



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Gabriel Vitor de Souza Brito**

**Aplicações de Teoremas de Geometria Plana em Problemas de Olimpíadas  
de Matemática**

RECIFE  
2020





UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Gabriel Vitor de Souza Brito**

**Aplicações de Teoremas de Geometria Plana em Problemas de Olimpíadas de Matemática**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gabriel Guedes

RECIFE  
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- B862a Brito, Gabriel Vitor de Souza  
Aplicações de teoremas de geometria plana em problemas de olimpíadas de matemática / Gabriel Vitor de Souza Brito. - 2020.  
105 f. : il.
- Orientador: Gabriel Araujo Guedes.  
Inclui referências, apêndice(s) e anexo(s).
- Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2020.
1. Geometria plana. 2. Cevianas. 3. Olimpíadas de matemática. I. Guedes, Gabriel Araujo, orient. II. Título

CDD 510

---

GABRIEL VITOR DE SOUZA BRITO

**Aplicações de Teoremas de Geometria Plana em Problemas de  
Olimpíada de Matemática**

*Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado  
Profissional em Matemática – PROFMAT do  
Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE  
FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito  
parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Aprovado em \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Gabriel Araújo Guedes (Orientador(a))– UFRPE

---

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão – DMat/UFPE

---

Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva– PROFMAT/UFRPE

---

Prof. Dr. Leon Denis da Silva– DM/UFRPE



*À minha família.*





# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter me dado forças e discernimento para concluir esta dissertação. Agradeço aos meus pais, Jacilene e Peixoto, que me apoiaram em todos os momentos da minha vida. À minha namorada, Byanca, que esteve ao meu lado durante todo o mestrado, me incentivando sempre. Ao meu orientador, Prof. Dr. Gabriel Guedes, que me ajudou durante toda a dissertação e sempre me incentivou na minha pesquisa. Aos meus amigos do mestrado, por todo suporte durante os dois anos que estivemos juntos. Aos meus amigos do trabalho, Bartolomeu, Jener e Jonas, que me cobriram enquanto eu pesquisava. À minha amiga, Professora Mariana, pelas excelentes correções no texto.



*"Seja forte e corajoso! Mãos ao trabalho! Não tenha medo nem desanime, pois Deus, o Senhor, o meu Deus, está com você. Ele não o deixará nem o abandonará até que se termine toda a construção do templo do Senhor."  
(Bíblia Sagrada, 1 Crônicas 28:10)*



## DECLARAÇÃO

Eu, GABRIEL VITOR DE SOUZA BRITO, declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título “**Aplicações de Teoremas de Geometria Plana em Problemas de Olimpíadas de Matemática**”, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador GABRIEL ARAÚJO GUEDES, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 15 de outubro de 2020.

---

Gabriel Vitor de Souza Brito



# Resumo

Resolver problemas olímpicos, de Matemática, requer raciocínio e criatividade do aluno, envolvendo diversos conteúdos. No campo da Geometria Plana, os teoremas envolvendo cevianas são ferramentas poderosas para o entendimento e interpretação de problemas e trazem resultados que facilitam a resolução de determinados exercícios. Portanto, os Teoremas de Stewart, Menelaus, Ceva, Reta de Euler e Ptolomeu serão apresentados e demonstrados, mesmo não fazendo parte da grade curricular do ensino médio regular. Eles já apareceram em problemas ou em shortlists de olimpíadas de Matemática internacionais como a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), Olimpíada de Matemática do Cone Sul (CONE SUL) e Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO). Um questionário, com problemas envolvendo os teoremas citados, foi aplicado em uma turma de preparação olímpica, com alunos do 1º ao 3º ano do Ensino Médio, de uma escola particular do Recife. Em sua grande maioria, os alunos utilizaram várias estratégias diferentes para resolver os exercícios, visivelmente mais longas, pois não tinham conhecimento desses teoremas. Com isso, podemos perceber a importância de se trabalhar esse tema com os alunos, o que motivou a criação de um plano de aulas, disponível para professores de turmas olímpicas, que tratasse das cevianas e dos teoremas de uma forma acessível para os alunos interessados em aprofundar seus conhecimentos sobre Geometria plana.

**Palavras-chave:** Geometria Plana; Cevianas, Olimpíadas de Matemática.





# Abstract

Solving olympic questions of Math requires reasoning and student's creativity, involving multiple contents. When it comes to Plane Geometry, the theorems involving cevians are a powerful tool for understanding and interpreting questions and bringing results that will facilitate the resolution of exercises. In this way, the Theorems of Stewart, Menelaus, Ceva, Ptolomeu and Euler line will be presented and proved, even when they're not a part of the curriculum of regular high school. They have appeared in exercises and shortlists of International's Math Olympics (IMO), The Mathematical Olympiad in the Southern Cone (CONE SUL) and Iranian Geometry Olympiad (IGO). A quiz of exercises involving the theorems above were applied in a olympic's preparation class with high school students of a Recife's private school. Most of the students used different strategies to solve their exercises, and it clearly took longer for they didn't use the theorems. This way, we realize the importance of bringing this theme to students, wich motivated the creation of a teaching schedule, available for teachers of olympic's classrooms that will treat cevians and theorems in a accessible way for students interested in deepen their knowledge of plane geometry.

**Keywords:** Plane Geometry, Cevians, Math Olympics.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Teorema de Tales . . . . .	24
Figura 2 – Teorema da Bissetriz Interna . . . . .	26
Figura 3 – Propriedade do Ângulo Externo . . . . .	27
Figura 4 – Teorema de Pitágoras . . . . .	28
Figura 5 – Ângulo Central de uma Circunferência . . . . .	29
Figura 6 – Ângulo Inscrito em uma Circunferência . . . . .	30
Figura 7 – Lei dos Cossenos . . . . .	31
Figura 8 – Lei dos Senos . . . . .	32
Figura 9 – Teorema de Stewart . . . . .	34
Figura 10 – Teorema de Menelaus . . . . .	36
Figura 11 – Teorema de Menelaus . . . . .	36
Figura 12 – Teorema de Ceva . . . . .	38
Figura 13 – Demonstração Teorema de Ceva . . . . .	38
Figura 14 – Reta de Euler . . . . .	40
Figura 15 – Reta de Euler . . . . .	41
Figura 16 – Teorema de Ptolomeu . . . . .	42
Figura 17 – Teorema de Ptolomeu . . . . .	43
Figura 18 – Figura do Problema Olímpico 1 . . . . .	48
Figura 19 – Seletiva do Brasil para a Cone Sul - POTI 2012 . . . . .	49
Figura 20 – Figura Shortlist 2006 IMO . . . . .	50
Figura 21 – Figura Shortlist 2006 IMO . . . . .	51
Figura 22 – Figura Shortlist IGO 2015 . . . . .	52
Figura 23 – Figura Shortlist IMO . . . . .	53
Figura 24 – Figura Shortlist IMO . . . . .	54
Figura 25 – Figura Shortlist IMO . . . . .	55
Figura 26 – Figura Shortlist IMO . . . . .	56
Figura 27 – Figura Shortlist IMO Irlanda 1999 . . . . .	57
Figura 28 – Shortlist IMO 2011 . . . . .	58
Figura 29 – Shortlist IMO 2011 . . . . .	59
Figura 30 – Shortlist IGO - 2nd Iranian Geometry Olympiad . . . . .	60
Figura 31 – Exemplo 1 - Teorema de Stewart . . . . .	65
Figura 32 – Exemplo 1 - Teorema de Ceva . . . . .	66
Figura 33 – Extrato do protocolo A11T1 - Questão 1 . . . . .	68
Figura 34 – Extrato do protocolo A12T1 - Questão 1 . . . . .	69
Figura 35 – Extrato do protocolo A11T2 - Questão 1 . . . . .	70
Figura 36 – Extrato do protocolo A12T2 - Questão 1 . . . . .	71

Figura 37 – Extrato do protocolo AI1T3 - Questão 2 (parte 1) . . . . .	72
Figura 38 – Extrato do protocolo AI1T3 - Questão 2 (parte 2) . . . . .	72
Figura 39 – Extrato do protocolo AI2T3 - Questão 2 (parte 1) . . . . .	73
Figura 40 – Extrato do protocolo AI2T3 - Questão 2 (parte 2) . . . . .	74
Figura 41 – Extrato do protocolo AI1T2 - Questão 3 (parte 1) . . . . .	75
Figura 42 – Extrato do protocolo AI1T2 - Questão 3 (parte 2) . . . . .	76
Figura 43 – Extrato do protocolo AI2T2 - Questão 3 . . . . .	76
Figura 44 – Extrato do protocolo AI4T3 - Questão 3 (parte 1) . . . . .	77
Figura 45 – Extrato do protocolo AI4T3 - Questão 3 (parte 1) . . . . .	78
Figura 46 – Mediana . . . . .	80
Figura 47 – Baricentro . . . . .	80
Figura 48 – Razão da Medida do Baricentro . . . . .	81
Figura 49 – Altura Interna . . . . .	81
Figura 50 – Altura Externa . . . . .	82
Figura 51 – Cateto como Altura . . . . .	82
Figura 52 – Ortocentro Interno . . . . .	83
Figura 53 – Ortocentro Externo . . . . .	83
Figura 54 – Ortocentro no Vértice . . . . .	84
Figura 55 – Bissetriz . . . . .	84
Figura 56 – Incentro . . . . .	85
Figura 57 – Mediatriz . . . . .	85
Figura 58 – Circuncentro Interno . . . . .	86
Figura 59 – Circuncentro Externo . . . . .	86
Figura 60 – Exemplo 1 - Stewart . . . . .	88
Figura 61 – Exemplo 2 - Stewart . . . . .	88
Figura 62 – Exemplo 1 - Menelaus . . . . .	89
Figura 63 – Exemplo 2 - Menelaus . . . . .	90
Figura 64 – Exemplo 2 - Teorema de Ceva . . . . .	91
Figura 65 – Exemplo 3 - Teorema de Ceva . . . . .	92
Figura 66 – Reta de Euler . . . . .	93
Figura 67 – Exemplo 1 - Reta de Euler . . . . .	93
Figura 68 – Exemplo 1 - Reta de Euler . . . . .	94
Figura 69 – Teorema de Ptolomeu . . . . .	95
Figura 70 – Exemplo 2 - Ptolomeu . . . . .	95
Figura 71 – Exemplo 1 - Teorema de Stewart . . . . .	101
Figura 72 – Exemplo 1 - Teorema de Ceva . . . . .	102
Figura 73 – Seletiva do Brasil para a Cone Sul - POTI 2012 . . . . .	102
Figura 74 – DECLARAÇÃO . . . . .	103

# Sumário

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>1</b>	<b>ELEMENTOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>2</b>	<b>TEOREMAS DE GEOMETRIA PLANA</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>2.1</b>	<b>TEOREMAS ABORDADOS EM OLIMPIADAS</b> . . . . .	<b>34</b>
<b>3</b>	<b>OLIMPIADAS DO CONHECIMENTO</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>3.1</b>	<b>PROBLEMAS OLÍMPICOS</b> . . . . .	<b>48</b>
<b>4</b>	<b>DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA</b> . . . . .	<b>63</b>
<b>4.1</b>	<b>CAMPO DE PESQUISA</b> . . . . .	<b>63</b>
<b>4.2</b>	<b>ESCOLHA, CARACTERIZAÇÃO DOS SUJEITOS E TRAJETÓRIAS PARA A APLICAÇÃO DA PESQUISA</b> . . . . .	<b>64</b>
<b>4.3</b>	<b>ANÁLISE PRÉVIA</b> . . . . .	<b>64</b>
<b>4.4</b>	<b>ANÁLISE DAS SOLUÇÕES DOS ALUNOS</b> . . . . .	<b>66</b>
<b>5</b>	<b>PLANO DE AULA BASEADO EM TEOREMAS ENVOLVENDO CE- VIANAS EM TURMAS OLÍMPICAS</b> . . . . .	<b>79</b>
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>97</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>99</b>
	<b>APÊNDICE 1 - QUESTRIONÁRIO</b> . . . . .	<b>101</b>
	<b>ANEXO 1 - DECLARAÇÃO ESCOLAR</b> . . . . .	<b>103</b>



# INTRODUÇÃO

Durante o ensino básico, a Geometria é trabalhada de maneira mais formalizada, a partir do 6 ano. Portanto são utilizados vários teoremas e definições que auxiliam os estudantes a entender os procedimentos utilizados nesse campo da Matemática. Os teoremas estão ligados com o conteúdo programático curricular de cada série, por isso muitos alunos se interessam pelas olimpíadas de matemática e precisam de um conhecimento um pouco mais específico sobre alguns desses resultados.

Os problemas olímpicos visam estimular o raciocínio e criatividade do aluno para resolver problemas dos mais variados tipos. Com isso, podemos perceber que os alunos que participam dessas olimpíadas têm mais liberdade para estudar, de modo geral, a Matemática e conseguem abstrair vários conceitos que estão inseridos, de forma subliminar, em grande parte dos problemas a que eles são submetidos. Ademais, quando se trata de Matemática, temos diversos problemas que necessitam de conceitos prévios e conhecimento de determinados resultados para conseguir resolver problemas de maneira muito mais prática e rápida.

Com o objetivo de facilitar a resolução de questões envolvendo Geometria para o aluno de olimpíada, vamos abordar teoremas de Geometria Plana, envolvendo cevianas e o Teorema de Ptolomeu, que normalmente não fazem parte da grade curricular do Ensino Médio regular, assim como aplicaremos um plano de aulas para aprofundamento olímpico nas turmas do Ensino Médio e, assim, será possível possibilitar a abordagem desses teoremas tanto por professores de turmas olímpicas quanto por alunos interessados. Trataremos desses teoremas com resultados essenciais para resolver problemas olímpicos com mais facilidade. As questões de geometria utilizadas foram da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), IMO (Olimpiada Internacional de Matemática), IGO (Olimpíada Iraniana de Geometria) e Conesul (Olimpíada de Matemática dos países do Cone Sul).

Seguindo, nas próximas seções, trataremos dos Teoremas de Stewart, Teorema de Menelaus, Teorema das Cevas, Teorema de Ptolomeu e Reta de Euler. Serão apresentados alguns problemas sobre os teoremas em questão, aplicados nas olimpíadas destacadas.

Posteriormente, um questionário, envolvendo cevianas em triângulos, foi aplicado com os estudantes do Ensino Médio de uma escola do Recife, que possui aprofundamento olímpico em Matemática. De acordo com a análise dos resultados, foi construído um plano de aula, envolvendo cevianas e seus teoremas, para que os alunos de turmas olímpicas possam conhecer tais conteúdos.





# 1 ELEMENTOS DA GEOMETRIA Euclidiana PLANA

Devido à decisão de tratar sobre a Geometria de maneira mais aprofundada, foram incluídos materiais disponíveis para consulta, algumas notações, conceitos, definições e teoremas que estarão na seção inicial. Tendo em vista que os conteúdos não são de entendimento imediato, todos os resultados demonstrados e citados posteriormente utilizarão os pressupostos aqui estabelecidos. Sabendo que o objetivo desse capítulo é a consulta para fomentar as demonstrações dos teoremas apresentados no capítulo 2, não traremos demonstrações desses resultados, caso queira aprofundar nesses teoremas mais "básicos" sugerimos consultar o livro "Fundamentos de Geometria Plana", escrito por Machado, P.F.

$A$  : Refere-se ao ponto  $A$ .

$\overline{AB}$ : Representa um segmento de reta, com extremos em  $A$  e  $B$ .

$\overrightarrow{AB}$ : Representa uma semirreta, partindo de  $A$  e passando por  $B$ .

$\leftrightarrow{AB}$ : Representa uma reta, que passa por  $A$  e  $B$ .

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ : Representa que os dois segmentos são paralelos.

$\overline{AB} \perp \overline{CD}$ : Representa que os dois segmentos são perpendiculares.

$\widehat{AOB}$ : Representa um ângulo, de vértice  $O$  e medida  $m(\widehat{AOB})$ , a medida pode ser representada por letras gregas como  $\alpha, \beta, \gamma$ , etc.

$\widehat{A}$ : Representa o ângulo interno, no vértice  $A$ , de um polígono.

$\widehat{AB}$ : Representa o arco de circunferência  $AB$ .

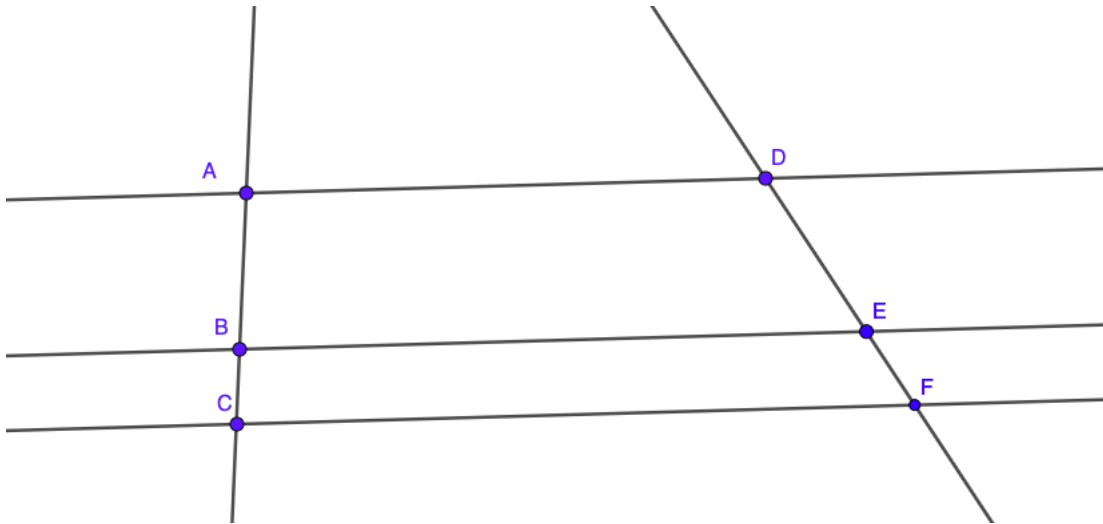
$\triangle ABC$ : Triângulo com vértices  $A, B$  e  $C$ .

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ : Representa semelhança entre os triângulos.

$\equiv$ : Representa congruência entre ângulos, segmentos ou triângulos.

**Teorema 1.1.** (Teorema de Tales) *Um feixe de retas paralelas divide duas retas transversais, de modo que os segmentos obtidos em uma das retas são ordenadamente proporcionais aos segmentos obtidos na outra.*

Figura 1 – Teorema de Tales



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Obs: Três ou mais retas coplanares e paralelas entre si formam um **feixe de retas paralelas**.

**Definição 1.2.** Dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  são semelhantes se é possível estabelecer correspondência entre seus lados e ângulos, de modo que:

$$\hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E}, \hat{C} \equiv \hat{F}$$

e

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k \quad (1.1)$$

**Proposição 1.3.** (Caso de semelhança Ângulo-Ângulo AA): *Se dois triângulos possuem dois pares de ângulos congruentes entre si, então eles são semelhantes.*

**Proposição 1.4.** (Caso de semelhança Lado-Ângulo-Lado LAL): *Se dois triângulos possuem dois pares de lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes.*

**Proposição 1.5.** (Caso de semelhança Lado-Lado-Lado LLL): *Se os lados de dois triângulos são, dois a dois, proporcionais entre si, então os triângulos são semelhantes.*

**Definição 1.6.** Dois polígonos são semelhantes quando os ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.<sup>1</sup>

**Teorema 1.7.** (*Propriedade de Proporção de Segmentos*) Se a razão entre os segmentos  $a$  e  $b$  é proporcional a razão entre os segmentos  $c$  e  $d$ , então a razão entre a soma dos antecedentes e a soma dos consequentes também é proporcional às razões anteriores.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1.2)$$

**Definição 1.8. Ceviana** é um segmento de reta que liga um vértice de um triângulo a um ponto no lado oposto ou em seu prolongamento, de modo que esse ponto seja diferente dos outros vértices.

**Definição 1.9. Mediana** de um triângulo é o segmento de reta que liga um dos vértices ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.

**Teorema 1.10.** (*Razão entre segmentos em medianas*) . As medianas de um triângulo se encontram em um mesmo ponto cuja distância a cada um de seus vértices mede dois terços do comprimento da própria mediana.

**Definição 1.11. Baricentro** é o ponto de encontro das medianas do triângulo.

**Definição 1.12. Altura** de um triângulo é o segmento que liga um vértice ao seu lado oposto ou seu prolongamento, sendo perpendiculares entre si.

**Teorema 1.13.** As retas suporte das alturas de um triângulo concorrem em um ponto.

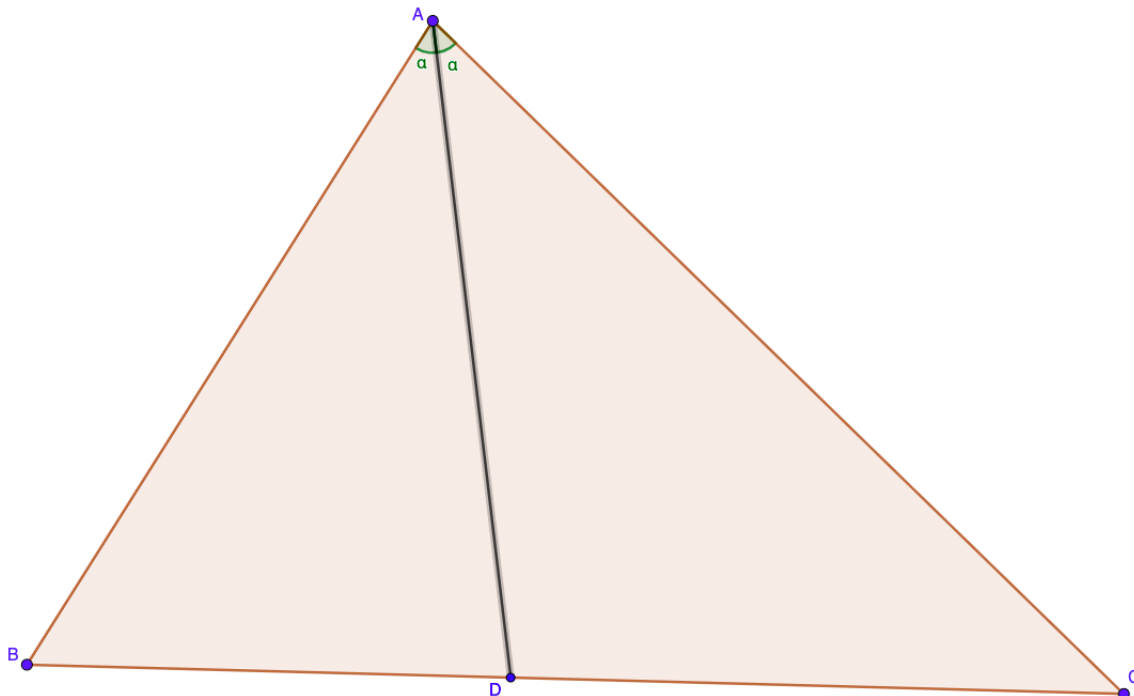
**Definição 1.14. Ortocentro** é o ponto de encontro das alturas do triângulo.

**Definição 1.15. Bissetriz Interna** de um triângulo é o segmento de reta com extremidades em um vértice e no lado oposto a esse vértice e que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.

<sup>1</sup> A razão entre os lados correspondentes é chamada razão de semelhança.

**Teorema 1.16.** (*Teorema da Bissetriz Interna*) A bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.

Figura 2 – Teorema da Bissetriz Interna



Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \quad (1.3)$$

**Teorema 1.17.** As bissetrizes de um triângulo concorrem em um único ponto, de modo que a distância entre esse ponto e cada um dos seus lados é a mesma.

**Definição 1.18.** **Incentro** é o ponto de encontro das bissetrizes do triângulo e o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

**Definição 1.19.** **Mediatriz** de um segmento é a reta perpendicular ele, intersectando-o em seu ponto médio.

**Teorema 1.20.** As mediatrizes de um triângulo qualquer são concorrentes em um ponto equidistante de seus vértices.

**Definição 1.21.** **Circuncentro** é o ponto de encontro das mediatrizes do triângulo e o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

**Definição 1.22.** Os **ângulos internos de um triângulo** são os ângulos formados por dois lados do triângulo e oposto ao terceiro lado.

**Definição 1.23.** Os **ângulos externos de um triângulo** são os ângulos formados por um lado e o prolongamento do outro lado, sendo o ângulo externo adjacente suplementar do ângulo interno.

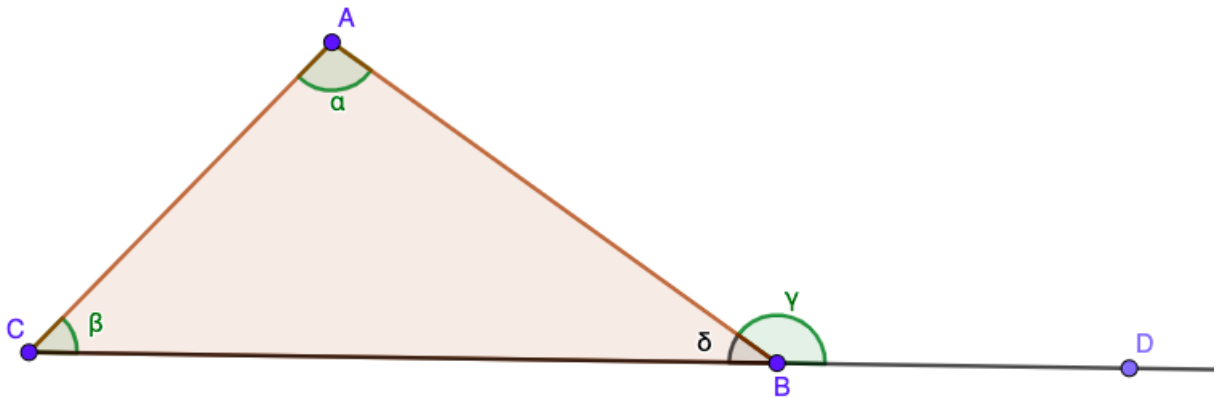
**Definição 1.24.** Os ângulos  $\widehat{AOC}$  e  $\widehat{COB}$  são suplementares quando a soma de suas medidas,  $\alpha$  e  $\beta^2$  respectivamente, é igual a  $180^\circ$ .

