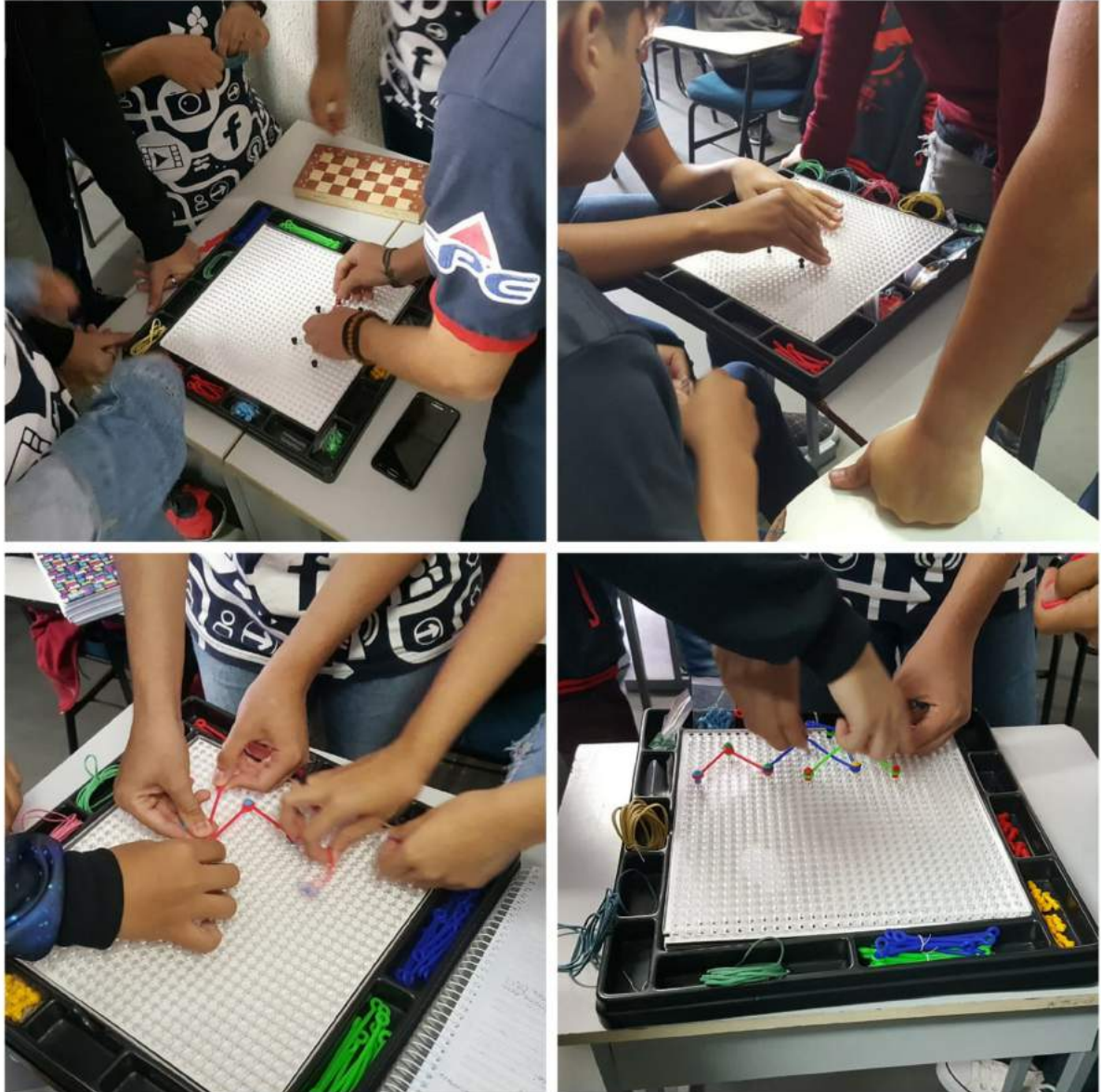


Figura 54 – alunos montando os grafos

1ª Atividade:

A primeira montagem foi relativamente rápida, dos 7 grupos formados, 5 terminaram a primeira atividade em menos de 20 minutos. Sentindo-se motivados e desafiados para o próximo problema. Um dos grupos infelizmente não acertou montar o grafo, 4 grupos montaram esse grafo com apenas vértices de grau 2, e dois com vértices de grau igual e maior que 2.

