Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

O Poker como ferramenta de ensino da Matemática na Educação Básica

José Roberto Amaral Nascimento

Dissertação de Mestrado

Recife
16/06/2014

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Departamento de Matemática

José Roberto Amaral Nascimento

O Poker como ferramenta de ensino da Matemática na Educação Básica

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Rodrigo Gondim*

Recife
16/06/2014

Aos meus pais, irmão, esposa e filho.

Agradecimentos

- Aos meus pais, Graça e Fernando, por todo empenho e amor em minha formação.
- Ao meu irmão, Gleyson, pelo companheirimo e pelo ombro amigo em todos os momentos que precisei.
- Aos amigos que estiveram ao meu lado nos momentos importantes da minha trajetória, sempre incentivando e vibrando junto comigo em minhas conquistas.
- À minha esposa, Julili, pelo companheirismo, pela itensidade no amar e no cuidar e pelo maior presente de nossas vidas: Gabriel. E a ele, por nos alegrar todos os dias e ter possibilitado em mim o nascimento de um novo ser.
- Aos amigos Milton, Nena, Mituca, Michele, Pedro, Dani e Julili, por possibilitar o meu encontro com esse jogo tão fascinante e rico em aplicações.
- Aos amigos e companheiros de jornada no PROFMAT, em especial a Carlos, Danilo, Emerson e Josemar pelas valiosas discussões e temporadas de estudo.
- À CAPES, pelo apoio financeiro.
- Aos amigos de trabalho, em especial aos gestores Alba, Flávia, Kátia, Maridja e Sivani, pelo apoio e compreensão nos momentos que precisei.
- Ao meu amigo Sérgio Claudino, pela atenção e dedicação na revisão do texto.
- Ao meu Orientador, Rodrigo, por guiar-me neste trabalho.

“A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo”.

—ALBERT EINSTEIN

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta diferenciada de aplicação de uns dos principais temas da Matemática na Educação Básica, a Combinatória e a Probabilidade, através do jogo do *poker*. Com essa proposta, nosso objetivo geral é usar a análise e a prática do jogo do *poker* como ferramenta de ensino desses temas e da Esperança Matemática. Dentre os autores estudados, destacamos GADELHA[5], LAPLACE[21], VYGOTSKY[6], SKLANSKY[8], MORGADO[20], MAGALHÃES[19] e LIMA[23]. Para isso, fizemos uma averiguação estrutural do poker, em especial na modalidade *Texas Hold'em*, calculando algumas probabilidades e analisando algumas situações em que a tomada de decisão pode ser norteada pelo conceito da Esperança Matemática. Ao final, apresentamos uma proposta pedagógica no intuito de sistematizar e facilitar a abordagem do nosso tema.

Palavras-chave: Poker, Probabilidade, Combinatória, Esperança Matemática,Educação Básica, Ensino.

Abstract

This paper presents a different proposal of application of the main themes of Mathematics in Primary Education in Combinatorics and Probability ones, through the game of poker. With this proposal, our overall goal is to use the analysis and practice poker game as teaching these topics and Mathematical Expectation tool. Among the authors studied include GADELHA, LAPLACE, VYGOTSKY, SKLANSKY, MORGADO, MAGALHÃES and LIMA. For this we investigate the structural poker, especially in Texas Hold'em mode, calculating some probabilities and analyzing some situations in which decision making can be guided by the concept of Hope Mathematics. At the end, we present a pedagogical proposal in order to systematize and facilitate the approach of our subject.

Keywords: Poker, Probability, Combinatorics, Mathematical Expectation, Primary Education, Teaching.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

CAPÍTULO 1

Probabilidade: histórico, ensino e sua estreita relação com o lúdico

1.1 Probabilidade: um breve histórico

Nesta seção, faremos um passeio pelas origens da Probabilidade, baseado no texto de GADELHA [5]. No entanto, destacamos as seguintes ideias, extraídas do Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades, de Pierre-Simon de LAPLACE[21]:

> "Pode-se mesmo dizer, rigorosamente, que quase todos os nossos conhecimentos são apenas prováveis; e no pequeno número de coisas que podemos saber com certeza, mesmo nas ciências matemáticas, os principais meios para se chegar à verdade - a indução e a analogia - são fundados nas probabilidades".