**Teorema 1.25.** *Sejam  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$  ângulos suplementares, de modo que  $m(\widehat{A}) = \alpha$  e  $m(\widehat{B}) = 180^\circ - \alpha$ , temos que:*

- $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(180^\circ - \alpha)$
- $\text{cos}(\alpha) = -\text{cos}(180^\circ - \alpha)$

**Teorema 1.26.** (*Propriedade do Ângulo Externo*) *A medida de cada ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Figura 3 – Propriedade do Ângulo Externo



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

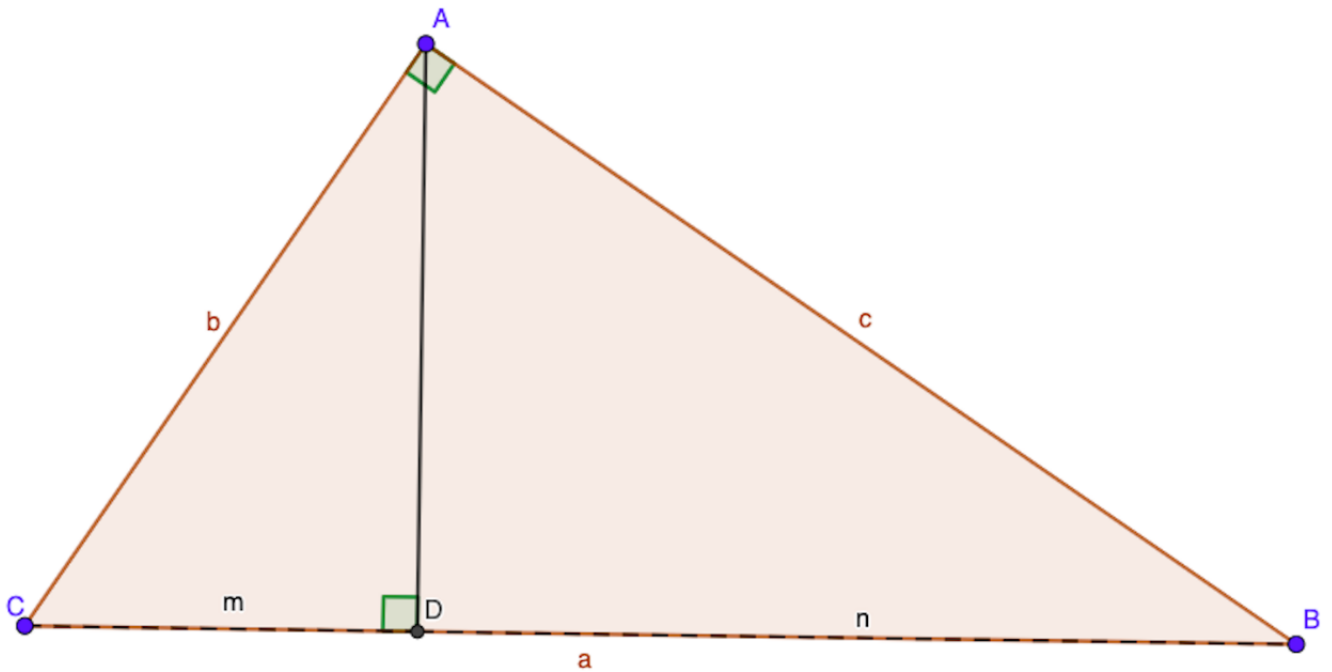
$$\gamma = \alpha + \beta \quad (1.4)$$

<sup>2</sup> Podemos representar a medida do ângulo  $\widehat{COB}$  como  $180^\circ - \alpha$

**Teorema 1.27.** (Teorema de Pitágoras) Considere um triângulo retângulo  $\triangle ABC$  de hipotenusa  $a$  e de catetos  $b$  e  $c$ , opostos aos ângulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , respectivamente. Sabendo disso, vale a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (1.5)$$

Figura 4 – Teorema de Pitágoras



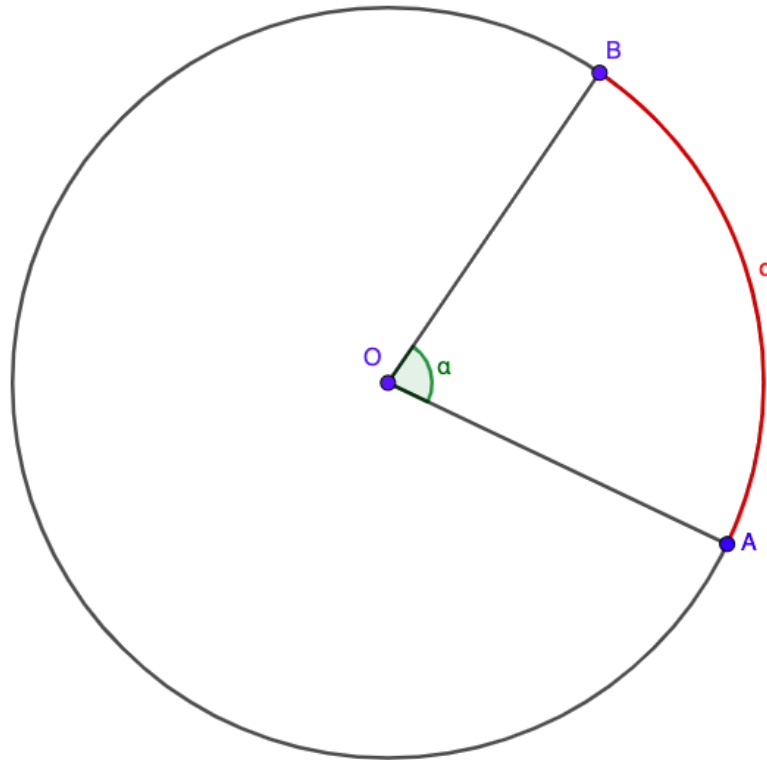
Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

**Definição 1.28.** (Ângulo Central de uma Circunferência): É o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. Na figura, o ângulo  $\hat{AOB}$  é um ângulo central da circunferência, de centro  $O$ . O arco  $\widehat{AB}$  situado no interior do ângulo  $\hat{AOB}$  é denominado arco correspondente ao ângulo

**Teorema 1.29.** *A medida de um ângulo central da circunferência é igual a medida do arco correspondente a ele, de modo que*

$$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AOB}) = \alpha. \quad (1.6)$$

Figura 5 – Ângulo Central de uma Circunferência



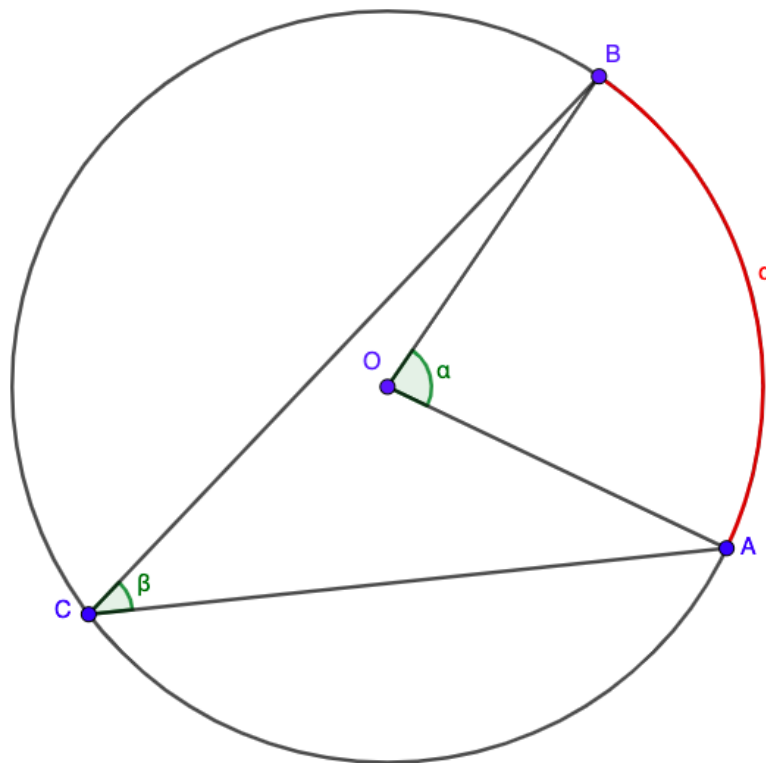
Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

**Definição 1.30.** (Ângulo Inscrito em uma Circunferência): É o ângulo que tem o vértice tangente à circunferência e lados secantes a mesma. Na figura, o ângulo  $\widehat{AOB} = \beta$  é um ângulo inscrito da circunferência, de centro  $O$ .

**Teorema 1.31.** *A medida de um ângulo inscrito da circunferência é igual a metade da medida de seu arco correspondente a ele e, conseqüentemente, a metade da medida do ângulo central de mesmo arco.*

$$\beta = \frac{\alpha}{2} \quad (1.7)$$

Figura 6 – Ângulo Inscrito em uma Circunferência



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

**Teorema 1.32.** (*Relação Fundamental da Trigonometria*) Considere um triângulo retângulo  $\triangle ABC$  de hipotenusa  $a$  e de catetos  $b$  e  $c$ , opostos aos ângulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , respectivamente. Sabendo que  $m(\hat{B}) = \beta$ , vale a relação:

$$\text{sen}^2(\beta) + \text{cos}^2(\beta) = 1 \quad (1.8)$$

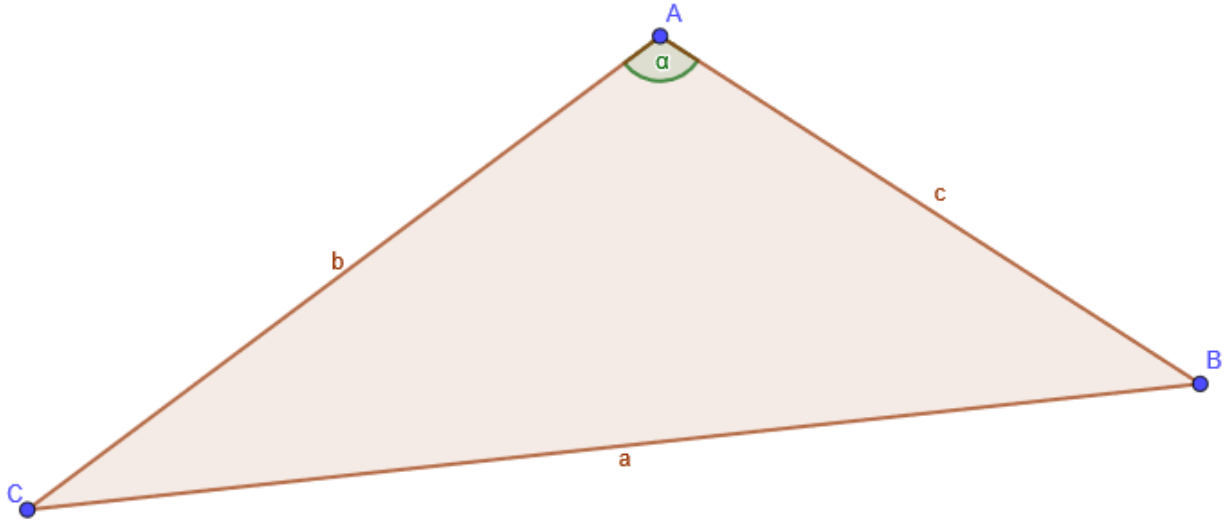
**Definição 1.33.** Consideremos um triângulo  $\triangle ABC$  de lados  $a, b$  e  $c$ . Temos duas possibilidades de triângulos não retângulos: Triângulos acutângulos, em que todos os seus ângulos internos são agudos e Triângulos obtusângulos, apresentando apenas um ângulo obtuso.



**Teorema 1.34.** (*Lei dos Cossenos*) Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer, com  $m(\widehat{A}) = \alpha$ , vale a relação.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\alpha) \quad (1.9)$$

Figura 7 – Lei dos Cossenos

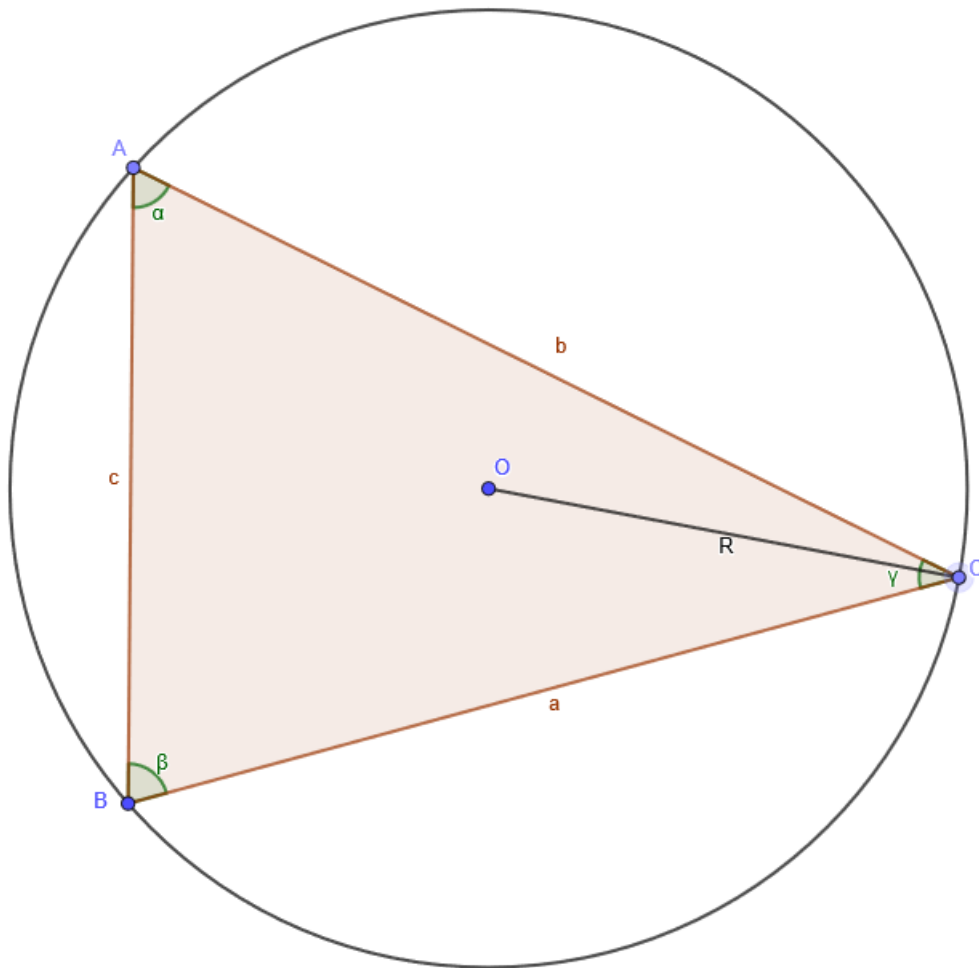


Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

**Teorema 1.35.** (*Lei dos Senos*) Seja  $\triangle ABC$  um triângulo de lados  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$  e ângulos  $m(\widehat{A}) = \alpha$ ,  $m(\widehat{B}) = \beta$  e  $m(\widehat{C}) = \gamma$ . Se  $R$  é o raio do círculo circunscrito ao triângulo  $\triangle ABC$ , como na figura abaixo, então

$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)} = 2R \quad (1.10)$$

Figura 8 – Lei dos Senos



Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

**Definição 1.36.** (Base média de um triângulo) O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é chamado de base média.

**Teorema 1.37.** Seja  $\triangle ABC$  um triângulo e  $\overline{MN}$  sua base média, com  $M$  e  $N$  sobre os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, temos que:

- $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ .
- A medida de  $\overline{MN}$  é igual a metade da medida do lado  $\overline{BC}$ .

# 2 TEOREMAS DE GEOMETRIA PLANA

De acordo com o dicionário Houaiss (2009), Geometria é a "Parte da matemática que investiga o espaço e as formas que podem ocupá-lo". Na prática, de acordo com Antônio Caminha M. Neto (2013), temos que "Os Elementos de Euclides representam a maior síntese do conhecimento humano no período de mil e novecentos anos, até a formulação de Newton da Física". Isso possibilitou a descoberta de vários resultados envolvendo pontos, retas, planos e suas construções, desenvolvendo-se a partir da necessidade do homem e evoluindo com ele.

As cevianas são elementos que eram encontrados frequentemente nos triângulos e que passaram a ser amplamente estudadas em comunhão com os pontos notáveis, possibilitando o estudo dessas relações até hoje. No Ensino Básico, esse conteúdo está presente na grade curricular do 1º ano do Ensino Médio e é visto normalmente de forma expositiva, na qual é apresentada a definição dos principais pontos notáveis e as cevianas relacionadas.

Nas Olimpíadas de Matemática, para explorar as cevianas, podemos perceber a utilização de teoremas com resultados um pouco mais específicos, focados nas relações entre as medidas dessas cevianas e os lados dos triângulos. Os resultados encontrados nesses teoremas são modelados em outras figuras planas possibilitando ampliar mais a descoberta sobre medidas de outros polígonos e circunferências, ampliando ainda mais os resultados encontrados.

Neste trabalho, teremos como foco os Teoremas de Stewart, Menelaus, Ceva, Reta de Euler e Ptolomeu<sup>1</sup>. Esses teoremas foram escolhidos pela sua relevância em problemas abordados nas olimpíadas e por sua aplicabilidade simples, com informações poderosas, que possibilitam a descoberta de resultados utilizando cevianas e segmentos dos triângulos.

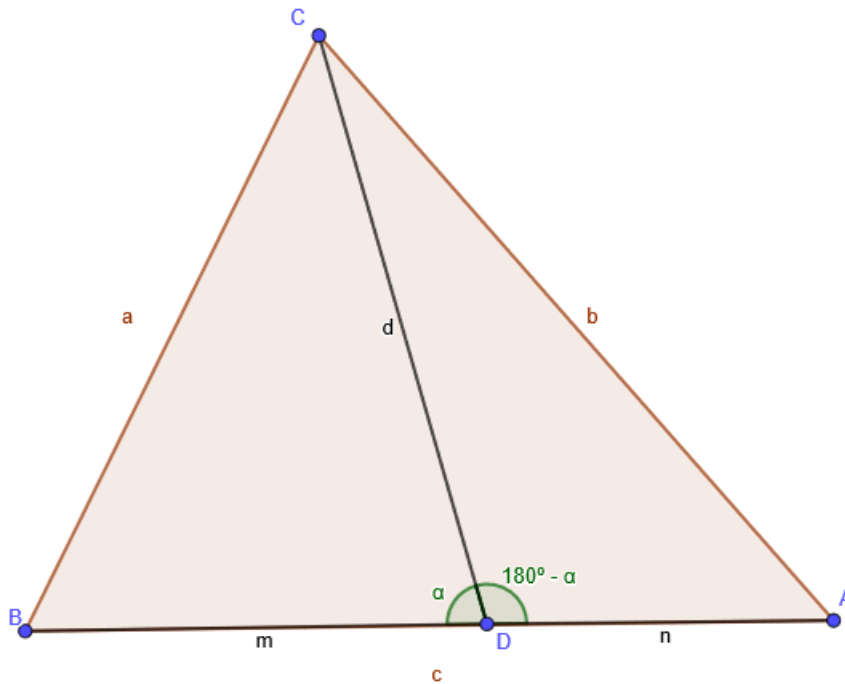
---

<sup>1</sup> O teorema de Ptolomeu, mesmo não sendo um teorema envolvendo cevianas de um triângulo, é muito relevante em problemas envolvendo circunferências e pode auxiliar em problemas que já surgiram em olimpíadas ou em listas para preparação olímpicas

## 2.1 TEOREMAS ABORDADOS EM OLIMPIADAS

**Teorema 2.1.** (Teorema de Stewart) Dados um triângulo  $\triangle ABC$  e um ponto  $D$  do lado  $AB$ , vale a relação  $a^2 \cdot n + b^2 \cdot m - d^2 \cdot c = c \cdot m \cdot n$  onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as medidas dos lados,  $d$  é a ceviana  $\overline{CD}$  e  $m$  e  $n$  são os segmentos determinados pela ceviana  $\overline{CD}$  no lado  $\overline{AB}$ .

Figura 9 – Teorema de Stewart



Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

*Demonstração.* Sejam  $m$  e  $n$  as medidas dos segmentos obtidos pela interseção da ceviana  $\overline{CD}$  com o lado  $AB$ ,  $\alpha$  representa a medida do ângulo  $\widehat{BDC}$  e  $(180^\circ - \alpha)$  a medida do seu suplemento, representado pelo ângulo  $\widehat{ADC}$ . Aplicando a lei dos cossenos aos triângulos  $\triangle BDC$  e  $\triangle ADC$ , respectivamente, temos:

$$a^2 = m^2 + d^2 - 2 \cdot m \cdot d \cdot \cos(\alpha) \quad (2.1)$$

e

$$b^2 = n^2 + d^2 - 2 \cdot n \cdot d \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \quad (2.2)$$

Como  $\cos(\alpha) = -\cos(180^\circ - \alpha)$ , podemos reescrever a equação (2.2) como

$$b^2 = n^2 + d^2 + 2 \cdot n \cdot d \cdot \cos(\alpha) \quad (2.3)$$

Subtraindo a Equação (2.1) da (2.3), temos que:

$$a^2 - b^2 = m^2 - n^2 - 2.d.(m + n).cos(\alpha) \quad (2.4)$$

$$2.d.(m + n).cos(\alpha) = b^2 + m^2 - a^2 - n^2 \quad (2.5)$$

$$cos(\alpha) = \frac{b^2 + m^2 - a^2 - n^2}{2.d.(m + n)} \quad (2.6)$$

Assim, podemos substituir a equação (2.6) na equação (2.1) e encontramos:

$$a^2 = m^2 + d^2 - 2.m.d \cdot \frac{b^2 + m^2 - a^2 - n^2}{2.d.(m + n)}; \quad (2.7)$$

Simplificando  $2d$  e multiplicando toda a equação por  $(m + n)$ , temos que:

$$a^2.(m + n) = m^2.(m + n) + d^2.(m + n) - b^2.m - m^3 + a^2.m + n^2.m; \quad (2.8)$$

$$a^2.m + a^2.n = m^3 + m^2.n + d^2.m + d^2.n - b^2.m - m^3 + a^2.m + n^2.m; \quad (2.9)$$

Substituindo  $m + n = c$ , tem-se:

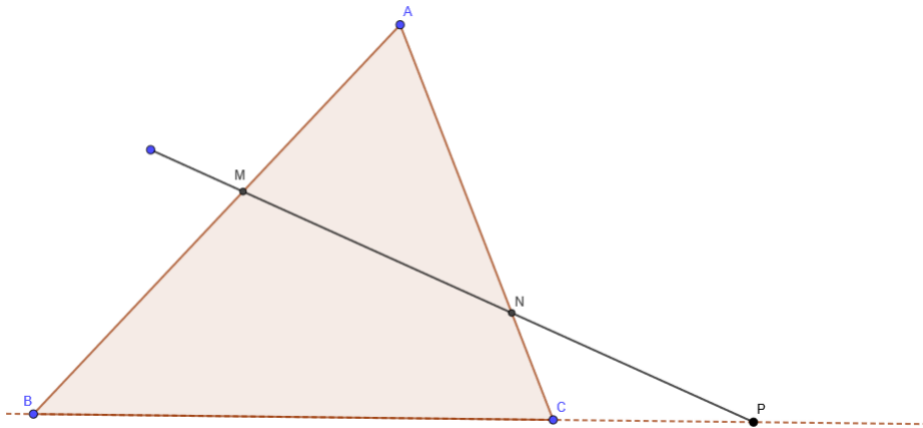
$$a^2.n + b^2.m - d^2.c = c.m.n \quad (2.10)$$

□

**Teorema 2.2.** (Teorema de Menelaus) *Sejam três pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$ , localizados, respectivamente, nos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e na reta suporte do lado  $\overline{BC}$ , de um triângulo  $\triangle ABC$ , de modo que  $M$ ,  $N$  e  $P$  sejam distintos dos vértices de  $\triangle ABC$  e  $C$  está entre  $B$  e  $P$ . Então,  $M$ ,  $N$  e  $P$  são colineares se, e somente se*