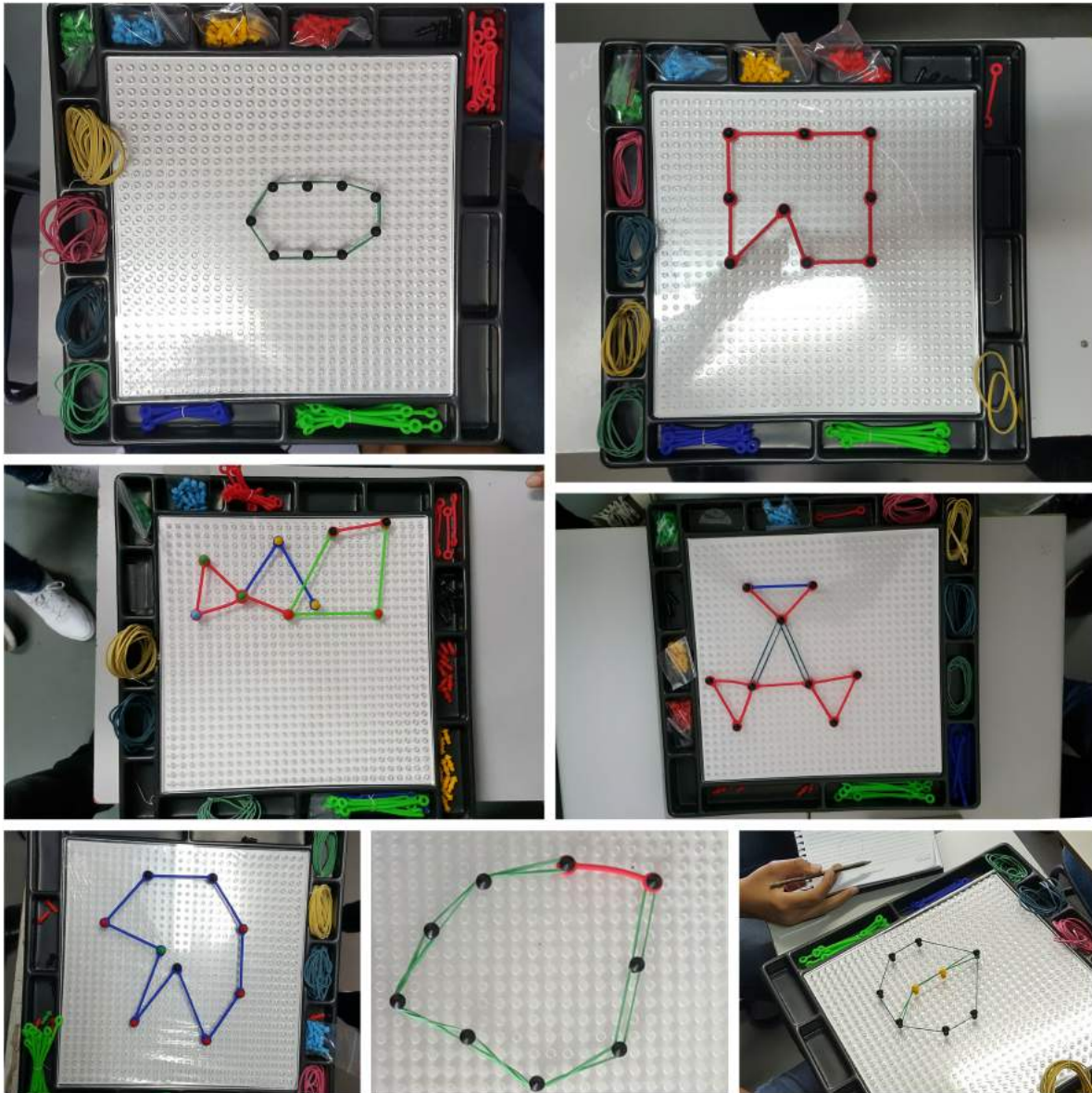


Figura 55 – 1ª Atividade

2ª Atividade:

Os alunos foram para a segunda se deparando com a seguinte situação. A obrigatoriedade de montar um grafo minimal 2 – *aresta* – *conexo* com vértices de grau maior que 2. Houve dificuldade por parte de todos, até que dois grupos montaram o grafo com três vértices de grau dois. Onde por meio de tentativas alguns dos alunos conseguiram chegar na menor cota de vértices de grau 2 para esse grafo, sem ainda ter conhecimento do teorema visto no capítulo 3. Dessa vez um grupo não conseguiu montar o grafo, um grupo errou na montagem e quatro grupos conseguiram montar o grafo com a menor cota.

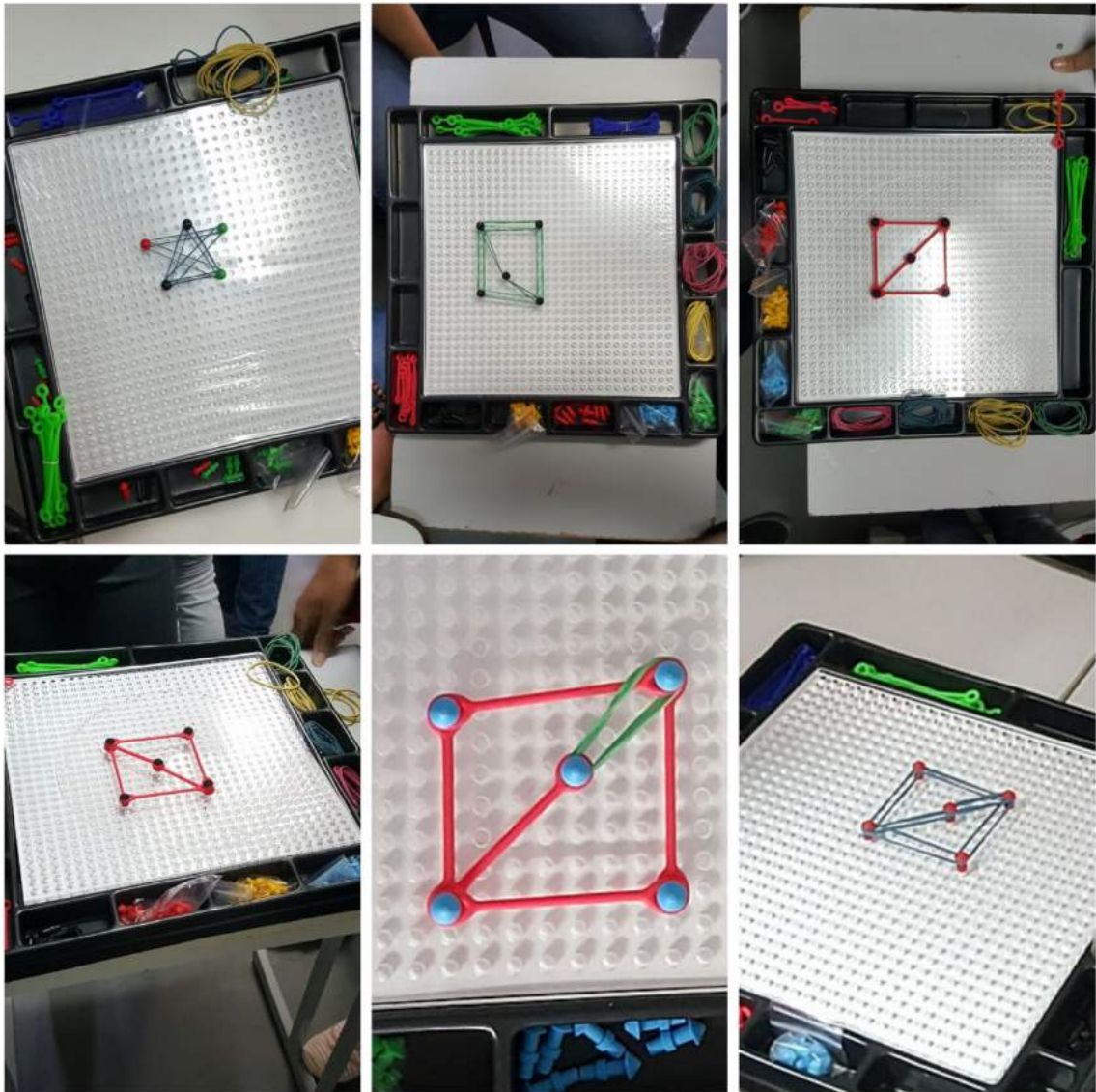


Figura 56 – 2ª Atividade

3ª Atividade:

Apresentamos o teorema do capítulo 3 para os alunos, mostramos que na atividade 2, quatro grupos fizeram a mesma cota do teorema e com base nele os alunos teriam que montar um grafo minimal 2 – *aresta* – *conexo* com 9 vértices, onde quatro tem grau 2 e cinco tem grau maior que 2. Os alunos conseguiram montar todos os vértices de acordo com o teorema, e na tentativa de montar um vértice maior que 2, acabaram montando um grafo que não é minimal.