1.1.1 Pré-história

A humanidade sempre se pautou na busca de superávit nas atividades extra-laborais que envolviam o imprevisível. O jogo de azar é milenar. Inicialmente em pinturas de tumbas egípcias(3.500 a.c) com dados de 4 faces; em seguida com 6 faces(3.000 a.c) no norte do Iraque. Só nas cruzadas, ocorreu a chegada de vários jogos de dados aqui no ocidente (azar é derivada de ?al zahr? que significa ?dado? em árabe. Durante os séculos 11, 14 e até meados do 17, a Europa realizou alguns eventos esparsos que envolviam levantamento de dados estatísticos, apólice de seguro navais e considerações filosóficas. Porém, apenas em 1654, com Blaise Pascal e Pierre de Fermat, iniciou-se a aplicação sistemática de análise matemática e o respectivo estabelecimento de regras para equacionar tais problemas, pois queriam solucionar o desafio de um monge franciscano, Lucas Paccioli(1445-1514).

Os trabalhos anteriores aos de Pascal e Fermat mais notáveis são os de Cardano e Tartaglia e a contribuição de Galileu à teoria dos erros de medição. Cardano, um famoso médico de Milão do séc. XVI, adorava jogos de azar. Em uma de seus trabalhos, Liber de Ludo Aleae "Livro de Jogos de Azar", conceitua a probabilidade de um evento como sendo a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de possíveis resultados e valoriza os métodos combinatoriais na probabilidade; valor dado também por Tartaglia, com o Tratado geral sobre números e medidas, onde também é investigado o problema de Paccioli.

Destaca-se também a contribuição dos hindus nos cálculos combinatoriais, além do filósofo e matemático alemão Gottfried W. Leibniz, com sua ideia que previa a possibilidade de o raciocínio lógico ser realizado por máquinas. Já Galileu, inspirado em Cardano, fez um trabalho sobre o jogo de "dado". Todavia, foi relevante sua percepção de comportamento dos erros em observação astronômicas, considerando-os inevitáveis e fazendo propostas de como levá-los em consideração nos resultados observados.

1.1.2 Origens

A resolução do problema dos pontos, ou seja, quem será o vencedor se houver uma interrupção no meio do jogo, do monge Paccioli em 1494 foi exposta a Pascal por Chevalier de Méré e que marcou a participação na gênese da teoria da probabilidade.

Blaise Pascal (1623-1662) foi um garoto diferenciado que, na época, chegou a impressionar Descarte. Além disso, inventou e patenteou uma máquina de calcular. Em seu destacado trabalho Traité du triangle arithmétique, um fragmento de De Alea Geometriae, ele estabeleceu os fundamentos para o cálculo de probabilidades, fruto de uma pesquisa desenvolvida com Fermat. Em 1654, junto com Pierre Fermat(1601-1665) estabeleceram um método sistemático para calcular probabilidades e solucionaram o problema de Paccioli. As correspondências de Pascal e Fermat foram publicadas em 1679, em Toulouse, sendo hoje consideradas a origem do desenvolvimento da teoria matemática da probabilidade. Assim sendo, Os problemas então considerados, hoje estudados em um curso de probabilidade elementar, baseavam-se na hipótese de um número finito de resultados e de eventos igualmente prováveis, e a análise combinatória desempenhou um papel fundamental em suas soluções. Em 1653 Pascal já havia comentado em uma carta a Fermat o seu manuscrito Traité du triangle arithmétique, no qual faz um estudo detalhado do triângulo compondo os coeficientes binomiais, hoje conhecido como triângulo de Pascal. Pascal determinou a solução do problema de Paccioli usando esse triângulo aritmético, obtendo o resultado que se ao jogador A faltam m pontos para ganhar e a B faltam n pontos, então a razão das probabilidades de ganharem é dada por

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\binom{m+n-1}{0} + \dots + \binom{m+n-1}{n-1}}{\binom{m+n-1}{0} + \dots + \binom{m+n-1}{m-1}}$$

O prêmio deve então ser dividido nesta proporção.

A primeira publicação em teoria de probabilidade foi um pequeno livro intitulado De Ratiociniis in Ludo Aleae, escrito em 1657 por Christiaan Huygens (1629?1695), famoso por contribuir em áreas como Astronomia, ótica e teoria ondulatória da luz. Esse trabalho foi inicialmente publicado como apêndice no livro Exercitationes mathematicae de Frans van Schooten (que foi seu professor e o maior divulgador da geometria cartesiana, tendo impresso a primeira versão, em Latim, de ?La géométrie? de Descartes). De uma importante família holandesa, Huygens, cujo pai era amigo de Descarte, foi discípulo deste. Huygens resolveu uma série de 14 problemas relacionados a jogos de azar (sem usar análise combinatória), compondo seu livreto que se tornou famoso, reeditado diversas vezes e usado até o século 18 como um livro de introdução à teoria de probabilidade. Em outra contribuição importante, ele construiu em 1669, com base em dados estatísticos levantados por John Grunt em 1662, uma curva de mortalidade e definiu a noção de vida média e probabilidade de sobrevida que fundamenta cálculos atuariais, sendo o primeiro a aplicar probabilidade à estatística demográfica. Seu trabalho influenciou vários matemáticos da época, notadamente J. Bernoulli, e teve papel fundamental, comparável aos de Pascal e Fermat, para estabelecer a teoria de probabilidade.