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{AN}} = 1 \quad (2.11)$$

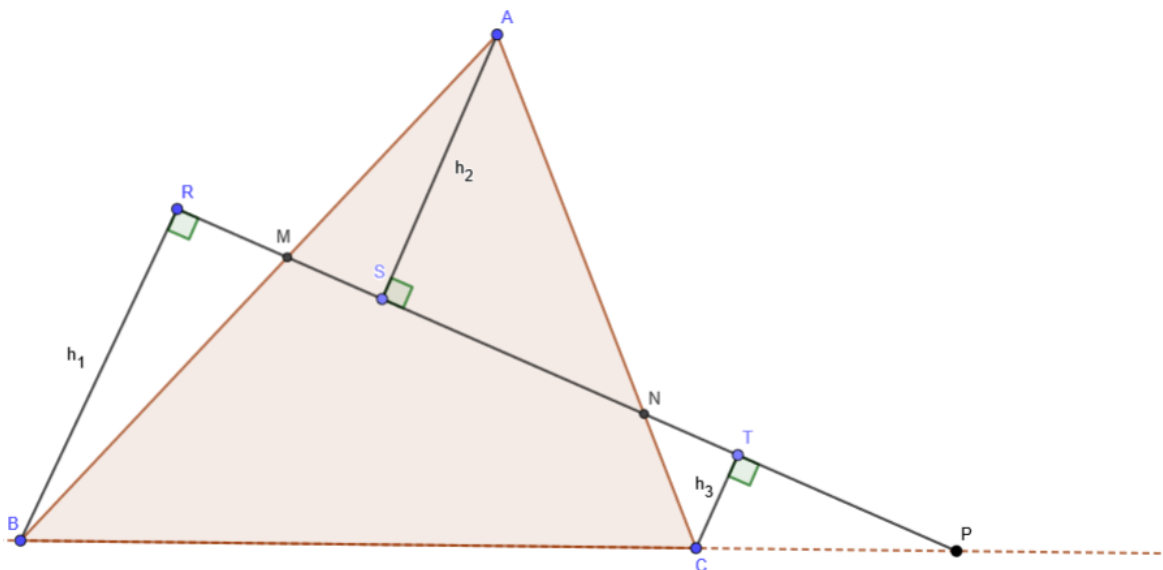
Figura 10 – Teorema de Menelaus



Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que os pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$  sejam colineares. A partir dos vértices  $B$ ,  $A$  e  $C$  do triângulo, traçaremos as alturas  $\overline{BR}$ ,  $\overline{AS}$  e  $\overline{CT}$  de comprimentos  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$ , relativas aos triângulos  $\triangle BRM$ ,  $\triangle AMN$  e  $\triangle CPN$ , respectivamente. E sejam  $R$ ,  $S$  e  $T$  os pés de tais alturas, conforme a figura:

Figura 11 – Teorema de Menelaus



Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

Observe que há semelhança entre os triângulos retângulos  $\triangle RMB$ ,  $\triangle RPB$ ,  $\triangle SNA$  e os triângulos  $\triangle SMA$ ,  $\triangle TPC$  e  $\triangle TNC$ , respectivamente, pois  $\overline{BR}$ ,  $\overline{AS}$  e  $\overline{CT}$  são perpendiculares à  $\overleftrightarrow{MP}$  e, conseqüentemente, paralelas entre si. Então, teremos:

- $\triangle RMB \sim \triangle SMA$ , pelo caso de semelhança (AA) 1.3, pois possuem um dos ângulos oposto pelo vértice, em  $M$ , e um ângulo reto. Por isso, temos:

$$\frac{AM}{BM} = \frac{h_2}{h_1}. \quad (2.12)$$

- $\triangle RPB \sim \triangle TPC$ , pelo caso de semelhança (AA) 1.3, pelos ângulos retos e  $R\hat{P}B \equiv T\hat{P}C$ . Por isso, temos:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{h_1}{h_3}. \quad (2.13)$$

- $\triangle SNA \sim \triangle TNC$ , pelo caso de semelhança (AA) 1.3, pois possuem um dos ângulos oposto pelo vértice, em  $N$ , e um ângulo reto. Por isso, temos:

$$\frac{CN}{AN} = \frac{h_3}{h_2}. \quad (2.14)$$

Multiplicando as três igualdades, temos o seguinte resultado:

$$\left(\frac{AM}{BM}\right) \cdot \left(\frac{BP}{CP}\right) \cdot \left(\frac{CN}{AN}\right) = \left(\frac{h_2}{h_1}\right) \cdot \left(\frac{h_1}{h_3}\right) \cdot \left(\frac{h_3}{h_2}\right) \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CN}{AN} = 1. \quad (2.15)$$

( $\Leftarrow$ ) Para provar a recíproca suponha que  $N$  não pertença a  $\overleftrightarrow{RP}$ , mas vale a relação

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CN}{AN} = 1 \quad (2.16)$$

Por outro lado, sabemos que se  $M$  pertence a  $\overline{AB}$  e  $P$  está na reta suporte de  $\overline{BC}$ , existe um ponto  $N'$  pertencente a  $\overline{AC}$ , de modo que vale a relação:

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CN'}{AN'} = 1 \quad (2.17)$$

Igualando as equações 2.16 e 2.17 temos:

$$\frac{CN}{AN} = \frac{CN'}{AN'} \quad (2.18)$$

Aplicando a propriedade de proporções 1.7, temos:

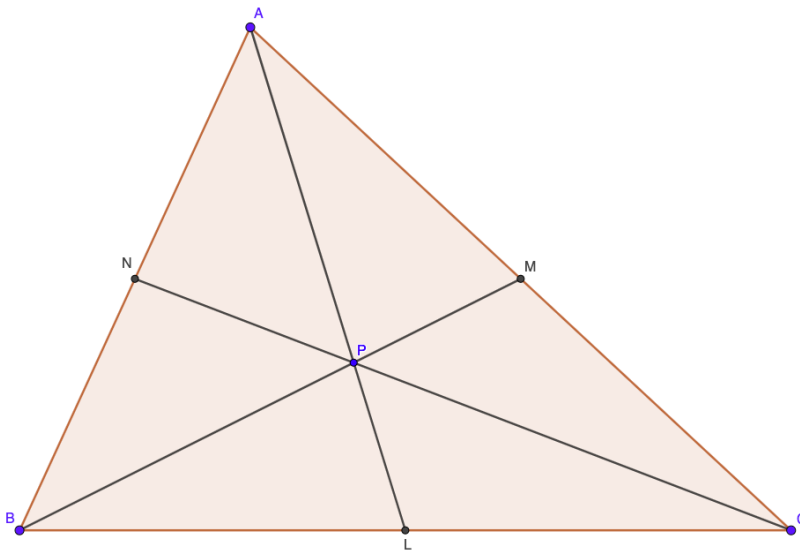
$$\frac{CN + AN}{AN} = \frac{CN' + AN'}{AN'} \quad (2.19)$$

E como  $CN + AN = CN' + AN' = \overline{AC}$ , simplificamos os numeradores, concluindo que  $\overline{AN} = \overline{AN'}$ , tornando  $N = N'$  e  $R, N$  e  $P$  colineares.  $\square$

**Teorema 2.3.** (Teorema de Ceva) Sejam  $L$ ,  $M$ , e  $N$  pontos, respectivamente, sobre os lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  do triângulo  $\triangle ABC$ . As cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  intersectam-se em um ponto  $P$ , se e somente se,

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1 \quad (2.20)$$

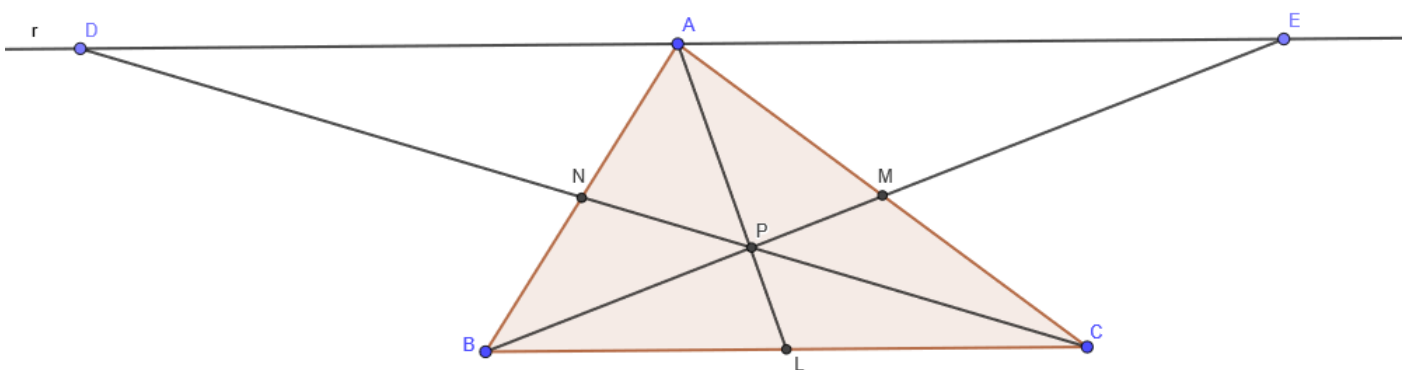
Figura 12 – Teorema de Ceva



Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que as cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  do triângulo  $\triangle ABC$  são concorrentes no ponto  $P$ . Traçaremos pelo ponto  $A$ , uma reta  $r$  paralela à reta suporte do lado  $\overline{BC}$ . Agora, prolongaremos as cevianas  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  até interceptar a reta  $r$ , nos pontos  $E$  e  $D$ , respectivamente, como segue a figura.

Figura 13 – Demonstração Teorema de Ceva



Fonte: Produzido pelo autor, 2019.



Observe que os triângulos listados abaixo são semelhantes.

- $\triangle DNA \sim \triangle CNB$ , pelo caso de semelhança (AA) 1.3, temos:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CB}} \quad (2.21)$$

- $\triangle EPA$  e  $\triangle BPL$ , pelo caso de semelhança (AA) 1.3, temos:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PL}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BL}} \quad (2.22)$$

e  $\triangle DPA$  e  $\triangle CPL$ , pelo caso de semelhança (AA) 1.3, temos:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PL}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CL}} \quad (2.23)$$

Note que  $\frac{\overline{PA}}{\overline{PL}}$  é igual nas equações 2.22 e 2.23, então:

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \quad (2.24)$$

- $\triangle EMA$  e  $\triangle BMC$ , pelo caso de semelhança (AA) 1.3, temos:

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AE}} \quad (2.25)$$

Multiplicando as três equações acima, 2.21, 2.24 e 2.25 temos:

$$\left(\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}}\right) = \left(\frac{\overline{AD}}{\overline{CB}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{CB}}{\overline{AE}}\right) \Leftrightarrow \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

( $\Leftarrow$ ) Suponha que os segmentos  $\overline{AL}$  e  $\overline{CN}$  concorram em  $P$ , mas  $\overline{CN}$  não. Pela hipótese, vale:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1 \quad (2.26)$$

Por outro lado, considere o ponto  $M'$  de modo que  $\overline{BM'}$  concorra com  $\overline{AL}$  e  $\overline{CN}$  em  $P$ . Consequentemente, por hipótese, vale:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{M'C}}{\overline{M'A}} = 1 \quad (2.27)$$

Igualando as equações 2.26 e 2.27 temos:

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{M'C}}{\overline{M'A}} \quad (2.28)$$

Aplicando a propriedade de proporções 1.7, temos:

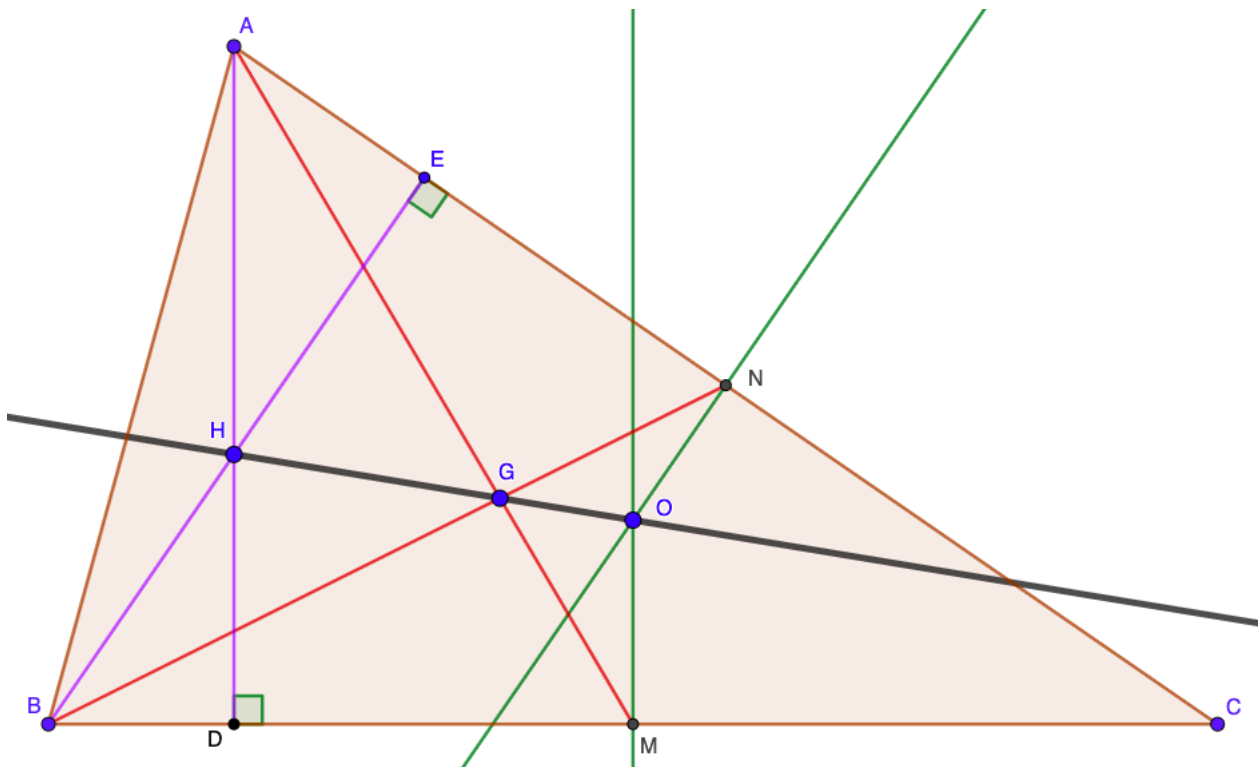
$$\frac{\overline{MC} + \overline{MA}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{M'C} + \overline{M'A}}{\overline{M'A}} \quad (2.29)$$

E como  $\overline{MC} + \overline{MA} = \overline{AC} = \overline{M'C} + \overline{M'A}$ , simplificamos os numeradores, concluindo que  $\overline{MA} = \overline{M'A}$ , tornando  $M \equiv M'$  e os segmentos  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  intersectam-se em um ponto  $P$ .  $\square$

**Teorema 2.4.** (Reta de Euler) Em um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, em que o baricentro ( $G$ ), o ortocentro ( $H$ ), e o circuncentro ( $O$ ), se o baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro e sua distância ao ortocentro é o dobro de sua distância ao circuncentro e  $H$ ,  $G$  e  $O$  são colineares.

$$\overline{HG} = 2 \cdot \overline{OG} \quad (2.30)$$

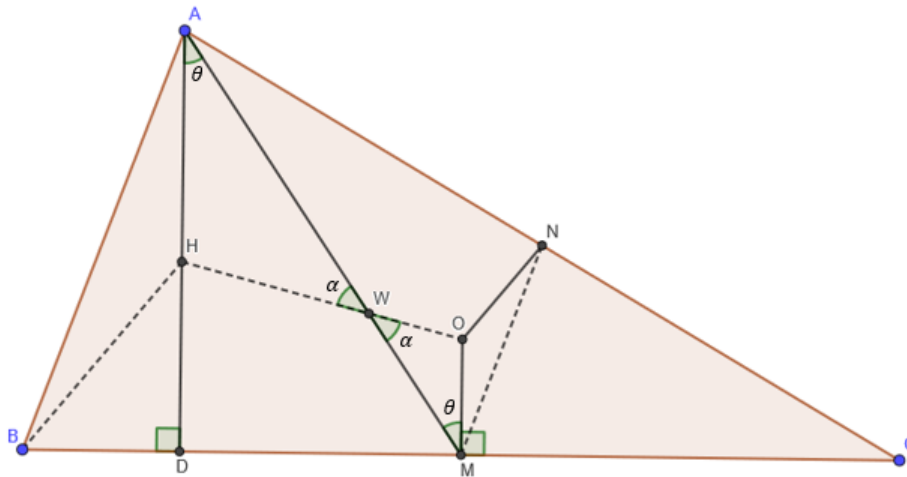
Figura 14 – Reta de Euler



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

*Demonstração.* No triângulo  $\triangle ABC$ ,  $H$  representa o ortocentro e  $O$  o circuncentro. Para mostrar que a relação é verdadeira vamos construir um ponto  $W$ , como interseção entre a mediana  $\overline{AM}$  e o segmento  $\overline{OH}$ , e provar que nele vale a razão desejada, bem como sua sobreposição com o baricentro  $G$ .

Figura 15 – Reta de Euler



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Como  $H$  é o ortocentro de  $\triangle ABC$ ,  $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ . E sendo  $M$  e  $N$  os pontos médios, respectivamente, de  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , então  $\overline{MN}$  é a base média 1.37 do triângulo  $\triangle ABC$  em relação ao lado  $\overline{AB}$ . Com isso, sabemos que vale:

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{MN} \quad (2.31)$$

Com isso, observe os triângulos  $\triangle AHB$  e  $\triangle MON$  e perceba que  $\overline{AH} \parallel \overline{OM}$ , por serem perpendiculares a  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BH} \parallel \overline{ON}$ , por serem perpendiculares a  $\overline{AC}$  e  $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ , pelo teorema da base média 1.37.

Sendo todos os lados paralelos e  $\frac{\overline{AH}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = 2$ , então  $\triangle AHB \sim \triangle MON$  e

$$\overline{AH} = 2 \cdot \overline{OM}. \quad (2.32)$$

Agora, observe que os triângulos  $\triangle AHW$  e  $\triangle MOW$  são semelhantes, pelo caso (AA) 1.3 pois  $\widehat{HAW} \equiv \widehat{MOW} = \theta$  e  $\widehat{AWH} \equiv \widehat{MWO} = \alpha$ . Portanto:

$$\frac{\overline{AW}}{\overline{WM}} = \frac{\overline{HW}}{\overline{WO}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{OM}} = 2 \Rightarrow \overline{AW} = 2 \cdot \overline{WM} \quad (2.33)$$

e

$$\overline{HW} = 2.\overline{WO} \quad (2.34)$$

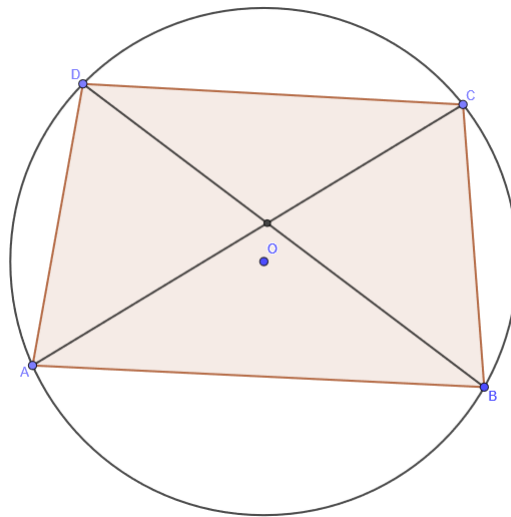
Como  $W$  é um ponto da mediana  $\overline{AM}$ , tal que  $\overline{AW} = 2.\overline{WM}$  então  $W$  é necessariamente o baricentro 1.10 do triângulo  $\triangle ABC$ . Assim, como  $W = G$  e  $\overline{HW} = 2.\overline{WO}$ , podemos concluir que  $H$ ,  $G$  e  $O$  são colineares e:

$$\overline{HG} = 2.\overline{GO} \quad (2.35)$$

□

**Teorema 2.5.** (Teorema de Ptolomeu) *Seja  $ABCD$  um quadrilátero qualquer inscrito numa circunferência, a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto de suas diagonais.*

Figura 16 – Teorema de Ptolomeu



Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

$$\overline{AC}.\overline{BD} = \overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD} \quad (2.36)$$

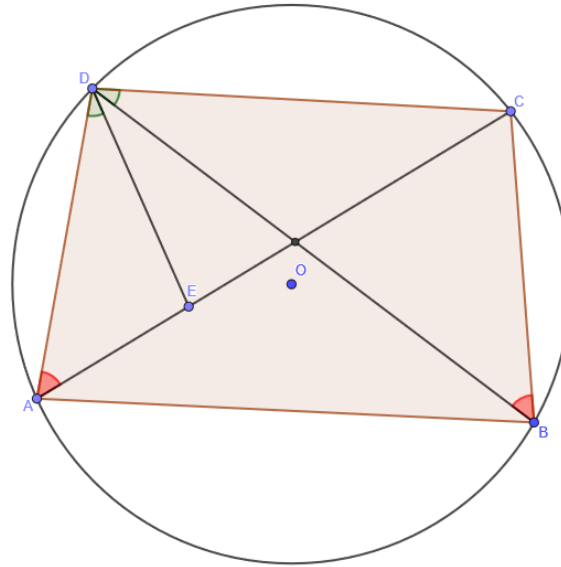
*Demonstração.* Seja o  $ABCD$  um quadrilátero inscrito na circunferência e  $E$  um ponto sobre  $\overline{AC}$  de modo que  $\widehat{ADE} \equiv \widehat{CDB}$ .

Pelo Teorema do Ângulo Inscrito 1.31 na circunferência, temos que  $\widehat{CAD} \equiv \widehat{CBD}$ , pois esses ângulos estão inscritos na circunferência sobre o mesmo arco  $\widehat{DC}$ .

Assim,

$$\widehat{DAE} \equiv \widehat{CBD}$$

Figura 17 – Teorema de Ptolomeu



Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

$$\widehat{CDB} \equiv \widehat{ADE}$$

Portanto, pelo caso de semelhança (AA) 1.3, os triângulos  $\triangle ADE$  e  $\triangle BCD$  são semelhantes.

Portanto,

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}, \quad (2.37)$$

logo,

$$\overline{AE} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{AD} \quad (2.38)$$

Pelo Teorema do Ângulo Externo 1.4, aplicado ao  $\triangle AED$  temos que:

$$\widehat{CED} = \widehat{ADE} + \widehat{DAE} \quad (2.39)$$

Note que os ângulos  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{CDB}$  estão inscritos sobre o arco  $\widehat{BC}$ , então  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{CDB}$  e por construção  $\widehat{BDC} \equiv \widehat{ADE}$ . Consequentemente, por transitividade, temos que  $\widehat{DEC} \equiv \widehat{BAD}$  e  $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACD}$ .

Portanto, pelo caso de semelhança (1.3), temos  $\triangle CDE \sim \triangle ABD$ , Temos:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}, \quad (2.40)$$

logo,

$$\overline{CE} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} \quad (2.41)$$

Somando cada membro das equações 2.38 e 2.41 temos:

$$\overline{CE} \cdot \overline{BD} + \overline{AE} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \quad (2.42)$$

Colocando  $\overline{BD}$  em evidência, temos:

$$\overline{BD} \cdot (\overline{CE} + \overline{AE}) = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \quad (2.43)$$

Sabendo que  $\overline{CE} + \overline{AE} = \overline{AC}$ , podemos escrever a equação acima da seguinte forma:

$$\overline{BD} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \quad (2.44)$$

□

# 3 OLIMPÍADAS DO CONHECIMENTO

Medalhas, prêmios, certificados, reconhecimento e, por vezes, vagas em universidades são alguns dos benefícios que as olimpíadas do conhecimento trazem para os alunos. Porém, o principal foco desses eventos é o incentivo à participação dos jovens no mundo acadêmico/científico, sempre despertando a criatividade, ideias, técnicas e conhecimentos nas diversas áreas do ensino. Essas competições costumam relacionar várias escolas e universidades de diversas cidades, estados e até países, promovendo uma relação entre alunos e universidades, podendo facilitar a escolha profissional desses estudantes.

Tendo como foco as olimpíadas de Matemática, neste capítulo encontramos informações sobre algumas das mais conhecidas olimpíadas internacionalmente, trazendo um pouco da sua história, níveis de competição, regras e alguns detalhes relevantes sobre cada uma das olimpíadas citadas. Também encontraremos alguns problemas olímpicos, trazidos nessas olimpíadas ou em suas shortlists (uma lista de problemas, disponibilizada pela comissão olímpica, com o objetivo de ajudar na preparação para as provas) que foram baseados nos teoremas citados anteriormente, focando na sua aplicação e abstração dos resultados.

As informações sobre as olimpíadas, citadas abaixo, foram extraídas do Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC, que é uma iniciativa sem fins lucrativos disposta a disseminar informações sobre as Olimpíadas Científicas e auxiliar na preparação de alunos que se interessem por essas competições. Esse projeto foi encabeçado por jovens que já tinham experiência na participação em olimpíadas. Como o interesse desta dissertação também é incentivar cada vez mais a participação de jovens em olimpíadas, fica aqui uma sugestão para os leitores acessarem o site do NOIC e pesquisar sobre as olimpíadas que mais lhe interessam.

As informações estão disponíveis em: <<https://noic.com.br/>>, último acesso 10/09/2020.

- **Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM):** De acordo com o histórico, no site da olimpíada, ela foi realizada pela primeira vez em 1979. A OBM é a olimpíada mais antiga competição nacional para os estudantes do Ensino Fundamental, a partir do 6º ano, e médio.

É formada por uma organização conjunta entre a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Em 2017, a OBM se integrou com a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), que também passou a aceitar inscrições de escolas privadas, aderindo as duas primeiras fases da OBMEP como classificação para a fase única da OBM, que se tornou um meio de classificação para

olimpíadas internacionais.

A OBM é composta por convidados e os melhores classificados nacionais da OBMEP. É dividida em três níveis de escolaridade; o nível 1, com alunos do 6º e 7º ano; o nível 2, com alunos do 8º e 9º ano; o nível 3, com alunos do 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio. Atualmente, a OBM é realizada com 900 alunos, 300 de cada nível, convidados de acordo com a classificação na OBMEP e os medalhistas da OBM do ano anterior.