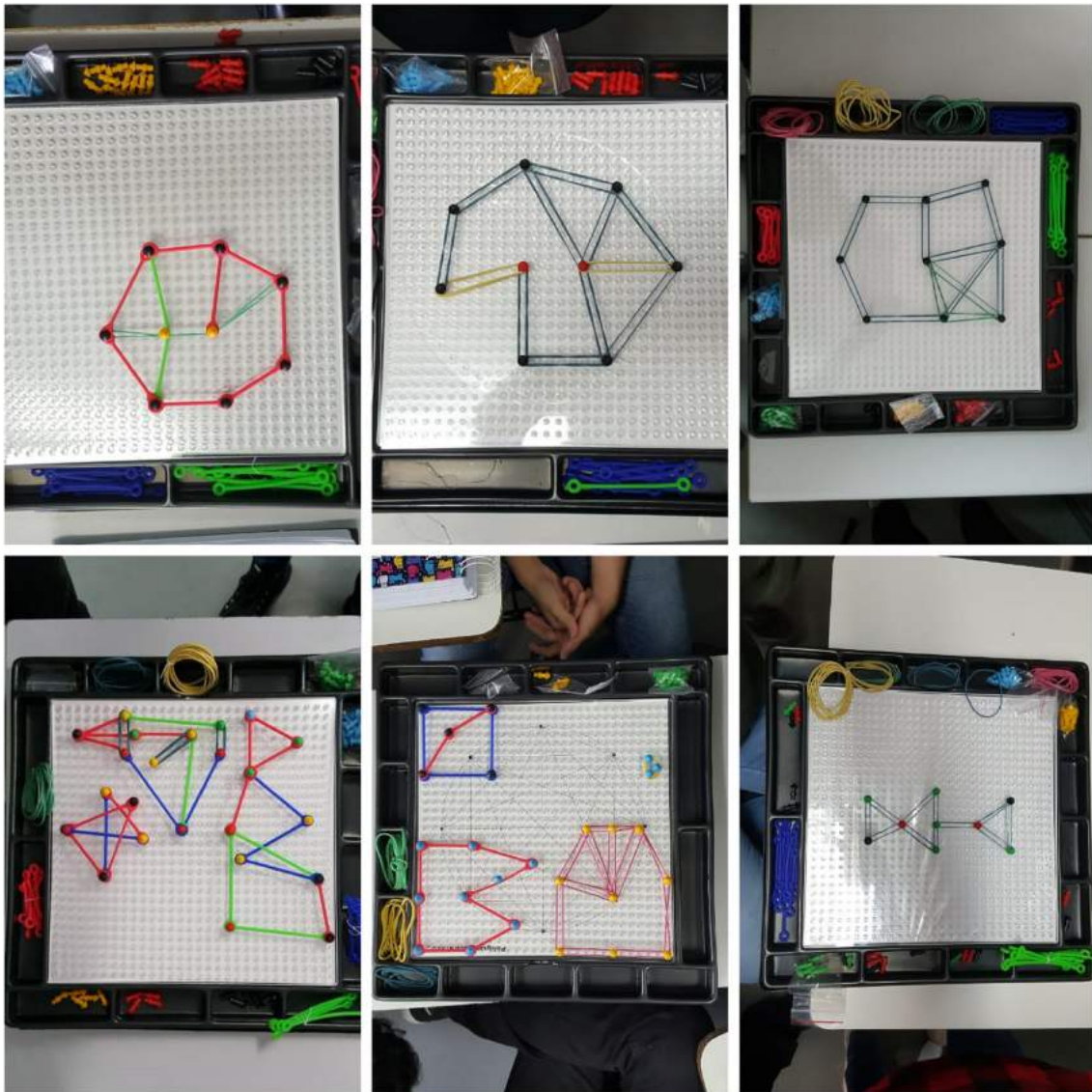


Figura 57 – 3ª Atividade

6.1 Sugestão De Atividade

Neste trabalho sobre grafos minimal 2 – *aresta – conexo*, apresentamos duas cotas de vértices de grau 2 :

$$\text{A cota de Zhu } |\mu(G)| = \frac{|V(G)| + 7}{4}.$$

$$\text{A cota de Mader } |\mu(G)| = \frac{|V(G)| + 14}{5}.$$

Vamos agora montar nossa cota de vértices de grau dois para um grafo minimal 2 – *aresta – conexo*.