1.1.3 Maturação da probabilidade clássica

Outros importantes estudiosos também contribuíram para esse tema, tais como: J. Bernoulli, DeMoivre e Laplace. O primeiro grande tratado de probabilidade foi Ars Conjectandi ? A Arte da Conjectura? escrito pelo matemático suíço Jacob (Jacques) Bernoulli (1654?1705). Ars Conjectandi foi dividido em quatro partes: a 1a reeditou o livro de Huygens complementado com vários comentários; a 2a intitulada ?A Doutrina de Permutações e Combinações? foi usado como livro texto em análise combinatória durante o século 18; a 3a fez a aplicação da teoria de combinações na solução detalhada de 24 problemas de jogos de azar; finalmente, na 4a, denominada Pars Quarta, onde se propôs fazer aplicações em problemas cívicos, morais e econômicos. Em seu livro J. Bernoulli provou a Lei dos Grandes Números é o primeiro teorema limite da probabilidade, um resultado que estabelece uma relação entre os conceitos de probabilidade e frequência relativa e que é fundamental para a teoria moderna de amostragem. J. Bernoulli provou essa Lei usando cálculos com coeficientes binomiais sem utilizar a aproximação de Stirling como feito por DeMoivre poucos anos depois. As contribuições de J. Bernoulli se estenderam às áreas de álgebra, cálculo infinitesimal, cálculo variacional, mecânica e teoria de séries.

Da família Bernoulli, outros membros marcaram seu nome na história da probabilidade. Nicolaus(I), além de sua contribuição como editor do livro de seu tio, fez proposições de alguns problemas de probabilidade, dentre os quais o conhecido Paradoxo de São Petersburgo: dois jogadores lançam uma moeda honesta, um deles (A) pagando ao outro (B) $\$2k$ se cara aparece pela primeira vez no k-ésimo lançamento. A questão é determinar o quanto B deve pagar a A para entrar no jogo de forma que os valores esperados dos ganhos de cada um sejam iguais (tornando assim o jogo honesto). Ocorre que o valor esperado do ganho de B tende a infinito, o que obrigaria B a pagar uma quantidade infinita para entrar no jogo 2. Este problema foi proposto por Nicolaus(I) em uma carta a Pierre Rémond de Montmort (1678?1719). Já Daniel Bernoulli (1700?1782), primo de Nicolaus, trabalhou em São Petersburgo e teve significativa contribuição na teoria de probabilidade. Ele foi o primeiro a propor o uso de estimativas de máxima verossimilhança e a aplicar o cálculo diferencial, ao invés de cálculos combinatoriais, na solução de problemas de probabilidade. A primeira tabela da distribuição normal foi computada por Daniel Bernoulli em 1738 (cinco anos após DeMoivre descobri-la). Seu trabalho mais conhecido é Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis sobre uma nova teoria de medida de risco no qual apresenta seu conceito de esperança moral (ou utilidade média) que usa para dar uma solução finita ao Paradoxo de São Petersburgo.

O matemático e físico suíco Leonhard Euler (1707?1783) foi aluno de Johann Bernoulli, um dos mais importantes matemáticos da época, irmão de Jacob e pai de Daniel, e conviveu com a família Bernoulli em Basel. Euler fez contribuições na aplicação de probabilidade na análise de loterias (ele foi comissionado pelo rei Frederico II, o Grande, da Prússia para avaliar e organizar uma loteria), e em demografia e seguros.

Em 1718, o matemático francês Abraham DeMoivre (1667?1754) publicou, em inglês, Doctrine of Chances, dedicando seu trabalho a seu amigo Isaac Newton. Nesse livro DeMoivre propôs, mesmo de forma implícita, as técnicas de reduzir problemas de probabilidade a equações diferenças e de usar funções geratrizes para solucionar essas equações, que foram mais tarde aperfeiçoadas por Laplace. Na segunda edição, em 1738, DeMoivre introduz, pela primeira vez, a distribuição normal, que usou como uma aproximação para a distribuição binomial.