Todos os dados citados acima foram retirados do site oficial da OBM, disponível no link: <<https://www.obm.org.br/quem-somos/historico/>>, último acesso em 10/09/2020.

- **Olimpíada Internacional de Matemática (IMO):** A IMO é o maior evento olímpico do mundo e vem sendo realizada desde 1959. Os seus principais objetivos são descobrir, encorajar e desafiar jovens matemáticos de todos os países. O torneio conta com a participação de cerca de 600 estudantes de mais de 100 países de todo o mundo.

A realização da prova acontece em 2 dias, cada um com 3 problemas abrangendo as disciplinas de álgebra, teoria dos números, combinatória e geometria (cada questão tem pontuação máxima de 7 pontos) e duração máxima de 4 horas e meia.

A seleção de alunos no Brasil é organizada pela Comissão da Olimpíada Brasileira de Matemática. A primeira fase é obtida com o resultado da OBM, além de 4 testes como fases seguintes.

Para mais informações acesse: <<https://www.imo-official.org/>>, último acesso em 10/09/2020.

- **Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO):** A competição acontece desde 2014, tem como intenção em focar na Geometria e reunir várias ideias sobre o assunto. Ganhou proporções internacionais em 2015, realizada simultaneamente em diferentes países do mundo. Os principais objetivos da IGO são:

- Popularização do pensamento geométrico entre as pessoas diferentes;
- Identificar os talentos da geometria no país e depois apresentar um direção científica adequada para eles;
- Abrir caminho para que os amantes da geometria ampliem sua comunicação em seu país de origem e ao redor do mundo.

A prova é dividida em 4 níveis e são eles: Nível elementar (7º e 8º anos do Ensino Fundamental); nível intermediário (9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio); nível avançado (2º e 3º anos do Ensino Médio); nível livre (sem limite de idade e ano escolar). Com valor total de 40 pontos, cada prova tem 5 problemas de geometria, podendo valer no máximo 8 pontos. O tempo de duração da prova é de 4 horas e meia.

- **Olimpíada de Matemática do Cone Sul (Conesul):** A Olimpíada de Matemática dos países do Cone Sul é uma olimpíada internacional em que os países da porção meridional



da América do Sul competem em equipes, de 4 estudantes, todos menores de 17 anos. Essa competição incentiva que os participantes demonstrem suas habilidades e criatividade em matemática, também possibilitando a troca de conhecimentos e a interação intercultural entre estudantes de diversos países latino-americanos.

As provas são distribuídas em dois dias consecutivos, contendo três problemas de Matemática, em cada dia, com tempo de quatro horas e meia. Os problemas são propostos pelos países participantes e selecionados por um júri internacional. Os problemas abrangem as disciplinas de álgebra, teoria dos números, geometria e combinatória.

Para garantir sua vaga nessa olimpíada o estudante deve ter sido medalhista (Níveis 2 e 3) e menções honrosas (Nível 3) da OBM do ano imediatamente anterior. Porém, cabem recursos à comissão organizadora para participar da Seletiva.

Para mais informações acesse:

<https://www.obm.org.br/olimpiada-de-matematica-do-cone-sul/>,

último acesso em 10/09/2020.

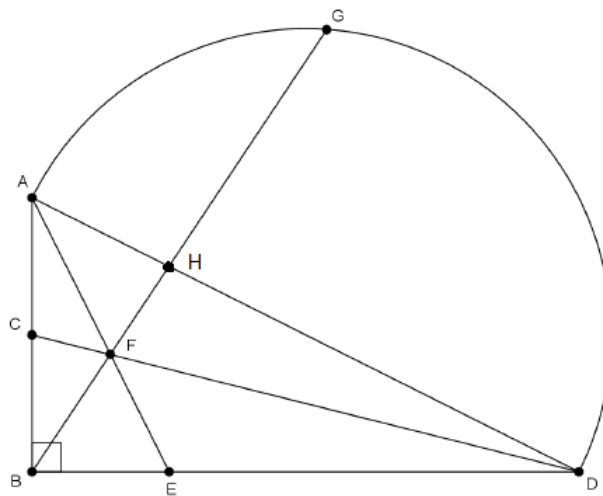
### 3.1 PROBLEMAS OLÍMPICOS

De modo geral, essas olimpíadas são bastante desafiadoras e são excelentes vitrines para jovens estudantes, favorecendo na entrada das melhores universidades do mundo, agregando ao currículo do alunos e abrindo muitas portas. Por isso, vamos analisar algumas questões, sobre cevianas, que já fizeram parte do portfólio dessas olimpíadas e mostrar algumas soluções práticas utilizando os teoremas citados acima.

Para ter acesso aos problemas e possíveis soluções utilizamos os materiais disponibilizados por cada uma das olimpíadas, shortlists e provas anteriores, como indicado em cada uma das questões. Além do que era disponibilizado pelas olimpíadas, podemos encontrar as outras questões no The IMO Compendium, com problemas propostos de 1959 até 2004 e em Mathematical Olympiads de Andreescu e Feng de 1998, 1999, 2000 e 2001.

**Problema 3.1.** (2ª fase OBM - 2016) Na figura abaixo,  $\overline{AB} = 4$ ,  $\overline{BD} = 8$ ,  $\overline{CB} = \overline{BE} = 2$  e  $AGD$  é um semicírculo de diâmetro  $\overline{AD}$ . Sendo  $\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = \frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  inteiros primos entre si, calcule  $p^q$

Figura 18 – Figura do Problema Olímpico 1



Fonte: 2ª fase OBM - 2016

**Solução 3.2.** Temos  $\overline{AC} = \overline{AB} - \overline{BC} = 4 - 2 = 2$ . Pelo Teorema de Ceva 2.3, sendo  $H$  a interseção de  $\overline{BG}$  e  $\overline{AD}$ ,

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{ED}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{DH}}{\overline{HA}} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{ED}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{DH}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BE}}. \quad (3.1)$$

Assim, os triângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle HED$  são semelhantes, já que dois de seus lados correspondentes são proporcionais e o ângulo entre eles é comum aos dois triângulos. Portanto,  $\overline{EH} \parallel \overline{AB}$ .

Então  $\overline{EH} \perp \overline{BE}$ , e sendo  $\triangle HED$  e  $\triangle ABD$  semelhantes,

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{EH} = \frac{4.6}{8} = 3 \quad (3.2)$$

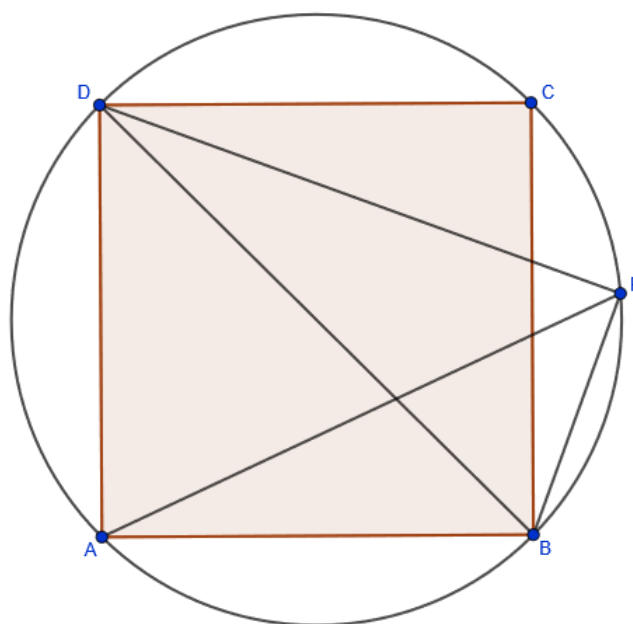
Portanto, como  $m(\widehat{ABD}) = 90^\circ$  e os extremos do seu arco são extremos do diâmetro  $\overline{AD}$ , o ponto  $B$  pertence a circunferência e o quadrilátero  $ABDG$  é inscritível. Com isso,  $\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}}$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}(\widehat{GAD})} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\widehat{GBD})} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EH}} = \frac{2}{3}.$$

Logo  $p = 2$ ,  $q = 3$  e  $p^q = 2^3 = 8$

**Problema 3.3.** (Seletiva do Brasil para a Cone Sul - POTI, 2012) Prove que as distâncias entre um ponto sobre uma circunferência e os quatro vértices de um quadrado nesta inscrita não podem ser todas números racionais.

Figura 19 – Seletiva do Brasil para a Cone Sul - POTI 2012



Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

**Solução 3.4.** Como  $ABCD$  é um quadrado então  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras 1.27 no triângulo  $\triangle ABC$  temos que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = a^2 + a^2 = 2.a \Leftrightarrow \overline{AC} = a\sqrt{2}$$

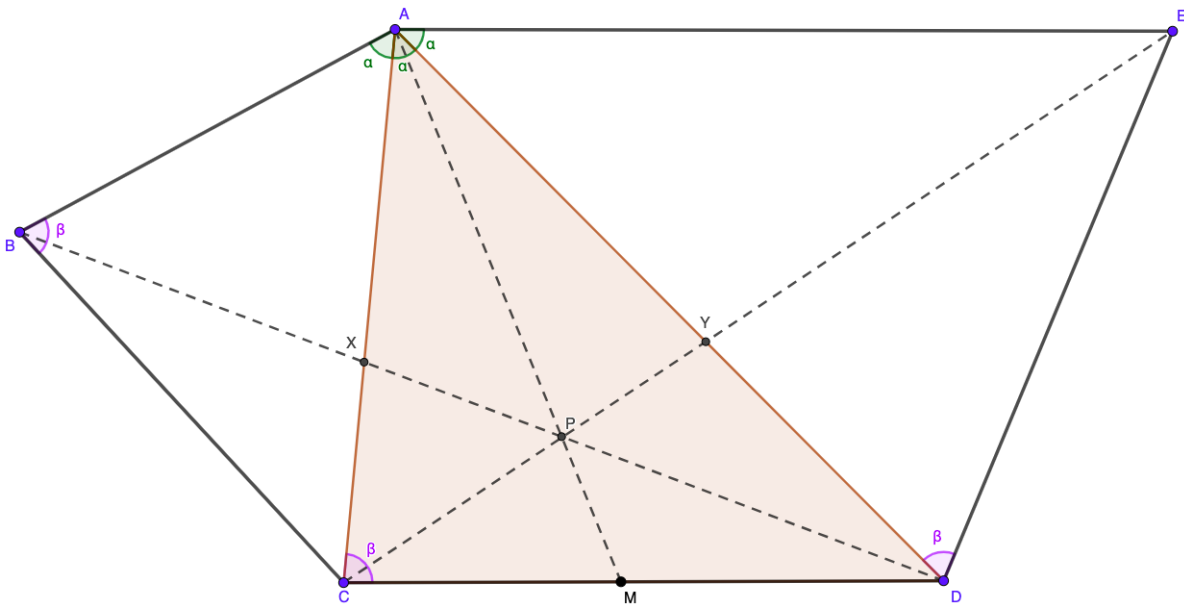
Seja  $P$  o ponto sobre a circunferência e aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero  $ABCP$ , temos:

$$\overline{AP} \cdot \overline{BC} = \overline{BP} \cdot \overline{AC} + \overline{CP} \cdot \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AP} \cdot a = \overline{BP} \cdot a\sqrt{2} + \overline{CP} \cdot a \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{\overline{AP} - \overline{CP}}{\overline{BP}} \quad (3.3)$$

Se considerarmos que todas as medidas fossem números racionais, concluiríamos que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , e no caso de  $P$  coincidir com um dos vértices, então  $\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \sqrt{2}$ , o que seria um absurdo pois a divisão de dois números racionais sempre é racional. Logo, as medidas não podem ser todas racionais.

**Problema 3.5.** (Shortlist - 47º IMO Slovenia, 2006) Seja o  $ABCDE$  um pentágono convexo, de modo que  $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE}$  e  $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{ADE}$ . As diagonais  $\overline{BD}$  e  $\overline{CE}$  se encontram em  $P$ . Prove que a reta  $\overline{AP}$  bissecta o lado  $\overline{CD}$ .

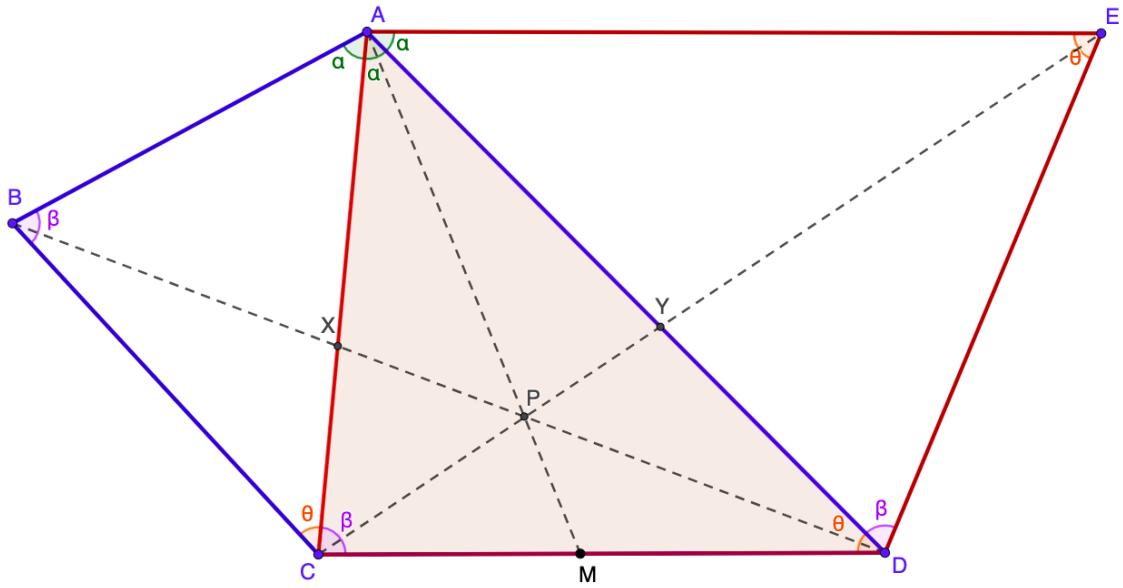
Figura 20 – Figura Shortlist 2006 IMO



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

**Solução 3.6.** Seja  $X$  a interseção das diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ . Seja  $Y$  a interseção das diagonais  $\overline{AD}$  e  $\overline{CE}$ . Nessas condições temos que  $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle ADE$ , com isso, podemos observar que os quadriláteros  $ABCD$  e  $ACDE$  são semelhantes 1.6.

Figura 21 – Figura Shortlist 2006 IMO



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Como todos os lados são proporcionais,  $X$  é a interseção das diagonais de  $ABCD$  e  $Y$  é a interseção das diagonais de  $ACDE$ , então os segmentos  $\overline{AX}$  e  $\overline{CX}$  são proporcionais aos segmentos  $\overline{AY}$  e  $\overline{YD}$ , respectivamente. Em particular, temos que  $\frac{AX}{XC} = \frac{AY}{YD}$ . Como  $\overline{AP}$  intercepta  $\overline{CD}$  em  $M$ , pelo Teorema de Ceva 2.3 aplicado ao  $\triangle ACD$  implica em  $\left(\frac{AX}{XC}\right) \cdot \left(\frac{CM}{MD}\right) \cdot \left(\frac{DY}{YA}\right) = 1$ , então  $\overline{CM} = \overline{MD}$ .

**Problema 3.7.** (Shortlist - IGO - Problems, 2015) Considere dois paralelogramos  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  tais que  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$  e  $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ . Seja  $P$  a interseção de  $\overline{BB'}$  e  $\overline{DD'}$ . Prove que  $P$ ,  $A$  e  $C'$  são colineares se  $P$ ,  $C$ ,  $A'$  são colineares.

**Solução 3.8.** Suponha que  $P$ ,  $A$  e  $C'$  sejam colineares. Mostraremos que  $P$ ,  $C$  e  $A'$  são colineares. Sejam  $C''$ ,  $A''$ ,  $X$  e  $Y$  as interseções entre  $\overline{PC}$  e  $\overline{B'C'}$ ;  $\overline{PA}$  e  $\overline{A'B'}$ ;  $\overline{PC'}$  e  $\overline{A'D'}$ ;  $\overline{PD}$  e  $\overline{A'B'}$ , respectivamente. Considere a reta que passa por  $A''$  e seja paralela a  $\overline{AD}$ . Suponha que essa reta cruza  $\overline{PD'}$  em  $D''$ . Sabemos que os dois paralelogramos  $ABCD$  e  $A''B'C''D''$  são semelhantes 1.6. Mostraremos que  $C''$ ,  $A'$  e  $P$  são colineares. De acordo com o Teorema de Menelau's 2.2 no  $\triangle A'YD'$  por colinearidade em  $X$ ,  $A''$  e  $P$ , temos:

$$\frac{\overline{A'X}}{\overline{XD'}} \cdot \frac{\overline{PD'}}{\overline{PY}} \cdot \frac{\overline{YA''}}{\overline{A'A'}} = 1 \quad (3.4)$$



de acordo com as equações 3.4, 3.7, 3.10 e 3.11, temos que:

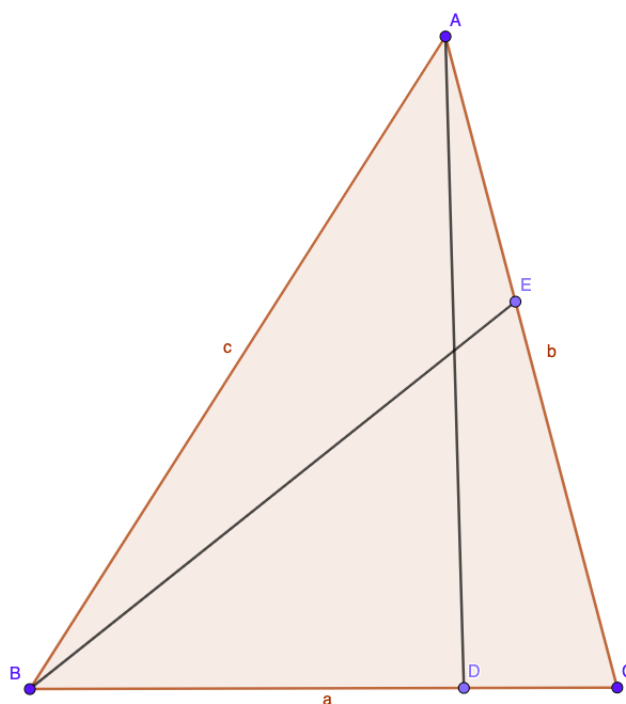
$$\frac{\overline{B'C''}}{\overline{C''C'}} \cdot \frac{\overline{PC'}}{\overline{PA''}} \cdot \frac{\overline{A''A'}}{\overline{A'B'}} = 1 \quad (3.12)$$

Por construção,  $C''$  pertence a reta que passa por  $P$  e  $C''$ . Portanto,  $C''$ ,  $A'$  e  $P$  são colineares, de acordo com o Teorema de Menelaus 2.2 em  $\triangle A''B'C$ . Com isso podemos concluir que  $P$ ,  $C$  e  $A'$  são colineares.

**Problema 3.9.** (Shortlist - IMO National Contests Polônia, 1999) Seja um ponto  $D$ , sobre o lado  $\overline{BC}$ , do triângulo  $\triangle ABC$ , de modo que  $\overline{AD} > \overline{BC}$ . Seja o ponto  $E$ , sobre o lado  $\overline{AC}$ , definido pela equação:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD} - \overline{BC}}$$

Figura 23 – Figura Shortlist IMO



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Demonstre que  $\overline{AD} > \overline{BE}$ .

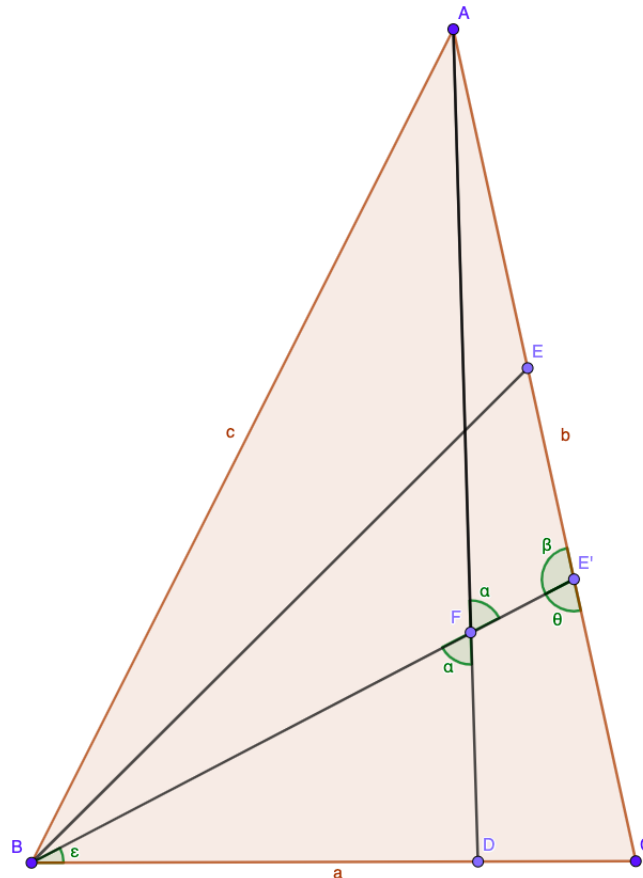
**Solução 3.10.** Seja  $F$  o ponto em  $\overline{AD}$ , tal que  $\overline{FA} = \overline{BC}$ , e o segmento  $\overline{BF}$  intercepta  $\overline{AC}$  em  $E'$ . Pela lei dos senos 1.35, temos que:

$$\overline{AE'} = \overline{FA} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{AFE'})}{\text{sen}(\widehat{FE'A})} = \overline{CB} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{DFB})}{\text{sen}(\widehat{CE'F})} \quad (3.13)$$

e

$$\overline{E'C} = \overline{CB} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{E'BC})}{\text{sen}(\widehat{CE'B})} = \overline{CB} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{FBD})}{\text{sen}(\widehat{CE'F})}. \quad (3.14)$$

Figura 24 – Figura Shortlist IMO



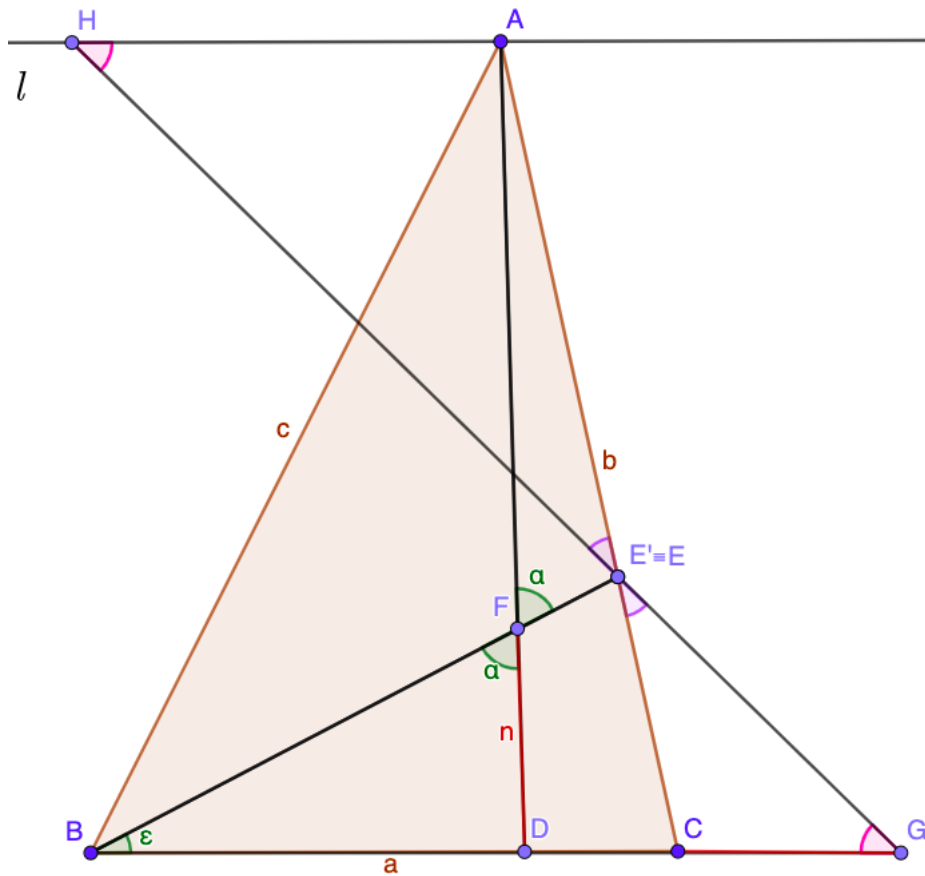
Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Consequentemente 
$$\frac{\overline{AE'}}{\overline{E'C}} = \frac{\text{sen}(\widehat{DFB})}{\text{sen}(\widehat{FBD})} = \frac{\overline{DB}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD} - \overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}.$$

Com isso, pela propriedade de proporções 1.7 em  $\frac{\overline{AE'}}{\overline{E'C}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ ,  $\overline{EC} = \overline{E'C}$ . Portanto  $E' = E$ .