Tomemos o seguinte grafo:

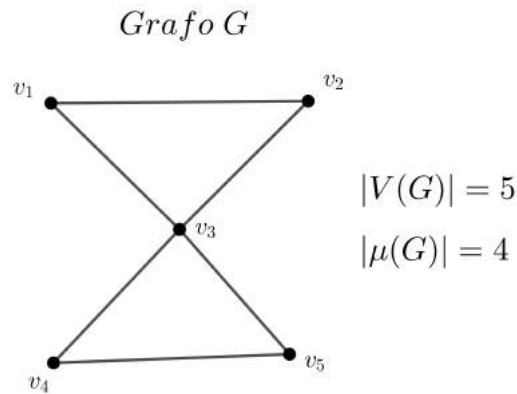
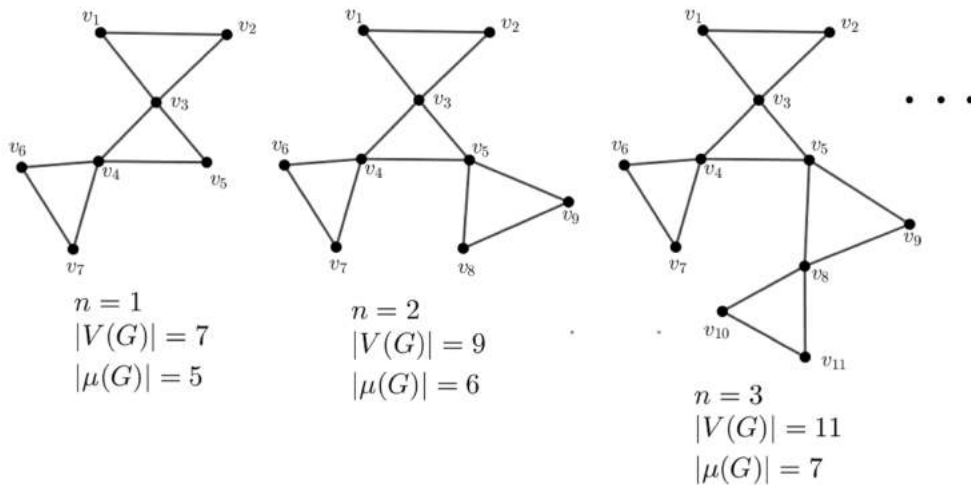


Figura 58 – Grafo para nova cota

Vamos considerar um bloco sendo um grafo triangular, onde sempre um dos vértices deve se ligar a G . Da seguinte forma:



Sendo n o número de blocos. Determine uma relação de $|\mu(G)|$ com n , de $|V(G)|$ com n , e em seguida de $|\mu(G)|$ com $|V(G)|$.