Este resultado foi estendido por Laplace que obteve, para sequências de Bernoulli, o teorema limite central hoje conhecido como o teorema de DeMoivre-Laplace) DeMoivre provou e usou em seus resultados a aproximação de Stirling para o fatorial: $n! \approx \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}$.

Na segunda metade do século 18 a teoria de probabilidade começa a ser aplicada sistematicamente às ciências naturais. O naturalista francês Georges-Louis Leclerc investigou as origens dos planetas como produto de colisões, para o que fez cálculos de probabilidades. O famoso ?problema da agulha de Buffon? foi proposto por ele em 1777. O problema é determinar a probabilidade de uma agulha de comprimento l atravessar um feixe de paralelas, distantes entre si de $a > l$, quando lançada aleatoriamente. A resposta é $\frac{2l}{\pi a}$ e Buffon a usou para calcular experimentalmente o valor de π.

O Marquês Pierre Simon de Laplace (1749?1827) escreveu seu grande tratado Théorie Analytique des Probabilités, publicado em dois volumes, a primeira edição sendo dedicada a Napoleon-le-Grand. Os fundamentos da teoria de probabilidade foram então colocados por Laplace que se manteve praticamente inalterada até o início do século 20. Nesse tratado Laplace fez novas contribuições e reuniu, sistematizou e ampliou resultados desenvolvidos por seus predecessores. Estabeleceu os métodos de equações diferenças e de funções geratrizes e deu uma nova formulação e uma prova heurística do teorema central do limite. Incluiu também duas importantes contribuições: a primeira referente a aplicações de probabilidade na teoria de análise de erros de medições ; a segunda, quando define a probabilidade a priori (que originou grandes controvérsias) para o cálculo da chamada probabilidade inversa (ou probabilidade de causas ou a posteriori), conceito este sugerido pelo trabalho de Bayes em 1763. T. Simpson foi o primeiro a usar distribuições de probabilidade contínuas e a desenvolver uma teoria sistemática de erros de medidas aleatórios, independentemente do conceito de variáveis aleatórias, que mais tarde, em torno de 1770, foi redescoberta por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), o genial autor de "Mechanique Analytique". Thomas Bayes (1702?1761) escreveu um único trabalho matemático, Essay towards solving a problem in the doctrine of chances. A originalidade e a importância do conceito de probabilidade inversa introduzido por Bayes nesse trabalho o imortalizou. Suas conclusões foram aceitas por Laplace em um artigo de 1781 que deduziu, no segundo volume de sua Théorie Analytique, a fórmula hoje conhecida como regra de Bayes. Essa fórmula dá à probabilidade de uma dada hipótese (ou causa)a posteriori de observações feitas, em função de sua probabilidade a priori e da probabilidade de ocorrência das observações assumindo verdadeira a hipótese dada (a probabilidade de verossimilhança). Apesar das propostas alternativas, seus conceitos foram alvos de contestações.

Em 1837 Siméon-Denis Poisson (1781?1840) publicou seu trabalho Recherches sur la Probabilité des Jugements onde defendia a tese que a teoria de probabilidade era aplicável na avaliação da correção de decisões judiciais. A denominada Lei dos Pequenos Números contendo a distribuição de Poisson é hoje básica na análise de vários problemas relativos a ocorrências de eventos aleatórios no tempo e no espaço como no estudo de filas, radioatividade, etc. Essa lei afirma que se as probabilidades $p_n, n = 1, 2, ...$, de um evento A em uma sequência de experimentos independentes satisfazem $p_n \to 0$, com $np_n \to \lambda$, quando $n \to \infty$, então a probabilidade de ocorrer k eventos A em m experimentos é, para $m \to \infty$, igual a $\frac{\lambda^k e^{-k}}{k!}$. Esta é uma boa aproximação para a distribuição de Bernoulli $Be(n, p)$ se np não é muito grande.

1.1.4 A Escola de São Petersburgo

No final do século 19, o russo Pafnuty L?vovich Chebyshev (1821?1884) fundou a denominada escola de São Petersburgo que produziu grandes matemáticos russos com contribuições fundamentais à teoria de Probabilidade. Ele estabeleceu uma simples desigualdade que permitiu uma prova trivial da lei dos grandes números e por isso é o responsável maior pela posição excepcional que teve no desenvolvimento dessa teoria.