Figura 25 – Figura Shortlist IMO



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Seja  $l$  a reta que passa por  $A$ , paralela ao lado  $\overline{BC}$ . Construa  $G$  no prolongamento do lado  $\overline{BC}$ , com  $C$  entre  $B$  e  $G$ , tal que  $\overline{BG} = \overline{AD}$  e  $\overline{CG} = \overline{FD}$ , e as retas  $\overline{GE}$  e  $l$  se interceptam em  $H$ . Note que os triângulos  $\triangle ECG$  e  $\triangle EAH$  são semelhantes, então:  $\overline{AH} = \overline{CG} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \overline{FD} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ . Aplicando o Teorema de Menelaus 2.2 no triângulos  $\triangle CAD$  e no segmento  $\overline{EB}$ , temos:

$$\frac{\overline{CE} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{DB}}{\overline{EA} \cdot \overline{FD} \cdot \overline{BC}} = 1$$

$$\text{Desse modo, } \overline{AH} = \overline{DF} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \overline{FD} \cdot \frac{\overline{AF} \cdot \overline{DB}}{\overline{FD} \cdot \overline{BC}} = \overline{DB} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{BC}} = \overline{DB}.$$

Mostrando que o quadrilátero  $BDAH$  é um paralelogramo e que  $\overline{BH} = \overline{AD}$ . O resultado, então, é o de que  $\triangle BGH$  seja isósceles, com  $\overline{BH} = \overline{BG} = \overline{AD}$  e já que  $\overline{BE}$  é uma ceviana desse triângulo, temos  $\overline{BE} < \overline{BH} = \overline{AD}$ , como queríamos demonstrar.

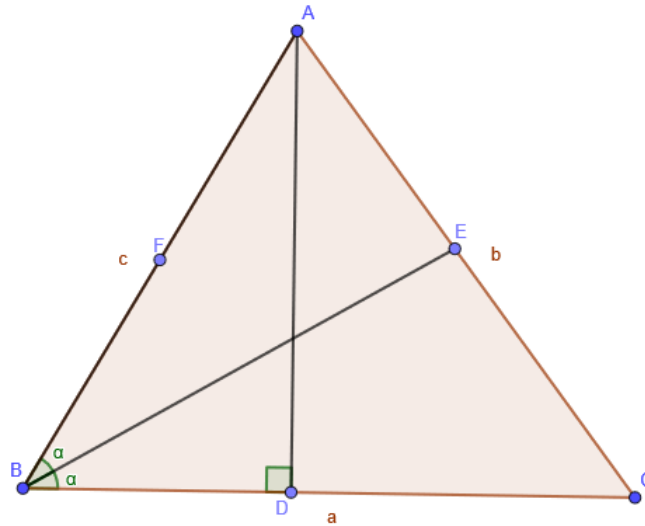
**Problema 3.11.** (Shortlist - Compendium IMO Grã Bretanha, 1996) Considere o triângulo  $\triangle ABC$ , de ortocentro  $H$ , e seja  $P$  um ponto no círculo circunscrito no triângulo  $\triangle ABC$ , distinto de  $A$ ,  $B$  ou  $C$ . Seja  $E$  o pé da altura  $\overline{BH}$ , e os quadriláteros  $PAQB$  e  $PARC$  são paralelogramos, de modo que  $\overline{AQ}$  intercepte  $\overline{HR}$  em  $X$ . Prove que  $\overline{EX}$  é paralelo a  $\overline{AP}$ .



$$a^2 \cdot (a - c) = (b^2 - c^2) \cdot (a + c)$$

Onde  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{CA}$  e  $c = \overline{AB}$ .

Figura 27 – Figura Shortlist IMO Irlanda 1999



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

**Solução 3.14.** Segundo o Teorema de Ceva 2.3, as cevianas são concorrentes se, e somente se

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

Nesse caso,  $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$ , e  $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{a}{c}$ , portanto  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{CF}$  são concorrentes se, e somente se  $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{c}{a}$ .

Isso é verdade se  $\overline{BD} = \frac{a \cdot c}{a + c}$  e  $\overline{DC} = \frac{a^2}{a + c}$ . Porque  $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$ , a última condição ocorre, exatamente, quando as seguintes equações são verdadeiras:

$$\overline{AB}^2 - \left( \frac{a \cdot c}{a + c} \right)^2 = \overline{AC}^2 - \left( \frac{a^2}{a + c} \right)^2$$

$$(a + c)^2 \cdot c^2 - a^2 \cdot c^2 = (a + c)^2 \cdot b^2 - a^4$$

$$a^4 - a^2 \cdot c^2 = (b^2 - c^2) \cdot (a + c)^2$$

$$a^2 \cdot (a^2 - c^2) = (b^2 - c^2)(a + c)^2$$

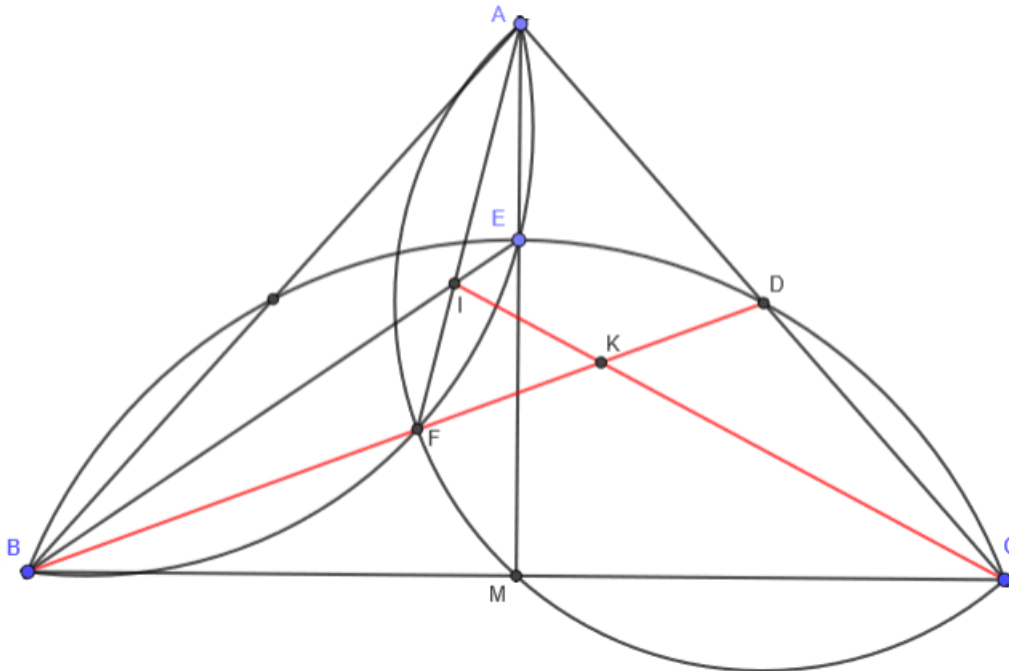
$$a^2 \cdot (a - c) \cdot (a + c) = (b^2 - c^2)(a + c)^2$$

$$a^2 \cdot (a - c) = (b^2 - c^2)(a + c)$$

Logo, os três segmentos são concorrentes se, e somente se, a equação se mantiver, conforme o desejado.

**Problema 3.15.** (Shortlist - IMO 2011) Seja  $\triangle ABC$  um triângulo com  $\overline{AB} = \overline{AC}$  e seja  $D$  o ponto médio de  $\overline{AC}$ . Um círculo, que passa pelos  $B, D$  e  $C$  e intersecta a bissetriz do ângulo  $\widehat{BAC}$  em  $E$ , no interior de  $\triangle ABC$ . O segmento  $\overline{BD}$  intersecta o círculo que passa pelos pontos  $A, E$  e  $B$  em dois pontos  $B$  e  $F$ , como mostrado na figura abaixo. Por fim,  $I$  é a interseção entre  $\overline{AF}$  e  $\overline{BE}$  e  $K$  a interseção entre  $\overline{CI}$  e  $\overline{BD}$ . Mostre que  $I$  é o incentro do triângulo  $\triangle KAB$ .

Figura 28 – Shortlist IMO 2011



Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

**Solução 3.16.** Seja  $D'$  o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , e  $M$ , o ponto médio do lado  $\overline{BC}$ . Por simetria em  $\overline{AM}$ , o ponto  $D'$  deve interceptar o círculo  $BDC$ . Como os arcos  $D'E$  e  $ED$  desse círculo são congruentes, temos  $\widehat{ABI} = \widehat{D'BE} = \widehat{E\hat{B}D} = \widehat{I\hat{B}K}$ , então  $\overline{BI}$  é a bissetriz de  $\widehat{ABK}$ . Por esse motivo, basta provar que o segmento  $\overline{AI}$  é a bissetriz de  $\widehat{BAK}$ .

Então,

$$\widehat{DFA} = 180^\circ - \widehat{BFA} = 180^\circ - \widehat{BEA} = \widehat{MEB} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{CEB} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{CDB}.$$

Daí deriva que  $\widehat{DFA} = \widehat{DAF}$ , então o triângulo  $\triangle AFD$  é isósceles e  $\overline{AD} = \overline{DF}$ .



**Problema 3.17.** (Shortlist IGO 2015) No triângulo  $\triangle ABC$ ,  $H$  é o ortocentro do triângulo. Sejam  $l_1$  e  $l_2$  duas retas tais que passam por  $H$  e são perpendiculares entre si. A linha  $l_1$  cruza  $\overline{BC}$  e o prolongamento de  $\overline{AB}$  em  $D$  e  $Z$ , respectivamente, e a linha  $l_2$  cruza  $\overline{BC}$  e o prolongamento de  $\overline{CA}$  em  $E$  e  $X$ , respectivamente. Traçamos a linha que passa  $D$  e é paralela a  $\overline{AC}$  e construímos a reta que passa por  $E$  e é paralela a  $\overline{AB}$ . Suponha que a interseção dessas retas seja  $Y$ . Prove que  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são colineares.

**Solução 3.18.** Suponha que  $\overline{HZ}$  intersecta  $\overline{AC}$  em  $P$  e  $\overline{HX}$  intersecta  $\overline{AB}$  em  $Q$ . De acordo com Teorema de Menelaus 2.2 nos triângulos  $\triangle AQX$  e  $\triangle APZ$ , podemos dizer:

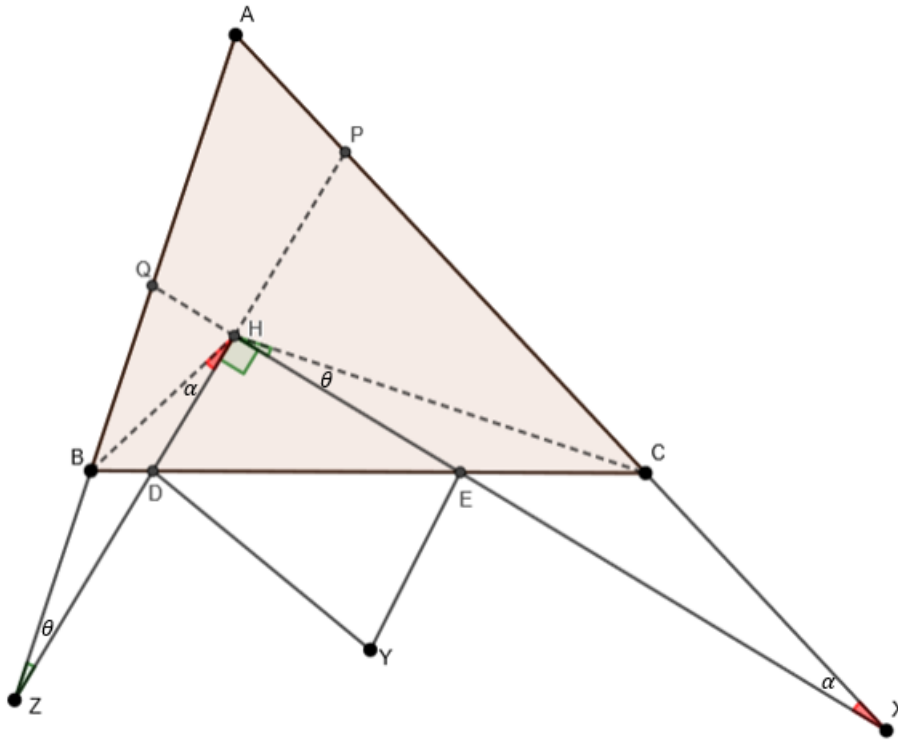
$$\frac{\overline{CX}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BQ}} \cdot \frac{\overline{QE}}{\overline{EX}} = 1 \quad (3.18)$$

e

$$\frac{\overline{BZ}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{PD}}{\overline{DZ}} = 1 \quad (3.19)$$

Por outro lado,  $H$  é o ortocentro do triângulo  $\triangle ABC$ . Então  $\overline{BH} \perp \overline{AC}$  e  $\widehat{DHE} = 90^\circ$ , portanto  $\widehat{HXA} = \widehat{HZB}$  e  $\widehat{HZA} = \widehat{HXC}$ . Assim,  $\widehat{BHZ} = \alpha$  e  $\widehat{CHX} = \theta$ .

Figura 30 – Shortlist IGO - 2nd Iranian Geometry Olympiad



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

De acordo com a lei dos senos em  $\triangle HCP$ ,  $\triangle HCX$  e  $\triangle HPX$ , respectivamente:

$$\frac{\overline{sen(90 - \theta)}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{sen(\widehat{HCP})}}{\overline{HP}}, \frac{\overline{sen(\theta)}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{sen(\widehat{HCX})}}{\overline{HX}}, \frac{\overline{HP}}{\overline{HX}} = \frac{\overline{sen(\alpha)}}{\overline{sen(90 - \alpha)}} \Rightarrow \frac{\overline{PC}}{\overline{HX}} = \frac{\overline{tg(\alpha)}}{\overline{tg(\theta)}}$$

Da mesma forma, de acordo com a lei dos senos em  $\triangle HBQ$ ,  $\triangle HBZ$  e  $\triangle HQZ$ , temos:

$$\frac{\overline{BZ}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{tg(\alpha)}}{\overline{tg(\theta)}} \Rightarrow \frac{\overline{BZ}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{CX}} \Rightarrow \frac{\overline{PC}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{BQ}} \quad (3.20)$$

De acordo com as equações 3.18, 3.19 e 3.20, temos que:

$$\frac{\overline{XE}}{\overline{EQ}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{ZD}} \quad (3.21)$$

Suponha que a reta passe por  $E$  e é paralela a  $\overline{AB}$ , intercepta  $\overline{ZX}$  em  $Y_1$  e a reta que passa por  $D$  e é paralela a  $\overline{AC}$ , intercepta  $\overline{ZX}$  em  $Y_2$ . De acordo com o Teorema de Tales 1.1, podemos dizer que:

$$\frac{\overline{Y_1X}}{\overline{ZY_1}} = \frac{\overline{XE}}{\overline{EQ}} \text{ e } \frac{\overline{Y_2X}}{\overline{ZY_2}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{ZD}}$$

De acordo com a equação 3.21, mostramos que  $Y_1 \equiv Y_2$ , portanto, o ponto  $Y$  está em  $\overline{ZX}$ .





# 4 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

- Pesquisa sobre os teoremas cobrados em olimpíadas mundiais de Matemática e Geometria.
- Análise de questões presentes nas olimpíadas:
  - Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO);
  - Olimpíada de Matemática dos Países do Cone Sul (Conesul);
  - Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM);
  - Olimpíada Internacional de Matemática (IMO);Bem como em seus bancos de questões, shortlists e materiais de preparação para olimpíadas.
- Resolução dos problemas olímpicos que utilizam os teoremas, presentes nesta dissertação, de forma aplicável e de fácil compreensão.
- Realização de uma sondagem com uma turma de alunos do Ensino Médio que tem aulas de aprofundamento para olimpíadas em uma escola do Recife.
- Avaliação as resoluções das questões propostas na sondagem.
- Proposta de um Plano de Aula para ser utilizado por professores de aprofundamentos em turmas olímpicas do Ensino Médio.
- Aplicação do Plano de Aula com todos os alunos da turma.
- Realização de uma nova sondagem com a mesma turma e comparar as estratégias de resolução das questões antes e depois da aplicação do Plano de Aula.

## 4.1 CAMPO DE PESQUISA

No Brasil, algumas escolas, públicas e privadas, escolhem trabalhar com alunos interessados em olimpíadas de conhecimento. Para a realização desta pesquisa, foi escolhida uma escola particular da região metropolitana do Recife, onde é realizado um aprofundamento de Matemática, no contra-turno, em que os alunos podem ter acesso a conteúdos extracurriculares, viabilizando a aplicação da atividade com os sujeitos da pesquisa.

## 4.2 ESCOLHA, CARACTERIZAÇÃO DOS SUJEITOS E TRAJETÓRIAS PARA A APLICAÇÃO DA PESQUISA

Normalmente, as olimpíadas são divididas em três níveis, sendo o nível 1, com alunos do 6º e 7º ano, o nível 2, com alunos do 8º e 9º ano e o nível 3, com alunos do 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio. Portanto, foi realizada a pesquisa com as três turmas do Ensino Médio, que assistem à aula de aprofundamento olímpico, no contra-turno, por ser mais viável aplicar os conteúdos presentes nos teoremas escolhidos.

Os alunos dessas três séries assistem às aulas juntos, abordando o mesmo conteúdo. Por isso, aplicamos a atividade sem restringir nenhuma dessas turmas, pois os conceitos prévios para a realização dessa pesquisa não está associado ao conteúdo curricular convencional. Realizamos a atividade individualmente para perceber como seria o raciocínio utilizado por cada um dos alunos, bem como para avaliar se existia ou não diferença entre as formas de resolução dos alunos de diferentes séries.

## 4.3 ANÁLISE PRÉVIA

Visando verificar a relevância do estudo das cevianas por alunos de turmas olímpicas do Ensino Médio, um questionário 5 foi aplicado para saber até que ponto os alunos conhecem as cevianas, suas propriedades e aplicações em teoremas abordados em olimpíadas.

O questionário foi aplicado para todos os quinze alunos e apenas um deles, do 1º ano, nunca havia participado de nenhuma olimpíada, enquanto todos os outros alunos participaram da OBM, antes e/ou depois da OBM se integrar com a (OBMEP). Doze deles sinalizaram participação em olimpíadas de menor proporção como a Canguru de Matemática e a Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT).

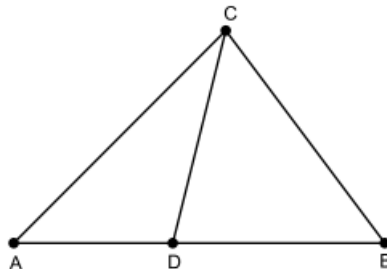
Quando se tratava das olimpíadas internacionais, apenas 4 alunos sabiam da existência da IMO, mas não conheciam outras e nunca participaram de tais competições.

No que se refere ao questionamento sobre o conhecimento deles com relação aos teoremas de Geometria Plana, a unanimidade foi sobre o Teorema de Pitágoras 1.27, seguido do Teorema de Tales 1.1, do Ângulo Externo 1.4, semelhança de triângulos e retas paralelas cortadas por transversal. Enquanto apenas um aluno, o de protocolo A11T3, citou o Teorema da Bissetriz Interna 1.16 e o de Ceva 2.3, sendo o único que sabia sobre teoremas de Geometria Plana envolvendo cevianas.

Cada uma das 3 questões escolhidas para integrar o questionário poderia ser facilmente resolvida utilizando os teoremas de Geometria Plana baseados em cevianas. Apenas com a noção utilizada pelos teoremas, uma pequena adaptação sobre a modelagem do problema e efetuando cálculos simples, seria possível identificar relações geométricas básicas.

**Questão 1:** De acordo com a figura, sendo  $\overline{AD} = 4$ ,  $\overline{BD} = 6$ ,  $\overline{BC} = 7$  e  $\overline{AC} = 8$ , a medida do segmento  $\overline{CD}$  é?

Figura 31 – Exemplo 1 - Teorema de Stewart



Fonte: Portal da Matemática - Estudo de Triângulos

Resolução: De acordo com o texto, pelo Teorema de Stewart 2.1, temos:

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} + \overline{BC}^2 \cdot \overline{AD} - \overline{CD}^2 \cdot \overline{AB} = \overline{AD} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AB}$$

$$8^2 \cdot 6 + 7^2 \cdot 4 - d^2 \cdot 10 = 10 \cdot 6 \cdot 4$$

$$64 \cdot 6 + 49 \cdot 4 - 10 \cdot d^2 = 240$$

$$384 + 196 - 240 = 10 \cdot d^2$$

$$340 = 10 \cdot d^2$$

$$34 = d^2$$

$$d = \sqrt{34}.$$

**Questão 2:** No triângulo  $\triangle ABC$ , retângulo em  $C$ ,  $P$  e  $Q$  estão sobre os lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, tais que  $\overline{CP} = \overline{CQ} = 2$ . Pelo ponto de interseção  $R$  de  $\overline{AP}$  e  $\overline{BQ}$ , uma reta é desenhada passando também por  $C$  e cortando  $\overline{AB}$  em  $S$ . O prolongamento de  $\overline{PQ}$  corta  $\overline{AB}$  em  $T$ . Se  $\overline{AB} = 10$  e  $\overline{AC} = 8$ , determine  $\overline{TS}$ .

Resolução: Sendo  $\overline{AB} = 10$  e  $\overline{AC} = 8$  temos, pelo Teorema de Pitágoras 1.27, que  $\overline{BC} = 6$ .

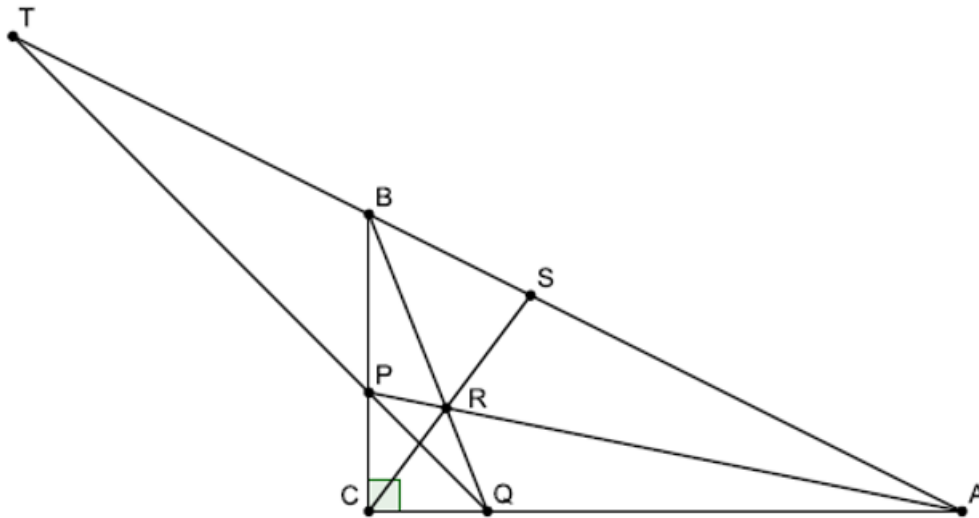
Com efeito, pelo Teorema de Menelaus 2.2, no triângulo  $\triangle ABC$ , temos:

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BT}}{\overline{TA}} = 1$$

$$\frac{6}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{\overline{BT}}{\overline{BT} + 10} = 1$$

$$3 \cdot \overline{BT} = 2 \cdot \overline{BT} + 20$$

Figura 32 – Exemplo 1 - Teorema de Ceva



Fonte: Portal da Matemática - Estudo de Triângulos.

$$\overline{BT} = 20$$

E, pelo Teorema de Ceva 2.3, aplicado ao triângulo  $\triangle ABC$ , temos:

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BS}}{\overline{SA}} = 1$$

$$\frac{6}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{\overline{BS}}{10 - \overline{BS}} = 1$$

$$3 \cdot \overline{BS} = 20 - 2 \cdot \overline{BS}$$

$$\overline{BS} = 4$$

Portanto  $\overline{TS} = \overline{BT} + \overline{BS} = 20 + 4 = 24$

**Questão 3:** Prove que as distâncias entre um ponto sobre uma circunferência e os quatro vértices de um quadrado nesta inscrita não podem ser todas números racionais.

Resolução: 3.3

## 4.4 ANÁLISE DAS SOLUÇÕES DOS ALUNOS

Como era de se esperar, conseguimos perceber algumas diferenças entre as resoluções feitas pelos alunos, apesar da maioria deles não demonstrar lembrar, ou saber, da existência de teoremas que envolvessem cevianas, de modo geral, os alunos do 1º ano optaram por soluções que envolviam a utilizaram da Lei dos Cossenos e aplicaram as relações métricas nos triângulos

quaisquer. Já os alunos do 2º ano e 3º ano tentaram desenvolver construindo uma altura relativa e aplicando o Teorema de Pitágoras 1.27 mais de uma vez para a construção de um sistema. Para caracterizar a técnica utilizada pelos alunos em distintas séries, evidenciaremos um comparativo relativo a cada questão.

Participaram deste questionário 15 sujeitos escolhidos para compor a pesquisa, sendo eles 5 alunos do 1º ano, 6 do 2º ano e 4 do 3º ano. Cada aluno foi identificado por um número de 1 a 6, seguido pela turma ao qual pertencia (T1 referente ao 1º ano, T2 ao 2º ano e T3 ao 3º ano). Assim, por exemplo, A11T1 corresponde ao aluno número 1 do 1º ano do ensino médio. Apresentaremos apenas os protocolos que apresentarem estratégias diferentes para resolver os exercícios do questionário. Explicitaremos cada um desses, assim como seus respectivos protocolos.

Na **primeira questão**, a forma de resolução foi razoavelmente parecida entre alunos de todas as séries. Sete deles, sendo dois do 1º ano, três do 2º ano e dois do 3º ano, focaram na construção de uma altura relativa e em seguida aplicaram o Teorema de Pitágoras 1.27. Outros cinco alunos, sendo dois do 1º, dois do 2º e dois do 3º, optaram por resolver utilizando outras relações métricas nos triângulos, como lei dos senos 1.35 ou cossenos 1.34 e os outros dois não conseguiram desenvolver um raciocínio.