Conclusão

Este trabalho tem como objetivo contribuir para o estudo da teoria dos grafos e compor material de consulta a professores e alunos, tanto de ensino médio quanto do ensino superior que se pré disponham a enveredar por esse caminho e enriquecer com suas contribuições.

Embora vivamos o pleno avanço das tecnologias, principalmente as digitais, destacamos neste trabalho o uso de recursos manipuláveis com forte apelo à memória visual a fim de estimular a criatividade para o desenvolvimento do pensamento intuitivo e a percepção das aplicações dos grafos em situações do cotidiano. Não obstante disso, destacamos que tão importante quanto resolver um problema que envolva o tema é, investigar as diversas possibilidades ou caminhos nos levam a sua solução.

Reconhecendo a abrangência do tema e de suas aplicações, nos detivemos, especificamente, ao estudo dos grafos minimal $2 - \textit{aresta} - \textit{conexo}$ onde, na tentativa de demonstrar por indução, a melhor cota de vértices de grau 2, percebemos uma falha que surge como proposta de trabalho para novas pesquisas bem como, a busca de novas cotas de vértices de grau 2, o que implica em novas famílias de grafos minimal $2 - \textit{aresta} - \textit{conexo}$.

Em relação à pesquisa bibliográfica, mencionamos a importância das contribuições de Zhu e Made que demonstraram, nesta ordem, o teorema da melhor cota para grafos minimal $2 - \textit{aresta} - \textit{conexo}$ e o teorema de uma cota de vértices de grau k para grafos minimal $k - \textit{aresta} - \textit{conexo}$.

Finalmente, a impressão que tivemos com o desenvolvimento desta produção acadêmica é de que as propostas de atividades aqui apresentadas podem entrar no currículo do ensino médio além, é claro, dos cursos técnicos em logística, redes, estradas entre outros. Além disso, a verdade é que ainda se tem muito a explorar sobre teoria dos grafos cabendo a nós pesquisadores, a busca da motivação à investigação de problemas que permeiem o assunto.

Referências

[1] "Leonhard Paul Euler" em ebiografia 2000 - 2019. Consultado em 15/07/2018 às 14:21. Disponível na Internet em https://www.ebiografia.com/leonhard_euler

[2] "James Joseph Sylvester" em Só Matemática. Virtuoso Tecnologia da Informação, 1998-2018. Consultado em 27/02/2018 às 04:19. Disponível na Internet em <https://www.somatematica.com.br/biograf/sylvester.php>

[3] Kónig, Dénes (1936), *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. Translated from German by Richard McCoart, *Theory of finite and infinite graphs*, Birkhäuser, 1990, ISBN 0-8176-3389-8.

[4] W. Mader, Kantendisjunkte Wege in Graphen, *Monatsh. Math.* 78 {1974}, 395-404.

[5] B. ZHU, Critically 2-edge-connected graphs, *Acta Math. Appl. Sinica* 6 (1983). 292-301.

[6] Diestel, Reinhard; *Graph Theory*, Springer; 2nd edition (February 18, 2000). ISBN 0-387-98976-5.

[7] R. HALIN, A Theorem on n-Connected Graphs, *Journal of combinatorial theory* 7, 150-154 (1969).

[8] SMOLE, K. (1999). **Geoplano**. Acesso em 20, 22 e 26 de setembro de 2018, disponível em faculdade de educação USP: <http://paje.fe.usp.br/labmat/edm321/1999/material/private/geoplano.htm>

[9] GAGNON, Michel. **Grafo/Árvores. professeurs.polymtl**, Montreal: 02 de maio. 2001. Disponível em: <http://www.professeurs.polymtl.ca/michel.gagnon/Disciplinas/Bac/Grafos/Arvores/arvores.html>. Acesso em 12 Out 2018.

[10] FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos matemáticos: A experiência russa*. Rio de Janeiro, Impa, 2012.

[11] LABER, E. **Estruturas Discretas**. acesso 17 de novembro. 2018. Disponível em: <http://www.di.inf.puc.rio.br/labier/lista-grafos-gab.pdf>.