1.1.5 Período Moderno

O uso de probabilidade e de modelos estocásticos na Física no final do século 19 e início do século 20 evidenciou as limitações dos fundamentos matemáticos da teoria de Probabilidade a ponto de desacreditá-la junto a vários matemáticos da época. A análise de processos estocásticos requer um rigor matemático da teoria de probabilidade que seria alcançado somente com a axiomatização proposta por Kolmogorov. Um dos mais importantes processos estocásticos é o movimento browniano ou processo de Wiener. O tratamento matematicamente rigoroso do movimento browniano só foi dado em 1923 Norbert Wiener (1894?1964) (um dos maiores matemáticos americanos, conhecido popularmente como um dos criadores da Cibernética) que mostrou ser suas funções amostras contínuas e não-diferenciáveis (com probabilidade 1). No entanto, seu método era aplicável ao caso específico desse processo e somente após o estabelecimento por Kolmogorov, em 1929-1933, dos fundamentos axiomáticos da teoria de probabilidade foi possível o tratamento rigoroso dos processos estocásticos em geral.

Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903?1987) foi um dos mais importantes matemáticos do século 20 com trabalhos que tiveram impactos em várias áreas da Matemática. Seu interesse em probabilidade iniciou-se em 1924 e em 1925 publicou seu primeiro trabalho nesta área com Aleksandr Ya. Khintchine (1894?1959) contendo o importante teorema das ?três séries? e resultados em inequações de somas parciais de variáveis aleatórias que se tornaram a base para as desigualdades de martingales e do cálculo estocástico. Em 1929, havia sido publicado seu trabalho Teoria geral de medidas e teoria de probabilidade onde era apresentada a primeira descrição de uma construção axiomática baseada na teoria de medidas que havia sido criada em torno de 1901 por Henri Lebesgue (1875?1941) e Émile Borel (1871?1956). Em 1933, publicou em alemão o livro intitulado Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (traduzido para o inglês sob o título Foundations of the Calculus of Probability) onde desenvolve a teoria de probabilidade de forma matematicamente rigorosa a partir dos fundamentos axiomáticos baseados na teoria de medidas. Com essa axiomatização obteve-se a base matemática necessária para o desenvolvimento da teoria de processos estocásticos e para uma definição rigorosa da esperança condicional. Esta definição possibilitou a Joseph Leo Doob (1910?) e Paul Lévy(1886?1971) o desenvolvimento da teoria de martingales, hoje uma das principais ferramentas da teoria moderna de probabilidade no estudo de processos estocástico, usada na prova de resultados em convergência com probabilidade 1 de sequências de variáveis aleatórias. A axiomatização de Kolmogorov marcou o início do desenvolvimento da teoria moderna de probabilidade.

Vimos neste capítulo o quão próxima é a relação da probabilidade com os jogos. Nessa perspectiva, ressaltamos as palavras de Laplace:

> " A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano."
> Pierre Simon Laplace (1749 - 1827)

1.2 Ensino de Probabilidade no Brasil

A Probabilidade, juntamente com a estatística, é um tema fundamantal para a educação que visa formar cidadãos conscientes, "pois permite o crescimento de um senso nevrálgico sob diversas perspectivas sejam elas, cientificas ou não."[24]

O ensino de probabilidade na educação básica constitui umas das recomendações que constam nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais)[1] e é reforçado no estado de Pernambuco através dos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco [2]:

> *"A construção da ideia de probabilidade deve apoiar-se em situações elaboradas de tal forma que o estudante possa experimentar e realizar simulações. dessa maneira, em etapas posteriores, o estudante poderá estabelecer o modelo matemático que permite determinar a probabilidade de ocorrência de um evento."*

E completa:

> *"A ideia de probabilidade deve ser ampliada durante o Ensino Médio, de forma que o estudante, ao fim dessa etapa, seja capaz de estabelecer o modelo matemático que permite determinar a probabilidade de ocorrência de um evento. o conceito pode ser ampliado também para situações em que seja necessário identificar a probabilidade da união e da interseção de eventos, os eventos disjuntos e o conceito de independência de eventos(...)"*

Como principal base para o cálculo de probabilidades, as ideias da Combinatória devem estar muito claras para o aluno, tanto no que tange à compreensão como também sua execução para resolução de problemas. Para isso, consideramos de extrema importância as seguintes recomendações retiradas de [20] para os professores:

- Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas.
- Aprenda e faça com que os alunos aprendam com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar o motivo do erro.
- Combinatória não é difícil. Resista aos truques imediatos. Devemos procurar métodos mais gerais e não truques específicos para determinados formatos de problemas.
- Resista às enfadonhas listas de exercícios que ninguém sabe resolver e que só fazem com que os alunos se desinteressem, cada vez mais pelo tema.