O protocolo A11T1 representa um modelo de extrato diferente dos outros, que também optaram pelas relações métricas no triângulo qualquer, ele utilizou a lei dos cossenos duas vezes, uma no triângulo  $\triangle ABC$  e achou o valor do  $\cos(\alpha)$ . Depois ele aplicou no triângulo  $\triangle ACD$  encontrando o valor desejado.

Figura 33 – Extrato do protocolo A11T1 - Questão 1

$AD=4$     $BC=7$     $CD=x$   
 $BD=6$     $AC=8$

OBSERVANDO O TRIÂNGULO ACB  
 PODEMOS APLICAR A LEI DOS COSENOS.

$$7^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \theta \rightarrow 49 = 64 + 100 - 160 \cos \theta \rightarrow -115 = -160 \cos \theta$$

$$\rightarrow \boxed{\cos \theta = \frac{115}{160}}$$

AGORA POUQUINHO O COSENDO DE  $\theta$ , OBSERVAMOS  $\triangle ADC$   
 NOVAMENTE APLICAREMOS A LEI DOS COSENOS.

$$x^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{115}{160}$$

$$\downarrow$$

$$x^2 = 64 + 16 - \frac{64 \cdot 115}{160} \rightarrow x^2 = 80 - \frac{7360}{160} \rightarrow x^2 = 80 - 46 \rightarrow x^2 = 36$$

$$\rightarrow \boxed{x = \sqrt{36}}$$

Fonte: Resultado da pesquisa, 2020.

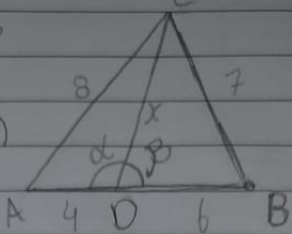
Já o extrato do protocolo Al2T1, construiu os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , como mostra a figura. Posteriormente, ele afirmou que  $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$ , pois  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . Então, ele aplicou a lei dos cossenos 1.34 nos triângulos  $\triangle ADC$  e  $\triangle BDC$ . Em seguida, substituiu a expressão do  $\cos(\alpha)$  de uma equação na outra e desenvolveu até descobrir o valor esperado.

Figura 34 – Extrato do protocolo Al2T1 - Questão 1

1º)

$\alpha + \beta = 180^\circ$

$\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$



ADC:

$$8^2 = 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \cos(\alpha)$$

$$64 = 16 + x^2 - 8x \cos(\alpha)$$

$$8x \cos(\alpha) = x^2 - 48$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x^2 - 48}{8x}$$

BDC:

$$7^2 = 6^2 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \cos(\beta)$$

$$49 = 36 + x^2 - 12x \cdot (-\cos(\alpha))$$

$$49 = 36 + x^2 + 12x \cos(\alpha)$$

$$13 = x^2 + 12x \cdot \left( \frac{x^2 - 48}{8x} \right) \cdot 8$$

$$104 = 8x^2 + 12x^2 - 576$$

$$680 = 20x^2$$

$$34 = x^2$$

$$\sqrt{34} = x$$

Fonte: Resultado da pesquisa, 2020.

Os protocolos A11T2 e A12T2 são exemplos, dos oito, que optaram pela construção de uma altura relativa, seguida da aplicação do Teorema de Pitágoras 1.27 duas vezes, formaram um sistema com as duas equações, depois substituíram uma equação na outra e resolveu o sistema para encontrar a resposta da questão.

Figura 35 – Extrato do protocolo A11T2 - Questão 1

12)  $\overline{CD} = x = \sqrt{34}$

(I)  $(6-y)^2 + h^2 = 7^2$   
 $36 - 12y + y^2 + h^2 = 49$   
 $h^2 = 13 + 12y - y^2$

(II)  $(4+y)^2 + h^2 = 8^2$   
 $16 + 8y + y^2 + h^2 = 64$   
 $h^2 = 48 - 8y - y^2$

$h^2 = h^2$   
 (I) = (II)

$13 + 12y - y^2 = 48 - 8y - y^2$

$20y = 35$   
 $y = \frac{35}{20} = \frac{7}{4}$

$x^2 = h^2 + y^2$   
 $x^2 = 48 - 8y - y^2 + y^2$   
 $x^2 = 48 - 8 \cdot \frac{7}{4}$   
 $x^2 = 48 - 14$   
 $x = \sqrt{34}$

Fonte: Resultado da pesquisa, 2020.



Figura 36 – Extrato do protocolo A12T2 - Questão 1

Handwritten student solution for a geometry problem. The diagram shows a triangle  $ABC$  with side  $AC=8$ , side  $BC=7$ , and base  $AB=10$ . A point  $P$  is on  $AB$  such that  $AP=4$  and  $PB=6$ . A line segment  $CP$  is drawn, with length  $d$ . A perpendicular line segment  $h$  is drawn from  $C$  to  $AB$ .

The student uses the Pythagorean theorem in triangles  $ABC$ ,  $CPB$ ,  $APC$ , and  $CDP$  to solve for  $d$ .

Handwritten work:

$$\begin{aligned} \Delta ABC & \\ 7^2 &= h^2 + (6-x)^2 \\ 49 - (36 - 12x + x^2) &= h^2 \\ -x^2 + 12x + 13 &= h^2 \\ \Delta CPB & \\ d^2 &= h^2 + x^2 \\ d^2 - x^2 &= h^2 \\ \Delta APC & \\ h^2 &= 64 + (4+x)^2 \\ h^2 &= 64 + 16 + 8x + x^2 \\ h^2 &= 48 + 8x + x^2 \end{aligned}$$

Handwritten work (left side):

$$\begin{aligned} d^2 &= 48 - 8x \quad (\times 3) \\ d^2 &= 12x + 13 \quad (\times 2) \\ \left\{ \begin{array}{l} 3d^2 = -24x + 144 \\ 2d^2 = 24x + 26 \end{array} \right. \\ 5d^2 &= 170 \\ d^2 &= \frac{170}{5} \\ d &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

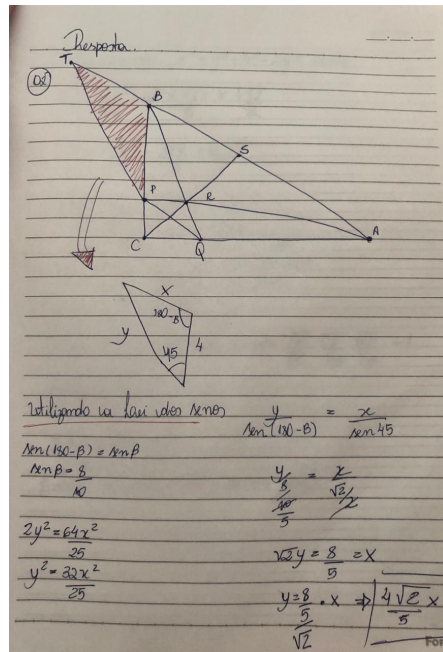
Fonte: Resultado da pesquisa, 2020.

Podemos perceber, na primeira questão, que a utilização de outros teoremas possibilitam a solução do problema. Porém, todos os métodos utilizados são mais demorados, e envolvem contas relativamente maiores, do que o Teorema de Stewart.

Na **segunda questão**, os alunos apresentaram muito mais dificuldade, sendo a questão com o menor índice de respostas finalizadas, apenas seis, uma do 1º ano, três do 2º ano e duas do 3º ano. Os estudantes tentaram buscar, em sua totalidade, ângulos para encaixar em relações métricas e/ou trigonométricas nos triângulos encontrados por eles. Porém, com exceção de um extrato do 3º ano, os demais apresentaram alguns equívocos durante o desenvolvimento e chegaram apenas a respostas aproximadas. Contudo, os seis que finalizaram suas contas apresentaram soluções coerentes.

O único extrato que apresentou o resultado exato foi o A11T3, que começou destacando os ângulos conhecidos até descobrir que o ângulo  $\widehat{TPB}$  mede  $45^\circ$ , chamou o ângulo  $\widehat{CBA}$  de  $\beta$  e calculou o  $\text{sen}(\beta) = \frac{8}{10}$ . Como o ângulo  $\widehat{BTP} = 180^\circ - \beta$ , o estudante apontou que  $\text{sen}(\beta) = \text{sen}(180^\circ - \beta)$ , e daí aplicou a lei dos senos no triângulo  $\triangle TBP$ , comparando as medidas de  $\overline{TP}$  e  $\overline{TS}$ , por meio de uma equação.

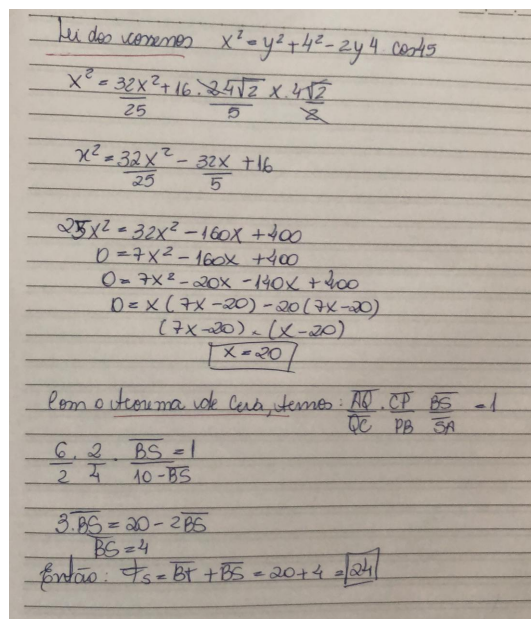
Figura 37 – Extrato do protocolo A11T3 - Questão 2 (parte 1)



Fonte: Resultado da pesquisa, 2020.

Em seguida aplicou a lei dos cossenos, novamente no triângulo  $\triangle TBP$  e, sabendo a medida  $\overline{BP}$  e a equação encontrada acima, encontrou o valor de  $\overline{TB}$ . Porém, como podemos notar na figura abaixo, o estudante só conseguiu calcular a medida  $\overline{BS}$  devido ao seu conhecimento do Teorema de Ceva 2.3, o que fechou a sua solução, permitindo a descoberta do valor exato de  $\overline{TS}$ .

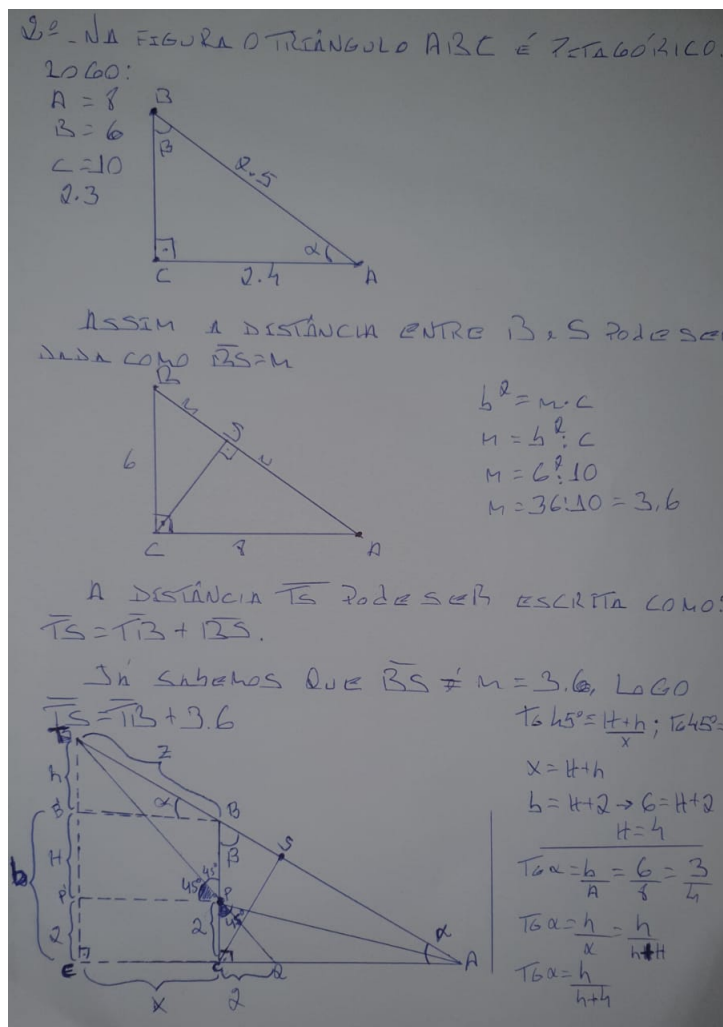
Figura 38 – Extrato do protocolo A11T3 - Questão 2 (parte 2)



Fonte: Resultado da pesquisa, 2020.

O protocolo A12T3 é um exemplo da utilização das relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo. Inicialmente o sujeito observou que o triângulo em questão era pitagórico e descobriu as medidas de seus catetos e da hipotenusa, em seguida utilizou uma relação métrica para determinar a medida  $\overline{BS}$  e notou que  $\overline{TS}$  poderia ser escrito como  $\overline{BS} + \overline{TB}$ .

Figura 39 – Extrato do protocolo A12T3 - Questão 2 (parte 1)



Fonte: Resultado da pesquisa, 2020.

Então, o sujeito utilizou uma relação trigonométrica no triângulo  $\triangle PP'T$ , depois de descobrir que um de seus ângulos era  $45^\circ$  e aplicou o resultado encontrado no triângulo  $\triangle BB'T$ , de catetos  $h$  e  $x$ , bem como usar a  $\text{tg}(\alpha)$  no triângulo  $\triangle ABC$  e descobriu a medida de  $\overline{TB}$ . Para finalizar, somou os valores de  $\overline{BS}$  e  $\overline{TB}$  e chegou ao resultado 23,6, muito próximo do resultado correto, que seria 24.

Figura 40 – Extrato do protocolo A12T3 - Questão 2 (parte 2)

$$\frac{h}{h+4} = \frac{3}{4} \rightarrow 4h = 3h + 12 \rightarrow h = 12, \text{ COM } \overline{TB} = 2$$

$$z^2 = h^2 + x^2$$

$$z^2 = h^2 + (h+4)^2 \rightarrow z^2 = 12^2 + (12+4)^2$$
~~$$z^2 = 12^2 + 12^2 + 16^2$$~~

$$z^2 = 144 + 256$$

$$z^2 = 400$$

$$z = \sqrt{400} = 20$$

$$\overline{BS} = \overline{TB} + 3.6$$

$$\overline{BS} = 20 + 3.6 = 23.6$$

$$\overline{BS} = 23.6$$

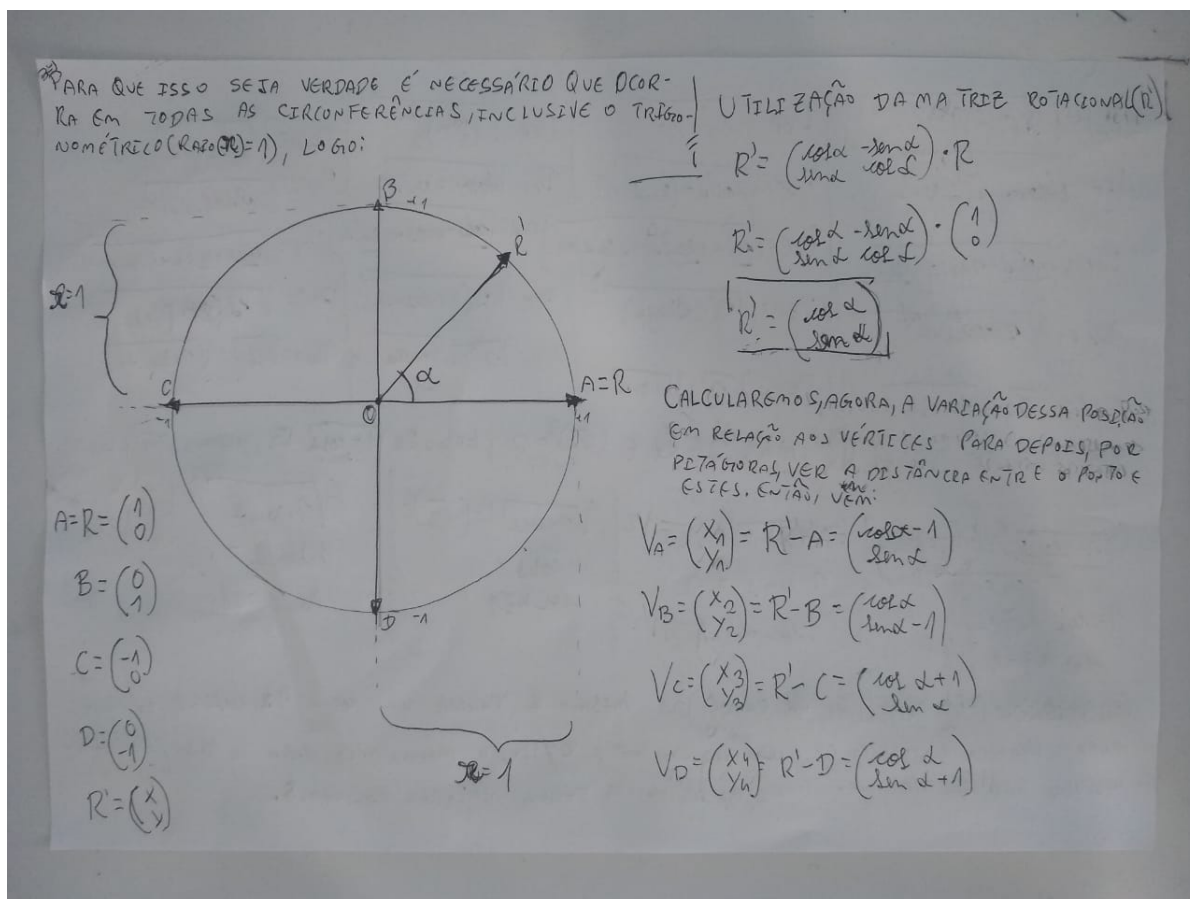
Fonte: Resultado da pesquisa, 2020.

Os outros estudantes que concluíram a questão optaram por estratégias parecidas com as do protocolo A12T3, mas com desenvolvimentos um pouco menos claros, tendo maiores dificuldades na descoberta do segmento  $\overline{BS}$ . Isso demonstra os benefícios da utilização direta dos Teoremas de Menelaus e Ceva para a solução da questão dois.

Já na **terceira questão**, os alunos utilizaram ideias bem variadas. Um aluno, do 2º ano, se baseou na trigonometria do ciclo trigonométrico, sendo a solução mais atípica, enquanto outros colega, um do 2º e outro do 3º, optaram por utilizar a lei dos cossenos, o que lhes permitiu encontrar a solução para o problema. Outros três alunos, um do 1º ano e dois do 3º ano, utilizaram as relações métricas e/ou trigonométricas utilizando os ângulos do quadrado para chegar em alguma conclusão, enquanto dois alunos do 1º ano e outro do 3º discutiram sobre o quadrilátero  $ABPC$ , porém com argumentos não finalizados a ponto de concluir o esperado. Apenas o extrato A12T2 conhecia o Teorema de Ptolomeu e utilizou dica da utilização do quadrilátero  $ABPC$ .

Por exemplo, o extrato do protocolo A11T2 optou pela utilização do ciclo trigonométrico e ainda utilizou a matriz rotacional para encontrar a variação das posições relativas aos vértices do polígono em questão.

Figura 41 – Extrato do protocolo A11T2 - Questão 3 (parte 1)

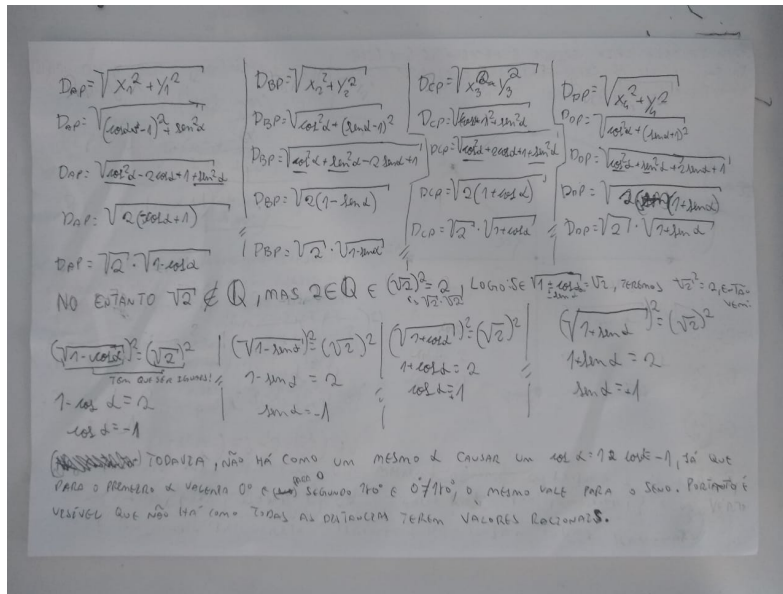


Fonte: Resultado da pesquisa, 2020.

Posteriormente, utilizou a distância entre dois pontos para encontrar os possíveis valores. Então, o estudante notou que havia uma multiplicação entre  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{1 - \cos(\alpha)}$  para determinar uma distância entre o ponto e um vértice e a multiplicação entre  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{1 + \cos(\alpha)}$  determinando a distância entre o ponto e outro vértice, porém, para o resultado ser um número racional,  $\sqrt{1 - \cos(\alpha)}$  e  $\sqrt{1 + \cos(\alpha)}$  teriam que ser iguais a 2. Fazendo as contas, ele encontrou que  $\cos(\alpha) = 1$  e  $\cos(\alpha) = -1$ , o que seria um absurdo, concluindo que nem todas as distâncias poderiam ser racionais.



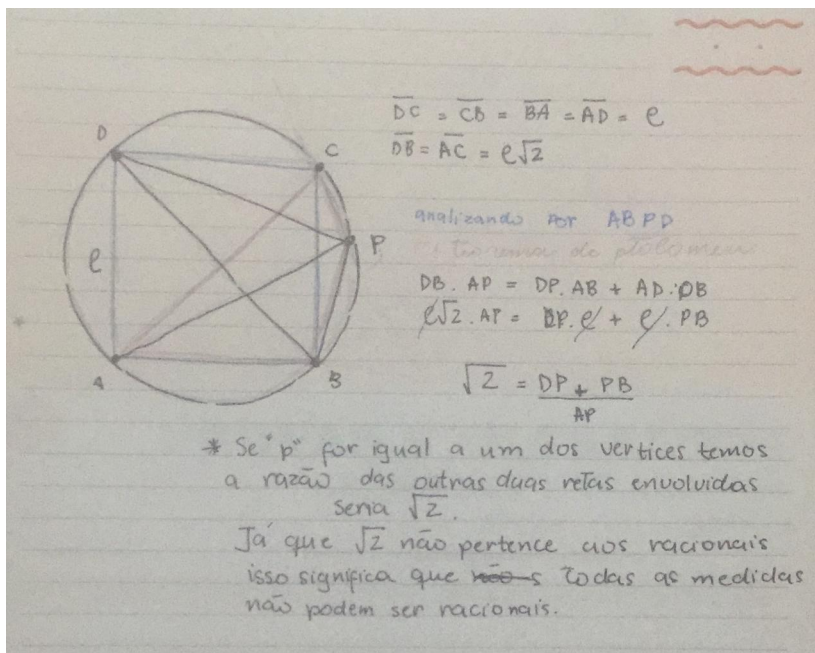
Figura 42 – Extrato do protocolo A11T2 - Questão 3 (parte 2)



Resultado da pesquisa, 2020.

Falando dos alunos que utilizaram o quadrilátero sugerido, mas trocando o vértice  $C$  pelo  $D$ , no quadrilátero  $ABPD$ , o extrato A12T2 conhecia o Teorema de Ptolomeu e aplicou perfeitamente o problema enunciado. Inicialmente, denominou as medidas dos lados como  $l$  e aplicou o teorema, simplificou os valores do lado e encontrou a equação  $\frac{DP + PB}{AP} = \sqrt{2}$ .

Figura 43 – Extrato do protocolo A12T2 - Questão 3



Fonte: Resultado da pesquisa, 2020.

Posteriormente, analisou a possibilidade de  $P$  coincidir com um dos vértices e concluiu que nem todos os segmentos podiam ter medidas racionais.

Já o extrato do protocolo A14T3, fez a análise do ângulo  $\widehat{DBC}$ , concluindo que era  $45^\circ$  e concluindo que  $\widehat{APB}$  e  $\widehat{DPC}$  são congruentes a  $45^\circ$ , pois estão ângulos inscritos na circunferência e estão sobre os arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{BC}$ , que são congruentes. Ele determinou  $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , um número irracional.

Figura 44 – Extrato do protocolo A14T3 - Questão 3 (parte 1)

3º)

$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

I)  $l^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 45^\circ$

II)  $l^2 = w^2 + z^2 - 2wz \cdot \cos 45^\circ$

$l^2 = l^2$

$x^2 + y^2 - 2xy \cos 45^\circ = w^2 + z^2 - 2wz \cos 45^\circ$

$x^2 + y^2 - w^2 - z^2 = 2 \cos 45^\circ (xy - wz)$

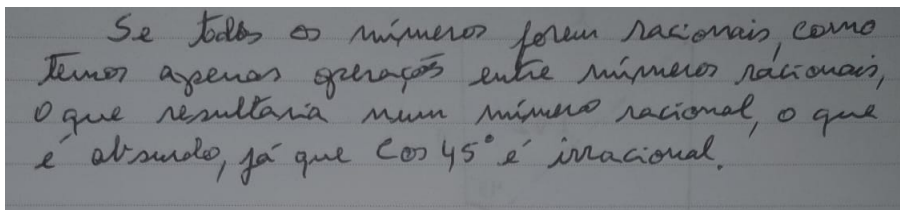
$x^2 - z^2 + y^2 - w^2 = 2 \cos 45^\circ (xy - wz)$

$\cos 45^\circ = \frac{(x+z)(x-z) + (y+w)(y-w)}{2(xy - wz)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Fonte: Resultado da pesquisa, 2020.