[12] M.C, CAI. The Number of Vertices of Degree k in a Minimally k -Edge-connected Graph, Journal of Combinatorial. 58 1993, 225-239.

[13] ESTEPHAN, Violeta Maria. Perspectivas e Limites do Uso de Material Didático Manipulável na Visão de Professores de Matemática do Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. Orientador Maria Tereza Carneiro Soares. UFPR, Curitiba. 2000, p.7

APÊNDICE A – Planilha do Capítulo 3

	Zhu	Mader	Zhu	Mader	Zhu	Mader
$ V(G) $	$ \mu(G) $	$ \mu(G) $	$ V(G) - \mu(G) $	$ V(G) - \mu(G) $	Δ	Δ
5	3	4	2	1	1	3
6	3	4	3	2	1	2
7	4	4	4	3	0	1
8	4	4	4	4	1	1
9	4	5	5	4	1	0
10	4	5	6	5	2	0
11	5	5	7	6	2	1
12	5	5	7	7	3	2
13	5	5	8	8	3	2
14	5	6	9	8	4	3
15	6	6	10	9	4	3
16	6	6	10	10	5	4
17	6	6	11	11	5	5
18	6	6	12	12	6	5
19	7	7	13	12	6	6
20	7	7	13	13	7	6
21	7	7	14	14	7	7
22	7	7	15	15	8	8
23	8	7	16	16	8	8
24	8	8	16	16	9	9
25	8	8	17	17	9	9
26	8	8	18	18	10	10
27	9	8	19	19	10	11
28	9	8	19	20	11	11
29	9	9	20	20	11	12
30	9	9	21	21	12	12
31	10	9	22	22	12	13
32	10	9	22	23	13	14
33	10	9	23	24	13	14
34	10	10	24	24	14	15
35	11	10	25	25	14	15
36	11	10	25	26	15	16
37	11	10	26	27	15	17
38	11	10	27	28	16	17
39	12	11	28	28	16	18
40	12	11	28	29	17	18
41	12	11	29	30	17	19
42	12	11	30	31	18	20
43	13	11	31	32	18	20
44	13	12	31	32	19	21
45	13	12	32	33	19	21
46	13	12	33	34	20	22
47	14	12	34	35	20	23
48	14	12	34	36	21	23
49	14	13	35	36	21	24
50	14	13	36	37	22	24
51	15	13	37	38	22	25

52	15	13	37	39	23	26
53	15	13	38	40	23	26
54	15	14	39	40	24	27
55	16	14	40	41	24	27
56	16	14	40	42	25	28
57	16	14	41	43	25	29
58	16	14	42	44	26	29
59	17	15	43	44	26	30
60	17	15	43	45	27	30
61	17	15	44	46	27	31
62	17	15	45	47	28	32
63	18	15	46	48	28	32
64	18	16	46	48	29	33
65	18	16	47	49	29	33
66	18	16	48	50	30	34
67	19	16	49	51	30	35
68	19	16	49	52	31	35
69	19	17	50	52	31	36
70	19	17	51	53	32	36
71	20	17	52	54	32	37
72	20	17	52	55	33	38
73	20	17	53	56	33	38
74	20	18	54	56	34	39
75	21	18	55	57	34	39
76	21	18	55	58	35	40
77	21	18	56	59	35	41
78	21	18	57	60	36	41
79	22	19	58	60	36	42
80	22	19	58	61	37	42
81	22	19	59	62	37	43
82	22	19	60	63	38	44
83	23	19	61	64	38	44
84	23	20	61	64	39	45
85	23	20	62	65	39	45
86	23	20	63	66	40	46
87	24	20	64	67	40	47
88	24	20	64	68	41	47
89	24	21	65	68	41	48
90	24	21	66	69	42	48
91	25	21	67	70	42	49
92	25	21	67	71	43	50
93	25	21	68	72	43	50
94	25	22	69	72	44	51
95	26	22	70	73	44	51
96	26	22	70	74	45	52
97	26	22	71	75	45	53
98	26	22	72	76	46	53
99	27	23	73	76	46	54
100	27	23	73	77	47	54