1.3 O jogo como ferramenta de ensino

Com relação ao uso de jogos no ensino da Matemática, os PCN (Brasil, 2001b, p.49) ressaltam: Um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor, analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que deseja desenvolver. Os jogos constituem um recurso favorável ao ensino da matemática, pois apresentam situações-problema significativas que desafiam o pensamento, desencadeando o processo de equilibração, responsáveis pela construção de novos conhecimentos. A linguagem matemática, que é muitas vezes difícil para o aluno entender na sala de aula, pode ser melhor entendida em um contexto lúdico. Os PCN para o ensino da matemática (Brasil, 2001b) também apontam a relevância dos jogos no contexto pedagógico e seu caráter de desafio. De acordo com VYGOTSKY(1989)[6],

> "Os jogos propiciam o desenvolvimento da linguagem, do pensamento e da concentração. O lúdico influencia no desenvolvimento do aluno, ensinando-o a agir corretamente em uma determinada situação e estimulando sua capacidade de discernimento. Os jogos educacionais são uma alternativa de ensino e aprendizagem e ganham popularidade nas escolas. Sua utilização deve ser adequada pelos professores como um valioso incentivador para a aprendizagem, estimulando as relações cognitivas como o desenvolvimento da inteligência, as relações afetivas. Portanto, jogos educativos digitais usados em sala de aula podem auxiliar na aprendizagem".

CAPÍTULO 2
O Poker

2.1 Histórico

A origem do *poker* ainda não é caracterizada por um consenso entre os pesquisadores. Segundo a genealogia mais recorrente entre os estudiosos, e para a surpresa do leitor, o jogo não nasceu nos Estados Unidos. Ele chegou por lá através dos imigrantes franceses que buscavam melhores oportunidades e trouxeram consigo o *poche* (palavra de origem alemã que significa destruir, esmagar), que era jogado com 20 cartas, "...mas que já trazia, no nome, a pressão e a competitividade inerentes ao jogo..." [9]. A partir de então, difundir-se-ia ao longo da rota do Rio Mississippi, durante o século XVIII, e se popularizaria nos Estados Unidos durante o século XIX, quando o país começou sua expansão até o oeste. *"Por este motivo, a história do pôquer é por vezes associada com o velho oeste americano"* [10].

Mas foi só no fim do século XIX, após a Guerra Civil americana, que o jogo tomou o formato que conhecemos hoje: dispondo das 52 cartas. Desde então, trata-se da modalidade mais popular dos Estados Unidos e, atualmente, vem conquistando cada vez mais admiradores do mundo inteiro, inclusive no Brasil, através da variação *Texas Hold'em*.

Mas foi no século XX que começou a lucrativa história do poker. Inicialmente, o estilo mais popular era o fechado, no qual os jogadores não veem as cartas uns dos outros. Foi a partir da segunda década que o *poker* aberto *(Hold'em Poker)* teve seu pontapé inicial, segundo a declação do lendário jogador Johnny Moss, que afirmou ter jogado o *poker* aberto pela primeira vez em 1925, na cidade de Dallas.

Em meio ao debate com relação à legalidade do jogo - e por conta das suas sutilezas - o *poker* aberto foi a variante escolhida para fazer a seleção dos jogadores que teriam direito a disputar prêmios em campeonatos pelos cassinos de todo o país. Foi assim que, em 1970, ocorreu a primeira revolução da hitória do *poker*: o lendário proprietário de cassino em Las Vegas, Benny Binion, deciciu fazer o que seria o primeiro torneio para os melhores jogadores do mundo: *WSOP - World Series of Poker* (Série Mundial de *Poker*). Esse campeonato, jogado no estilo *Texas Hold'em*, é disputado até hoje e atrai não só profissionais, mas também amadores: dentre esses, algumas celebridades consagradas em outros esportes. E tudo isso é transmitido por um canal da TV fechada, o *ESPN*.