Então aplicou a lei dos cossenos nos triângulos  $\triangle ABP$  e  $\triangle DPC$ , manuseou as duas equações, encontrou uma equação  $\cos(45^\circ) = \frac{x^2 + y^2 - z^2 - w^2}{2(xy - wz)}$  e fez uma suposição.

Figura 45 – Extrato do protocolo A14T3 - Questão 3 (parte 1)



Se todos os números forem racionais, como temos apenas operações entre números racionais, o que resultaria num número racional, o que é absurdo, já que  $\cos 45^\circ$  é irracional.

Fonte: Resultado da pesquisa, 2020.

A partir de sua hipótese de que todas as distâncias são números racionais, percebeu que só haveria multiplicações e divisões entre números racionais, o que é sempre um número racional. Chegando ao absurdo, pois o  $\cos(45^\circ)$  seria racional e irracional. Concluindo o que foi solicitado pela questão.

A questão três proporcionou soluções variadas e tentativas de relacionar as medidas dos lados. Porém, as conclusões dependiam de mais elaboração, quando não utilizavam o Teorema de Ptolomeu. Isso fez com que os alunos entrassem em algumas contradições ou não conseguissem desenvolver o raciocínio final, normalmente por misturar muitas variáveis e tentar relacionar todas elas utilizando as relações métricas, impossibilitando a solução da questão.



## **5 PLANO DE AULA BASEADO EM TEOREMAS ENVOLVENDO CEVIANAS EM TURMAS OLÍMPICAS**

De acordo com todos os resultados analisados no capítulo anterior, foi feito o seguinte plano de aula baseado em cevianas e nos teoremas que as utilizam, para servir de instrumento para professores que lecionam em turmas olímpicas. O plano de aula propõe relembrar os pontos notáveis dos triângulos. Em seguida, tratar dos teoremas envolvendo Cevas e Ptolomeu, do capítulo 2, e finalizar com alguns exercícios em que esses teoremas se aplicam.

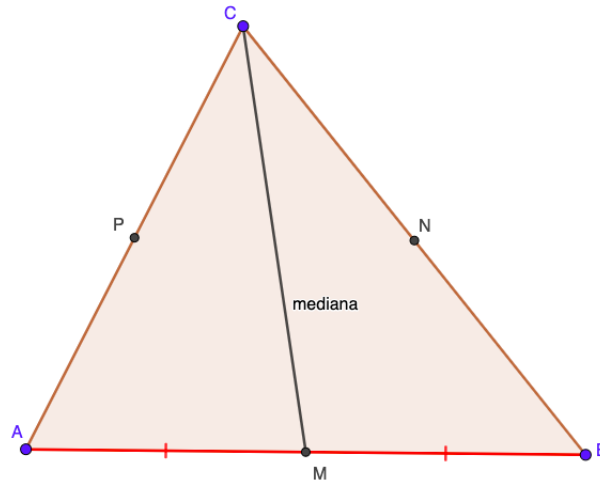
Para a preparação deste plano de aulas usamos como referências materiais disponíveis no Portal da Matemática, no tópico Estudo de Triângulos, e nos materiais de aula dos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), os sites para encontrar tais documentos estão disponíveis nas referências, de [13] até [17]. Caso haja interesse em aprofundar mais sobre o assunto acesse <<https://portaldabmep.impa.br/index.php>> e <<https://poti.impa.br/>>.

Aula 1:

**Ceviana:** É um segmento de reta que liga um vértice de um triângulo a um ponto no lado oposto ou em seu prolongamento, de modo que esse ponto seja diferente dos outros vértices.

**Mediana:** Ceviana que parte de um dos vértices e passa pelo ponto médio do lado oposto ao vértice.

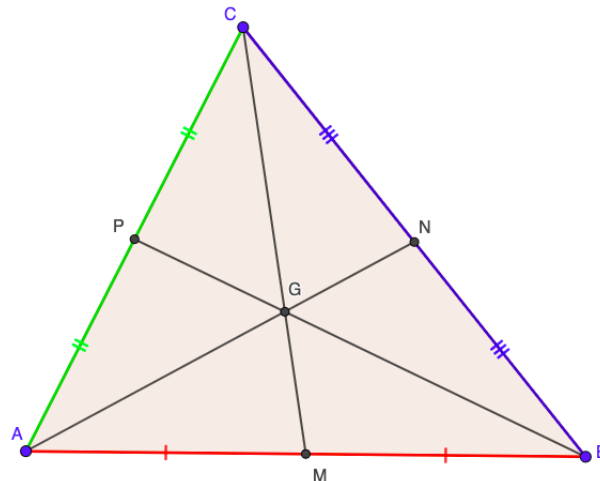
Figura 46 – Mediana



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

As medianas interceptam-se em um mesmo ponto denominado **BARICENTRO**.

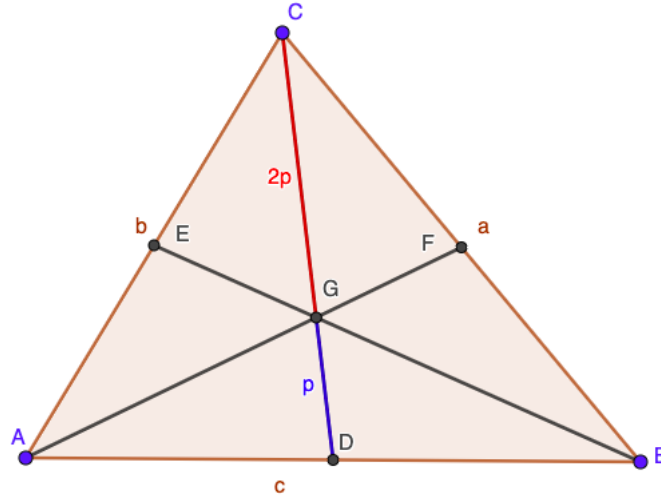
Figura 47 – Baricentro



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

O **BARICENTRO** divide cada **MEDIANA** na razão 2:1, ou seja, a parte da mediana que contém o vértice é o dobro da outra.

Figura 48 – Razão da Medida do Baricentro

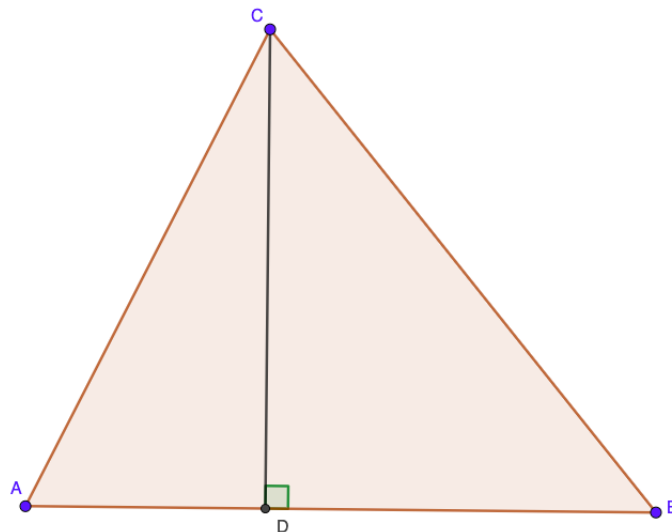


Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

**ALTURA:** É o segmento que liga um vértice do triângulo ao seu lado oposto ou seu prolongamento, sendo perpendiculares entre si.

Triângulo acutângulo

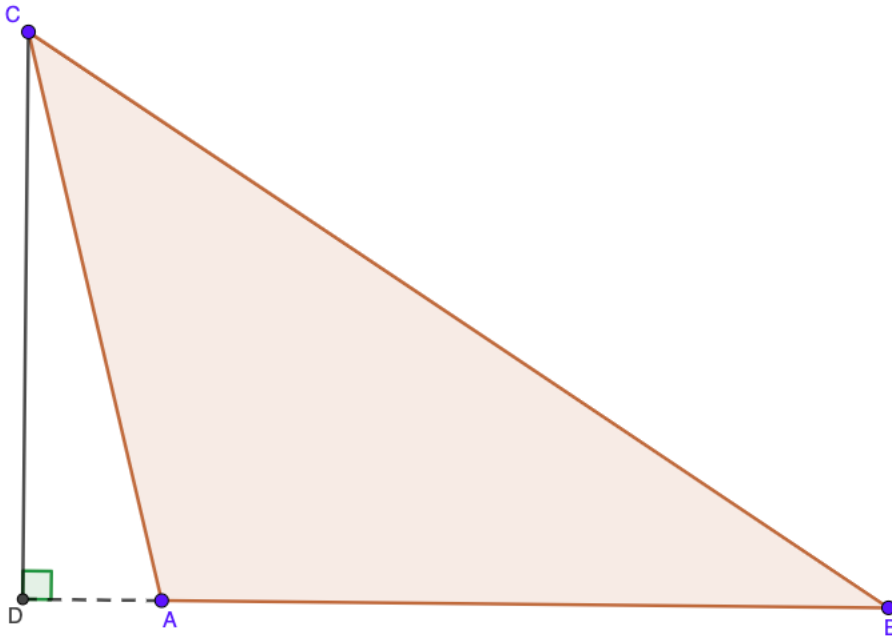
Figura 49 – Altura Interna



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Triângulo obtusângulo

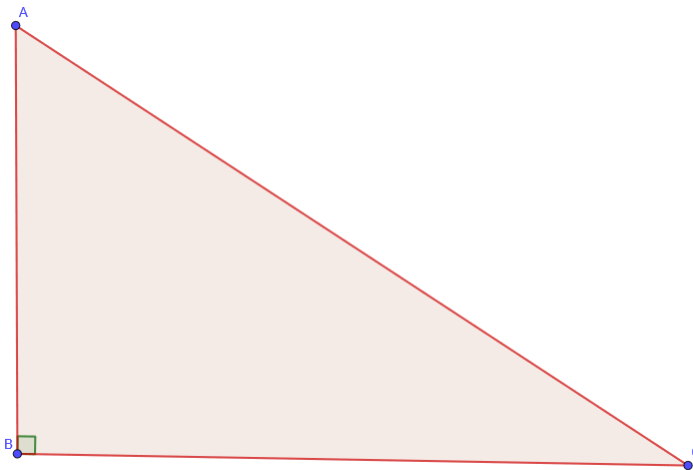
Figura 50 – Altura Externa



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Triângulo retângulo

Figura 51 – Cateto como Altura

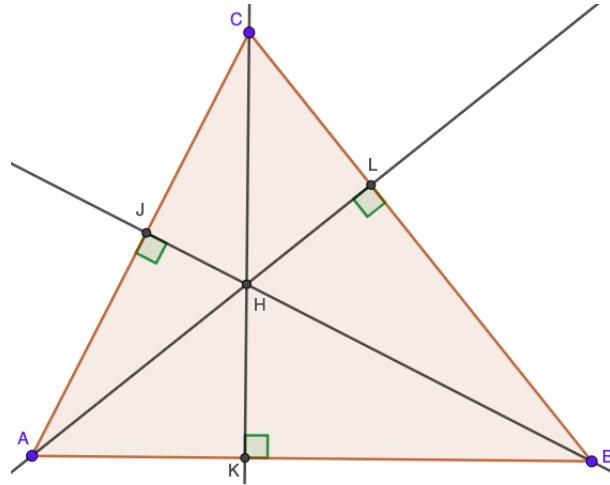


Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

As alturas interceptam-se em um mesmo ponto denominado **ORTOCENTRO**.

Triângulo acutângulo

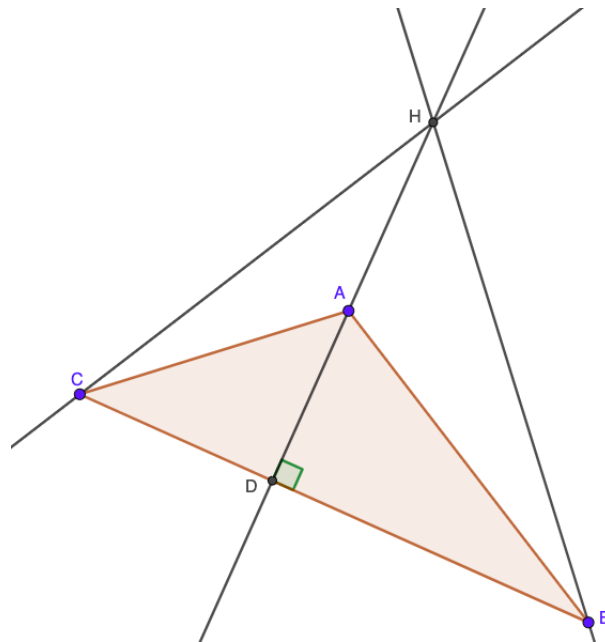
Figura 52 – Ortocentro Interno



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Triângulo obtusângulo

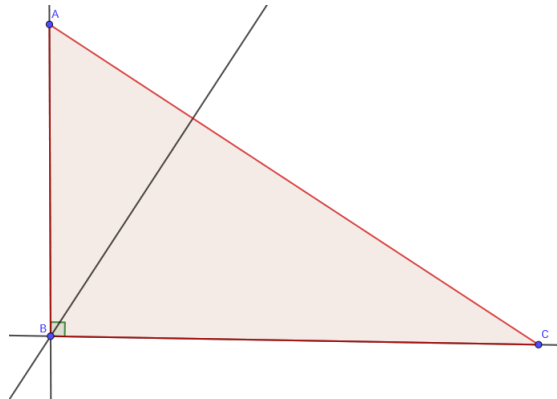
Figura 53 – Ortocentro Externo



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Triângulo retângulo

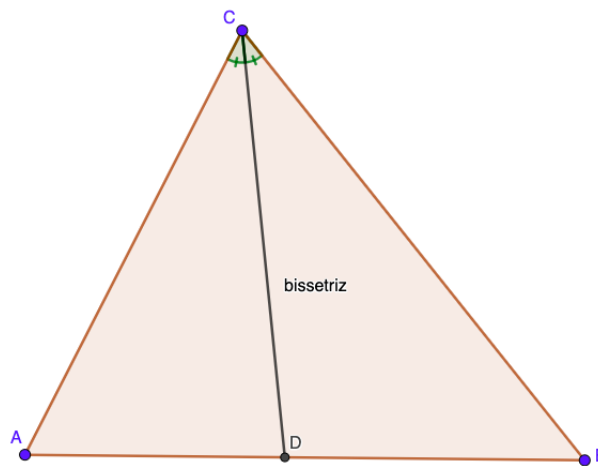
Figura 54 – Ortocentro no Vértice



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

**BISSETRIZ INTERNA:** Ceviana que divide o ângulo interno em dois ângulos congruentes.

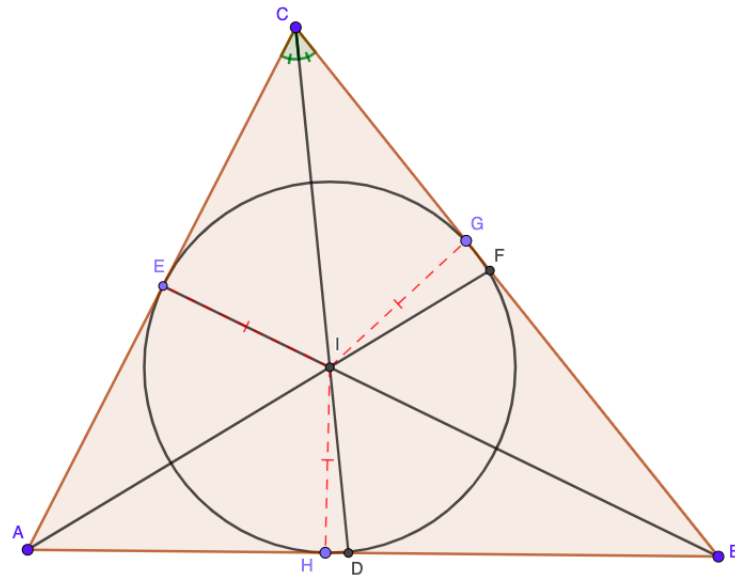
Figura 55 – Bissetriz



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

As bissetrizes internas interceptam-se em um mesmo ponto denominado **INCENRO**, que é centro da circunferência inscrita a esse triângulo.

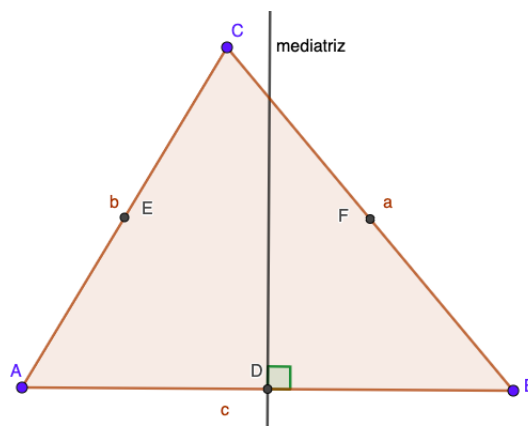
Figura 56 – Incentro



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

**MEDIATRIZ:** A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ele, intersectando-o em seu ponto médio.

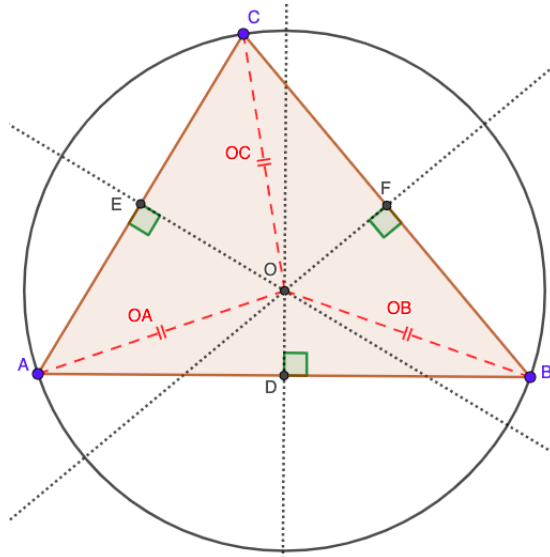
Figura 57 – Mediatriz



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

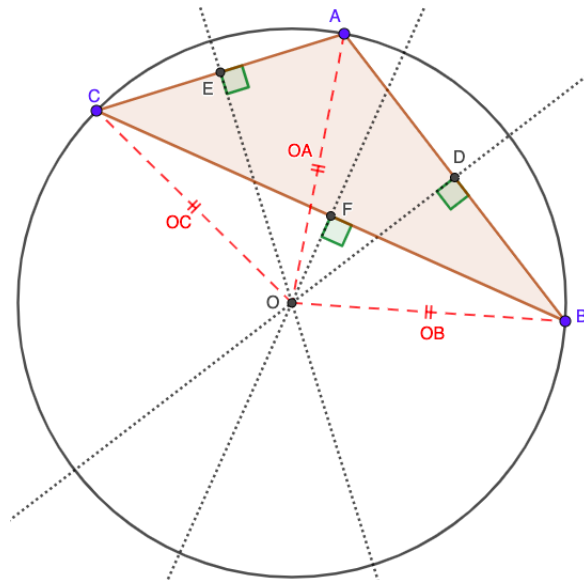
As mediatrizes interceptam-se em um mesmo ponto denominado **CIRCUNCENTRO**, que é o centro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

Figura 58 – Circuncentro Interno



Fonte: Produzido pelo autor. 2020.

Figura 59 – Circuncentro Externo



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

- OBS1: Em todo triângulo estão alinhados o baricentro, o circuncentro e o ortocentro numa linha chamada Reta de Euler.
- OBS2: Em qualquer triângulo isósceles coincidem altura, mediana, bissetriz e mediatriz relativas ao ângulo do vértice.



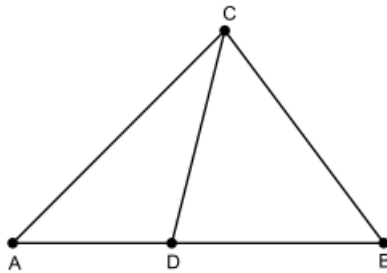
- OBS3: Num triângulo equilátero coincidem o incentro, o baricentro, o circuncentro e ortocentro com o centro do triângulo.

Aula 2:

**(Teorema de Stewart)** Dados um triângulo  $ABC$  e um ponto  $D$  do lado  $AB$ , vale a relação  $a^2n + b^2m - d^2c = cmn$  onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as medidas dos lados,  $d$  é a ceviana  $CD$  e  $m$  e  $n$  são os segmentos determinados pela ceviana  $CD$  no lado  $AB$ .

**Exemplo 1:** De acordo com a figura, sendo  $\overline{AD} = 4$ ,  $\overline{BD} = 6$ ,  $\overline{BC} = 7$  e  $\overline{AC} = 8$ , a medida do segmento  $\overline{CD}$  é?

Figura 60 – Exemplo 1 - Stewart

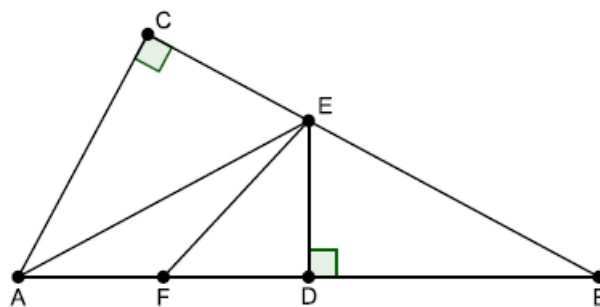


Fonte: Portal da Matemática - Estudo de Triângulos

Resolução: 4.3

**Exemplo 2:** No triângulo  $\triangle ABC$ , retângulo em  $A$ , com  $\overline{AC} = 6$ ,  $\overline{AB} = 10$  e  $\overline{BC} = 8$ ,  $D$  é ponto médio de  $\overline{AB}$  e  $F$  é ponto médio de  $\overline{AD}$ . Determine  $\overline{EF}$ .

Figura 61 – Exemplo 2 - Stewart



Fonte: Portal da Matemática - Estudo de Triângulos

Resolução: Como os triângulo  $\triangle BDE$  e  $\triangle BCA$  são semelhantes (caso 1.3), temos  $\frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$  em que  $\overline{DE} = \frac{15}{4}$

Aplicando o Teorema de Pitágoras 1.27 ao triângulo  $\triangle ADE$ , chegamos a  $\overline{AE} = \frac{25}{4}$ . Vamos agora calcular  $\overline{EF}$ , mediana do triângulo  $\triangle ADE$ , aplicando a relação de Stewart neste triângulo.

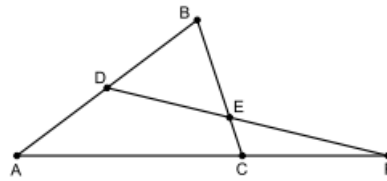
$$\begin{aligned} \overline{AE}^2 \cdot \overline{FD} + \overline{DE}^2 \cdot \overline{AF} - \overline{EF}^2 \cdot \overline{AD} &= \overline{AF} \cdot \overline{DF} \cdot \overline{AD} \\ \left(\frac{25}{4}\right)^2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{15}{4}\right)^2 \cdot \frac{5}{2} - \overline{EF}^2 \cdot 5 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 \\ \overline{EF}^2 &= \frac{650}{32} \\ \overline{EF}^2 &= \frac{325}{16} \\ \overline{EF} &= \frac{5\sqrt{13}}{4} \end{aligned}$$

**(Teorema de Menelaus)** Sejam três pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$ , localizados, respectivamente, nos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e na reta suporte do lado  $\overline{BC}$ , de um triângulo  $\triangle ABC$ , de modo que  $M$ ,  $N$  e  $P$  sejam distintos dos vértices de  $\triangle ABC$  e  $C$  está entre  $B$  e  $P$ . Então,  $M$ ,  $N$  e  $P$  são colineares se, e somente se

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{AN}} = 1 \quad (5.1)$$

**Exemplo 1:** Um segmento intercepta os lados de um triângulo  $\triangle ABC$  nos pontos  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , conforme a figura. Se  $\overline{AD} = \overline{BD} = 6$ ,  $\overline{BE} = \overline{CF} = 5$  e  $\overline{CE} = 2$ , a medida do lado  $\overline{AC}$  é:

Figura 62 – Exemplo 1 - Menelaus



Fonte: Portal da Matemática - Estudo de Triângulos

Resolução: Aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo  $ABC$ , temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1$$

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{\overline{AC} + 5} = 1$$

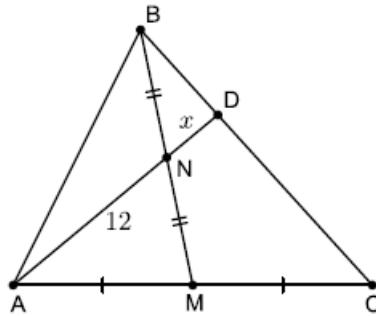
$$\overline{AC} + 5 = \frac{25}{2}$$

$$\overline{AC} = \frac{15}{2} = 7,5$$

**Exemplo 2:** No triângulo  $\triangle ABC$ , traça-se a mediana  $\overline{BM}$  e a ceviana  $\overline{AD}$ , tal que a interseção  $N$  de  $\overline{BM}$  e  $\overline{AD}$  ocorra no ponto médio de  $\overline{BM}$ . Se  $\overline{AN} = 12$ , determine  $\overline{DN}$ .