Outra revolução na história desse esporte[1] acontecera décadas mais tarde com o advento da internet: salas *on line* foram criadas com apostas fictícias (ou não!) para que usuários da rede mundial de computadores desfrutassem do "friozinho na barriga", que antecede cada rodada de apostas. Hoje, uma sala como essas está ao alcance das mãos: dispomos de uma lista

[1] o *poker* é considerado um esporte da mente desde abril/2010, quando foi reconhecido pela Federação Internacional dos Esportes da Mente, IMSA.

de vários aplicativos gratuitos para baixar diretamente do seu *tablet* ou *smartphone*. Para se ter uma ideia dessa democratização do *poker*, uma pesquisa simples na loja do *Google*[2] ou na *Appstore*[3] revela centenas de aplicativos que foram desenvolvidos para a prática do jogo, em sua maioria na modalidade *Texas Hold'em*. Para exemplificar, um desses *apps* - o *PokerStars.net* - já apresenta mais de um milhão de *downloads* na loja do *Google*[4].

Diante dessas últimas informações, pode-se inserir que a popularização do *poker* é um fato corrente.

Icluir frase motivadora...

"Existem 2.598.960 possibilidades de mãos no poker, porém você receberá somente uma. A beleza é que você não precisa da melhor pra vencer"

"Jogar poker é a arte de ver o mundo de dentro da mente de uma pessoa" (André Akkari, jogador profisional de *poker*, um dos únicos brasileiros a ganhar um Bracelete da WSOP)

2.2 Regras Básicas, ranking de mãos e variantes

Nesta seção, apresentaremos as regras básicas para as diversas modalidades do *poker*, suas principais variantes e o ranking das mãos a se formar em um jogo. Para tanto, nossas discussões serão à luz das referências [4] e [9]. No entanto, antes de adentramos no mundo deste fascinante jogo, é necessário desmistificar a ideia de que o *poker* é um jogo de azar[5]. Para isso, e para efeitos legais, sugerimos a leitura do laudo pericial emitido pelo Dr. Ricardo Molina à CBTH - Confederação Brasileira de *Texas Hold'em* [3]. Em suma, o laudo é conclusivo ao afirmar:

"Considerando que o TH (*Texas Hold'em*), assim como outras modalidades de pôquer, sempre são jogados em longa séries de partidas, podemos afirmar, com segurança, que a habilidade é **decisiva** para definir o vencedor."

Dessa forma, podemos mergulhar, sem objeções, nesse mar de incertezas e sonhos, probabilidades e esperanças matemáticas, que é o jogo do *poker*.

2.2.1 Regras Básicas

Inicialmente, citaremos as informações obtidas no texto [4], por considerarmos válidas e simplórias, além de resumir bem as regras básicas para qualquer modalidade do *poker*:

"Existem muitas variedades de poker, mas todas seguem o mesmo formato básico:

- Os jogadores contribuem para a mesa (o prêmio) que contém fichas de brinquedo ou fichas que representam dinheiro de verdade.
- São dadas cartas (mãos) a cada jogador, sendo que algumas dessas cartas ou todas elas são ocultadas dos outros jogadores.
- São feitas rodadas de apostas, com base na qualidade das mãos.

[2]Loja de aplicativos para os dispositivos com sistema operacional *Android*.

[3]Loja de aplicativos para os dipositivos da *Apple*, cujo sistema operacional é o *IOS*.

[4]Dado obtido em 02/04/2014.

[5]Esse tipo de jogo é proibido no Brasil pelo Decreto Lei 3388/41

- Quando as rodadas de apostas acabam, o jogador com a melhor mão, formada por cinco cartas ? ou o único a continuar no jogo depois dos adversários terem desistido ? vence!"

Além disso, é importante também considerar as palavras extraídas de [9] e [8]:

"O pôquer não é um jogo de colaboração, ou seja, o jogador se mantém vivo por si mesmo, o que aumenta seu caráter competitivo. No jogo, o objetivo é agrupar, em mãos, cinco cartas que tenham um valor superior aos valores das mãos formadas pelos adversários. No entanto, como se trata de um jogo onde o blefe é permitido, a mão construída não precisa ter, efetivamente, um valor maior. Se você conseguir fazer com que seus rivais acreditem na força de suas cartas, eles vão se retirar do jogo e você vencerá a rodada." [9]

É importante compreender bem o conceito "mão de poker":

"Uma mão de Poker é um conjunto de 5 cartas que representa a pontuação de um jogador num jogo de Poker. As cartas podem pertencer a apenas um jogador ou podem ser partilhadas por todos os jogadores em jogo."[8]

O número de jogadores varia de 2 a 9, em qualquer categoria. *"Sendo que as partidas mais empolgantes são construídas entre quatro e seis jogadores"*[9].