Resolução: Aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo  $\triangle ACD$ , temos:

Figura 63 – Exemplo 2 - Menelaus



Fonte: Portal da Matemática - Estudo de Triângulos

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = 1$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{x}{12} = 1$$

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} = \frac{12}{x}$$

Aplicando agora o Teorema de Menelaus no triângulo  $\triangle BCM$ , temos:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NM}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{AC}} = 1$$

$$\frac{\overline{CB} - \overline{BD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{BN}} \cdot \frac{\overline{MA}}{2\overline{MA}} = 1$$

$$2 \cdot \overline{BD} = \overline{CB} - \overline{BD}$$

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} = 3$$

Voltando ao primeiro resultado, temos  $\frac{12}{x} = 3$ , segue  $x = 4$ .

Aula 3:

**(Teorema de Ceva)** Sejam  $L$ ,  $M$ , e  $N$  pontos, respectivamente, sobre os lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  do triângulo  $\triangle ABC$ . As cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  intersectam-se em um ponto  $P$ , se e somente se,

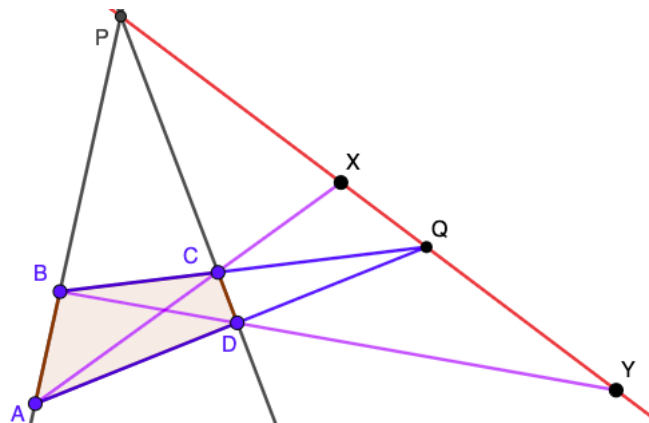
$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

**Exemplo 1:** No triângulo  $\triangle ABC$ , retângulo em  $C$ ,  $P$  e  $Q$  estão sobre os lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, tais que  $\overline{CP} = \overline{CQ} = 2$ . Pelo ponto de interseção  $R$  de  $\overline{AP}$  e  $\overline{BQ}$ , uma reta é desenhada passando também por  $C$  e cortando  $\overline{AB}$  em  $S$ . O prolongamento de  $\overline{PQ}$  corta  $\overline{AB}$  em  $T$ . Se  $\overline{AB} = 10$  e  $\overline{AC} = 8$ , determine  $\overline{TS}$ .

Resolução: 4.3

**Exemplo 2:** No quadrilátero  $ABCD$ , os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  secortam em  $P$ , enquanto os segmentos  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  se cortam em  $Q$ . As diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  cortam  $\overline{PQ}$  em  $X$  e  $Y$ .

Figura 64 – Exemplo 2 - Teorema de Ceva



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Prove que:

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{XQ}} = \frac{\overline{PY}}{\overline{YQ}}$$

Resolução: Usando o Teorema de Ceva no triângulo  $\triangle APQ$ , temos:

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{XQ}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = 1$$

Aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo  $\triangle APQ$  pela reta que contém  $B$ ,  $D$  e  $Y$ , obtemos:

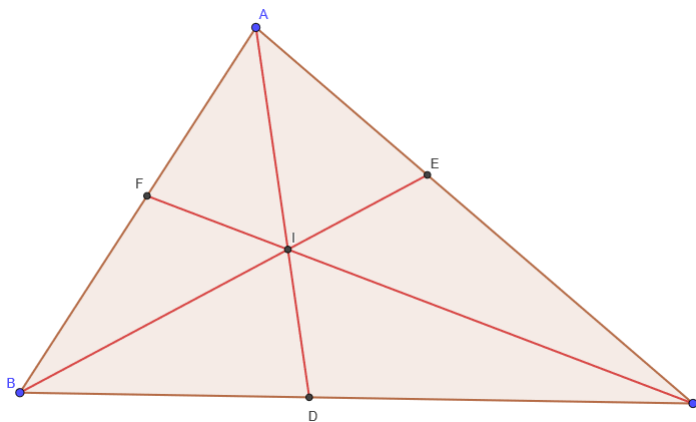
$$\frac{\overline{PY}}{\overline{YQ}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = 1$$

Comparando as duas equações, temos:

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{XQ}} = \frac{\overline{PY}}{\overline{YQ}}.$$

**Exemplo 3:** Mostre que as bissetrizes internas de um triângulo qualquer se intersectam em um ponto.

Figura 65 – Exemplo 3 - Teorema de Ceva



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

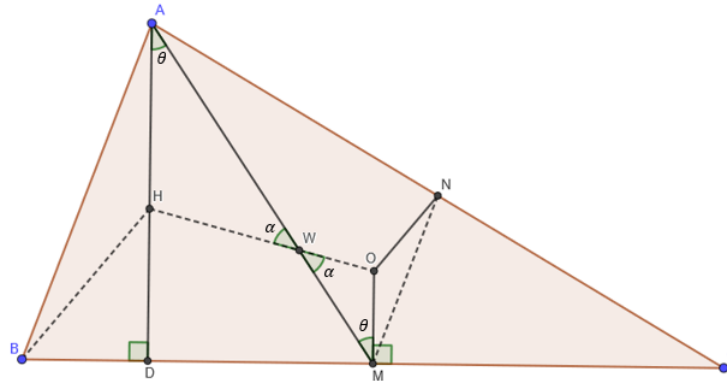
Resolução: Vamos marcar as interseções  $D$ ,  $E$  e  $F$  das bissetrizes internas com os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos  $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ ,  $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$  e  $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ . Multiplicando todas as equações temos que:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1$$

Portanto, pelo Teorema de Ceva, as bissetrizes internas de um triângulo qualquer se intersectam em um ponto.

**(Reta de Euler)** Em um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, em que o baricentro ( $G$ ), o ortocentro ( $H$ ), e o circuncentro ( $O$ ), se o baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro e sua distância ao ortocentro é o dobro de sua distância ao circuncentro e  $H$ ,  $G$  e  $O$  são colineares.

Figura 66 – Reta de Euler

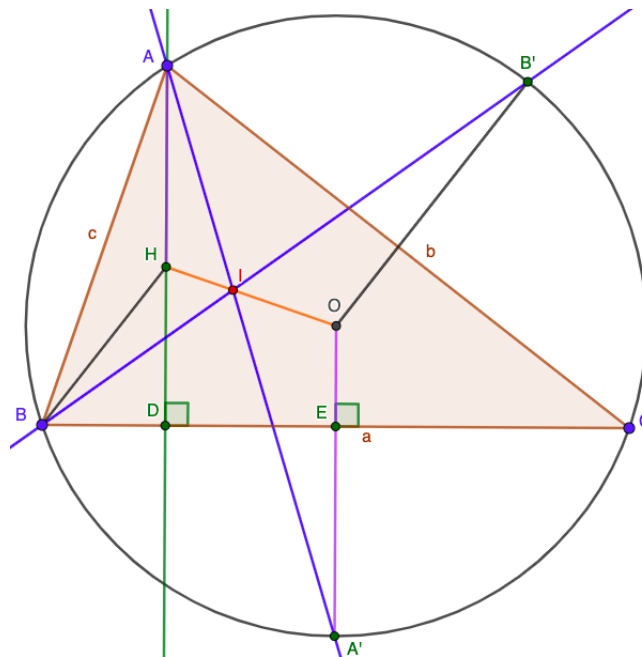


Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

**Exemplo 1:** Prove que se a reta de Euler passa pelo incentro do triângulo, então o triângulo é isósceles.

Resolução: Considere  $I$  o incentro e  $H$  o ortocentro e  $O$  o circuncentro de  $\triangle ABC$ . As retas  $\overleftrightarrow{AI}$  e  $\overleftrightarrow{BI}$  intersectam a circunferência circunscrita de  $\triangle ABC$  nos pontos  $A'$  e  $B'$ .

Figura 67 – Exemplo 1 - Reta de Euler



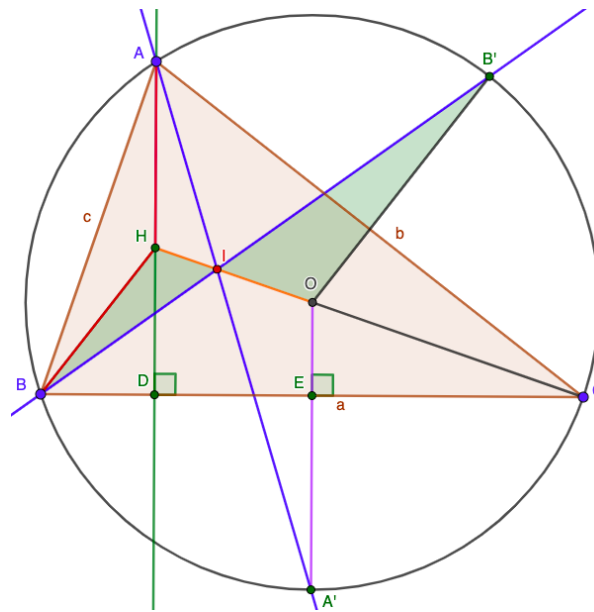
Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Suponha, por absurdo, que o triângulo  $\triangle ABC$  não é isósceles.

Então, pelo caso de semelhança 1.5 aplicado aos triângulos  $\triangle AHI$  e  $\triangle A'OI$ , constatando que:

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{HA}}$$

Figura 68 – Exemplo 1 - Reta de Euler



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Pelo caso de semelhança 1.5, nos triângulos  $\triangle BHI$  e  $\triangle B'OI$ , temos

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{HB}}$$

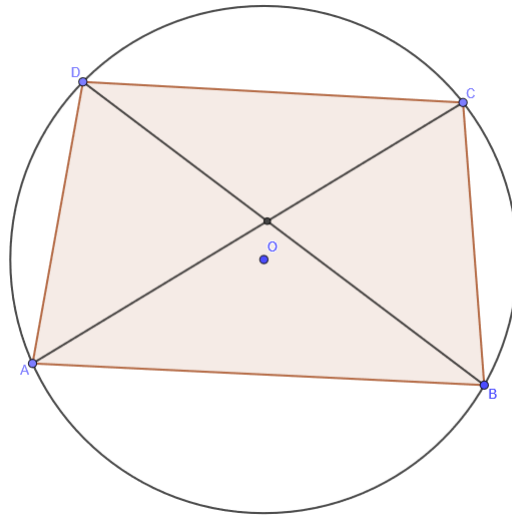
Como  $\overline{OA'} = \overline{OB'}$ , então  $\overline{AH} = \overline{BH}$  e, portanto,  $\overline{AC} = \overline{BC}$ , o que seria um absurdo.

**(Teorema de Ptolomeu)** Num quadrilátero qualquer inscrito numa circunferência, a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto de suas diagonais.

$$\overline{BD} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$$



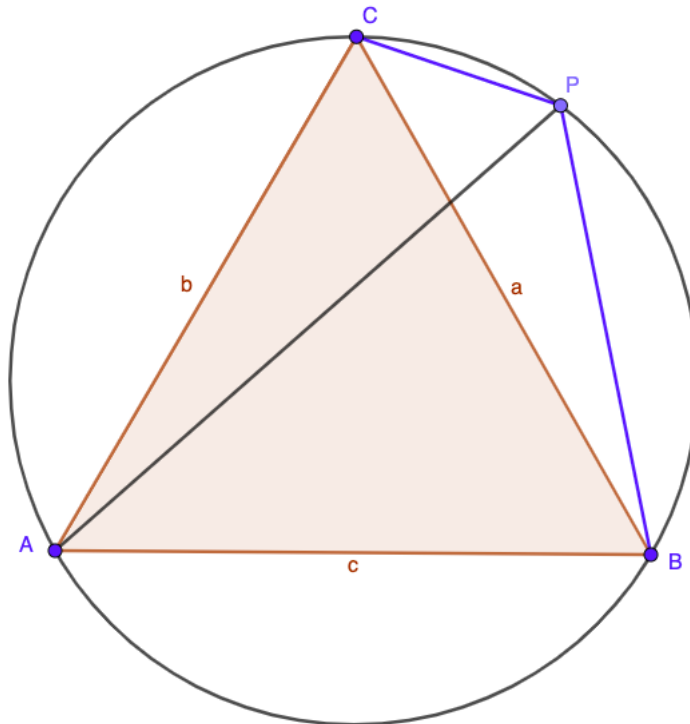
Figura 69 – Teorema de Ptolomeu



Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

**Exemplo 2:** Seja  $\triangle ABC$  um triângulo equilátero e seja  $P$  um ponto sobre o arco  $\widehat{BC}$ , que não contém  $A$ , da circunferência circunscrita ao triângulo  $\triangle ABC$ . Prove que  $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$ .

Figura 70 – Exemplo 2 - Ptolomeu



Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Resolução: Sabendo que  $\triangle ABC$  é um triângulo equilátero, temos que  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = l$ . Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero  $ABPC$ , temos:

$$\overline{BD} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$$

$$\overline{BD} \cdot l = l \cdot \overline{CD} + l \cdot \overline{AD}$$

Já que  $l$  é diferente de zero, podemos dividir todos os membros da equação por  $l$ , temos:

$$\overline{BD} = \overline{CD} + \overline{AD}.$$

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer das observações das atividades, podemos perceber várias técnicas utilizadas pelos alunos para tentar resolver as questões, alguns usando artifícios coerentes, outros nem tanto, mas a criatividade e o empenho se fizeram presentes nas resoluções e é a partir disso que vemos a forma que cada um utiliza para redigir e desenvolver seus raciocínios.

Partindo do fato que os alunos foram submetidos ao questionário sem o domínio dos teoremas citados anteriormente, obtivemos resultados bastante expressivos e resoluções criativas. Porém, o estudo dos teoremas envolvendo cevianas e o Teorema de Ptolomeu, poderia ser abordado de forma evidentemente mais simples, permitindo resolver problemas usando estratégias que seriam mais eficazes se houvesse um conhecimento prévio desse conteúdo. Se os teoremas fossem trabalhados anteriormente à aplicação do questionário, eles saberiam do que consistia o método e buscariam modelar os problemas em questão ao formato de tais teoremas, vendo os exercícios como readaptações da ideia central dos resultados e facilitando a interpretação.

Por mais que não seja garantido o acerto dos alunos, mesmo eles tendo visto os teoremas previamente, o estímulo ao raciocínio e o conhecimento de mais uma ferramenta pode ampliar ainda mais a percepção dos enunciados, aperfeiçoando o desenvolvimento das questões, pois até os alunos que obtiveram êxito em suas respostas poderiam facilmente resolver os exercícios utilizando os teoremas. Aos que não conseguiram desenvolver o raciocínio até o final, por não saber do que se tratava, poderiam pensar em algum dos formatos visto no plano de aula e adaptariam os dados das questões ao que é apresentado nos teoremas, possibilitando um melhor desempenho.

Portanto, faz-se necessário o trabalho desses teoremas em turmas olímpicas, o que pode ser feito utilizando materiais didáticos como os do Portal da Matemática, para introduzir o conceito e seguir o modelo proposto no plano de aula. Em seguida, aprofundar o conteúdo por meio das questões de olimpíadas internacionais citadas anteriormente. Sendo uma boa ferramenta para alunos e professores construírem juntos conceitos mais abstratos.



# Referências

- [1] COXETER, H. S. M. **Geometry Revisited**, The Mathematical Association of America (Inc.), 1967
- [2] AREF, M. N e WERNICK, W. **Problems e Solutions in Euclidean Geometry**, Dover Publications (Inc.), Mineola, New York, 2010.
- [3] Djukić, D., Matić, I., Janković, V. e Petrović, N. **The IMO Compendium**, IMO, Belgrado, 2004.
- [4] CHEN, E. **Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads**, The Mathematical Association of America (Inc.), 2016.
- [5] ANDREESCU, T., KORSKY, S. e POHOATA, C. **Lemmas in Olympiad Geometry**, XYZ Press, 2016.
- [6] ANDREESCU, T. e FENG, Z. **Mathematical Olympiads 1998-1999**, The Mathematical Association of America, 1999.
- [7] ANDREESCU, T. e FENG, Z. **Mathematical Olympiads 2000**, The Mathematical Association of America, 2000.
- [8] MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**, SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [9] MACHADO, P. F. **Fundamentos de Geometria Plana**, Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2012.
- [10] LOURIDAS, S. E. e RASSIAS, M. Th. **Problem-Solving and Selected Topics in Euclidean Geometry**, Springer, New York, 2013.
- [11] MAIA FILHO, R. A. **O Teorema de Ptolomeu e aplicações**, Profmat UEPB, Campina Grande, 2016.
- [12] LIMA, A. T. O. **Teorema de Menelaus e de Ceva: Apresentação, Demonstração e Aplicação**, Profmat UFPI, Teresina, 2016.
- [13] ASSIS, C. e MIRANDA, T. **Relação de Stewart**, Portal da Matemática - OBMEP. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/5fifrcv2ff8ck.pdf>>, último acesso 10/04/2020.
- [14] ASSIS, C. e MIRANDA, T. **Teorema de Menelaus**, Portal da Matemática - OBMEP. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/cre1ol4e0hwgo.pdf>>, último acesso 10/04/2020.
- [15] THIAGO, C. **Pontos Notáveis II: Baricentro e reta de Euler**, Polos Olímpici-

cos de Treinamento (POTI), 2012. Disponível em: <[https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/geometria3/Aula05-Pontos\\_NotaveisII.pdf](https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/geometria3/Aula05-Pontos_NotaveisII.pdf)>, último acesso 19/05/2020.

[16] THIAGO, C. **Teorema de Ptolomeu**, Polos Olímpicos de Treinamento (POTI), 2012. Disponível em: <[https://potiimpa.br/uploads/material\\_teorico/58ndrrasf5c8s.pdf](https://potiimpa.br/uploads/material_teorico/58ndrrasf5c8s.pdf)>, último acesso 10/04/2020.

[17] THIAGO, C. **Teorema de Ceva e Teorema de Menelaus**, Polos Olímpicos de Treinamento (POTI), 2012. Disponível em: <[https://potiimpa.br/uploads/material\\_teorico/86bacem5rzoco.pdf](https://potiimpa.br/uploads/material_teorico/86bacem5rzoco.pdf)>, último acesso 10/04/2020.

[18] AALIPANAH, H. e MAGHSOUDI, I. **Problems and Solutions from Contests**, Iran's Geometry Problems 2014-2015.

[19] **38ª Olimpíada Brasileira de Matemática 2ª fase - Nível 3 (Ensino Médio)**. Disponível em: <[https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/prova\\_2fase\\_nivel3\\_2016-1.pdf](https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/prova_2fase_nivel3_2016-1.pdf)>, último acesso 10/04/2020.

# APÊNDICE 1 - QUESTIONÁRIO

## Atividade de Sondagem Geometria Plana - Nível 3

Idade:

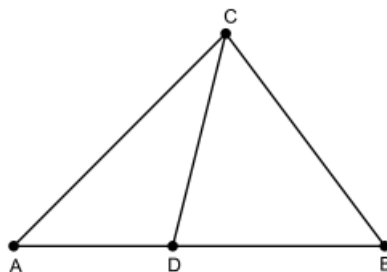
Série:

1. Você já participou de olimpíadas de Matemática? Se sim, quais?
2. Você conhece alguma olimpíada de Matemática internacional? Se sim, quais?
3. Você já participou de alguma olimpíada internacional de Matemática? Se sim, quais?
4. Quais teoremas de Geometria Plana você está habituado a utilizar em problemas de Matemática?
5. Quais teoremas de Geometria Plana você se recorda de ter visto em problemas de olimpíadas de Matemática?
6. Você sabe o que é uma ceviana?
7. Você já teve contato com algum teorema de Geometria Plana que envolve cevianas? Se sim, quais?

ATIVIDADE: Utilizando seus conhecimentos próprios sobre Geometria, tente desenvolver o que conseguir dos seguintes problemas abaixo.

**Questão 1:** De acordo com a figura, sendo  $\overline{AD} = 4$ ,  $\overline{BD} = 6$ ,  $\overline{BC} = 7$  e  $\overline{AC} = 8$ , a medida do segmento  $\overline{CD}$  é?

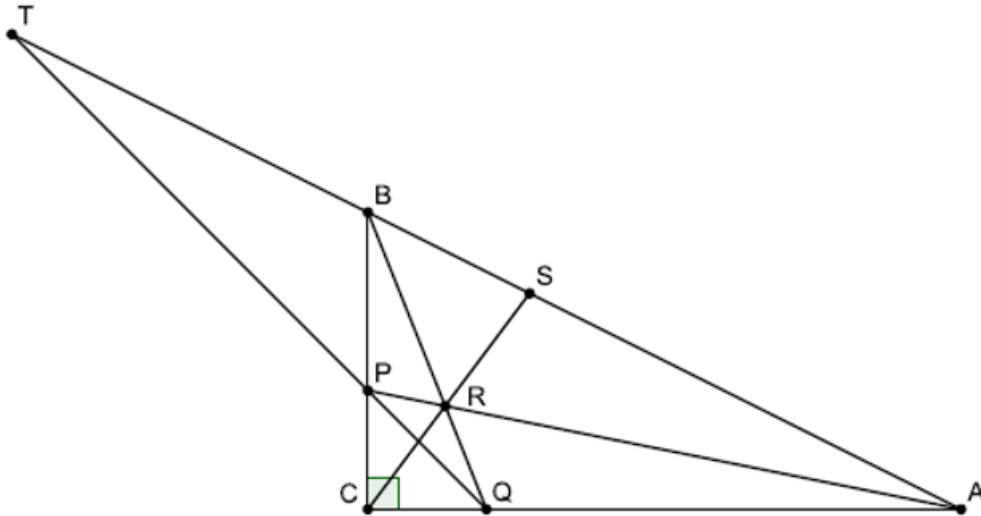
Figura 71 – Exemplo 1 - Teorema de Stewart



Fonte: Portal da Matemática - Estudo de Triângulos

**Questão 2:** No triângulo  $\triangle ABC$ , retângulo em  $C$ ,  $P$  e  $Q$  estão sobre os lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, tais que  $\overline{CP} = \overline{CQ} = 2$ . Pelo ponto de interseção  $R$  de  $\overline{AP}$  e  $\overline{BQ}$ , uma reta é desenhada passando também por  $C$  e cortando  $\overline{AB}$  em  $S$ . O prolongamento de  $\overline{PQ}$  corta  $\overline{AB}$  em  $T$ . Se  $\overline{AB} = 10$  e  $\overline{AC} = 8$ , determine  $\overline{TS}$ .

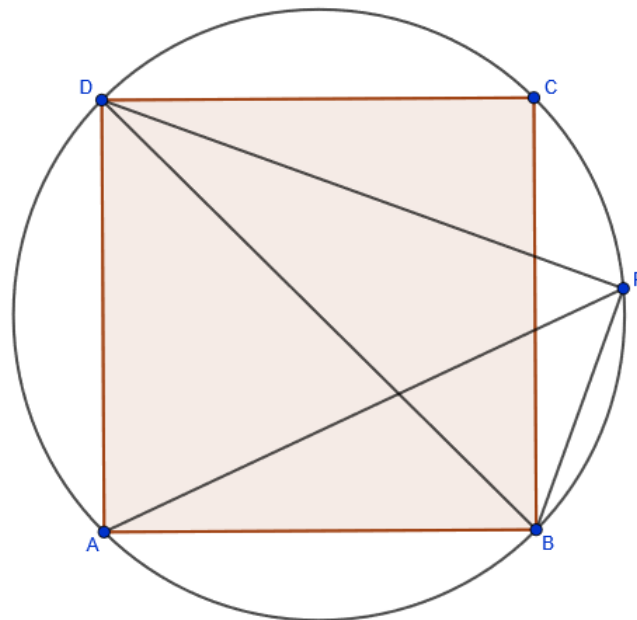
Figura 72 – Exemplo 1 - Teorema de Ceva



Fonte: Portal da Matemática - Estudo de Triângulos.

**Questão 3:** Prove que as distâncias entre um ponto sobre uma circunferência e os quatro vértices de um quadrado nesta inscrita não podem ser todas números racionais. Dica: Analise o

Figura 73 – Seletiva do Brasil para a Cone Sul - POTI 2012



Fonte: Produzido pelo autor, 2019.

quadrilátero  $ABPC$ .



# ANEXO 1 - DECLARAÇÃO ESCOLAR

Figura 74 – DECLARAÇÃO

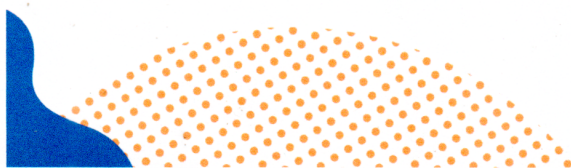


## DECLARAÇÃO

Declaro, para os devidos fins, que Gabriel Vitor de Souza Brito, portador do CPF - 111.776.714-09, professor de matemática nessa Instituição de ensino, foi autorizado a realizar uma pesquisa através de um formulário, com nossos alunos das turmas olímpicas, no contra turno, para sua tese de mestrado.

Recife, 01 de Julho de 2020.

Márcia Wanderley de Siqueira  
Diretora Pedagógica



CASA FORTE | TEL. (81) 3441.6300  
MOTIVOCASAFORTE@COLEGIOMOTIVO.COM.BR