Neste momento, seja qual for a modalidade a ser jogada, é fundamental conhecer o baralho e compreender bem o ranking de mãos. Quanto ao baralho, utilizam-se as 52 cartas (Figura 2.2) 13 para cada naipe (Figura 2.1), com valores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K e A. Um detalhe importantíssimo é que o Ás também pode assumir o valor mínimo, se for conveniente. Vale ressaltar também que, para o *poker*, os naipes são todos de igual valor.

Figura 2.1 Naipes das cartas de um baralho

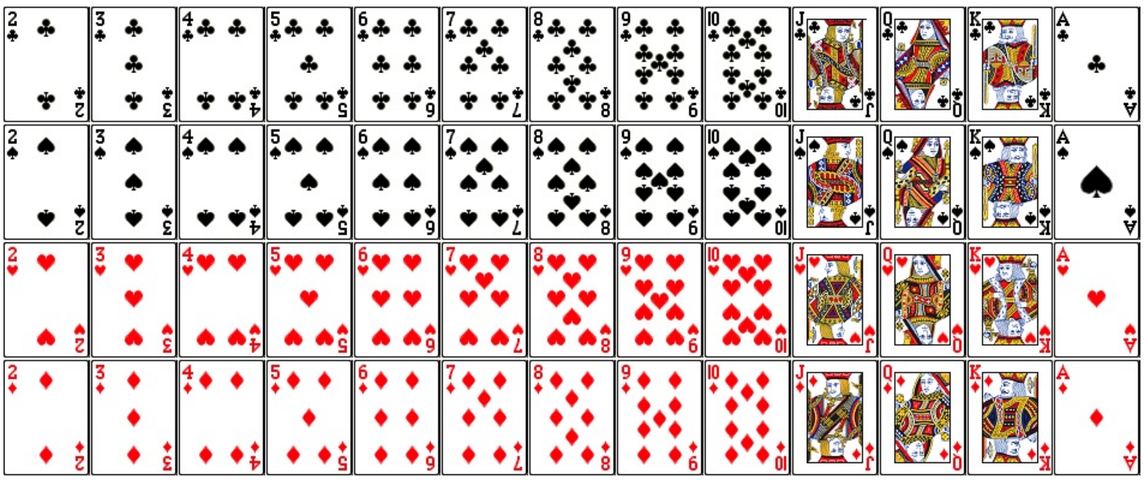

Figura 2.2 As 52 cartas que compõem o baralho

De posse dessas informações, vamos agora conhecer os tipos de jogos a formar numa mão de poker: o *ranking* de mãos, passo fundamental para o entendimento do jogo.

2.2.2 Ranking de mãos

Como mencionado anteriormente, o objetivo do *poker* é construir a melhor formação possível a partir das disposições de cinco cartas. Sob essa perspectiva, "apresentamos as combinações, em ordem decrescentes de valor, para quando são usadas as 52 cartas"[9]:

1. *Royal Straight Flush:* combinação das cinco maiores cartas do mesmo naipe em sequência, ou seja, do dez ao ás;

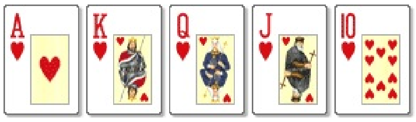

Figura 2.3 Royal Straight Flush ou Sequência Real

2. *Straight Flush:* ordenação de quaisquer cinco cartas do mesmo naipe, em sequência. Entre dois ou mais *straight flusches*, vence o que for encabeçado pela carta mais alta;

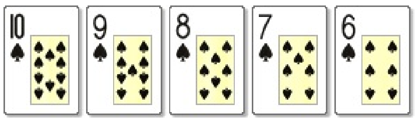

Figura 2.4 Straight Flush

3. *Four of a kind ou Quadra:* conjunto de quatro cartas com o mesmo valor, como quatro ases, quatro reis, etc. Se houver duas ou mais quadras, a vencedora será a constituída pelas cartas mais altas;

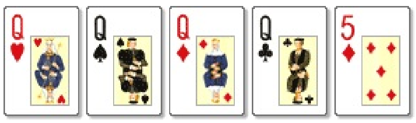

Figura 2.5 Four of a kind ou Quadra

4. *Full House ou Full Hand:* combinação formada por três cartas iguais entre si acrescentadas a outras duas, também iguais entre si, ou seja, uma trinca e um par;

5. *Flush:* disposição de cinco cartas do mesmo naipe que não constituem sequência. Em caso de dois ou mais *flusches*, o vencedor será o encabeçado pela carta mais alta. Se as cartas altas forem iguais, serão comparadas as subsequentes (a segunda, a terceira, etc.). Haverá empate se as cinco cartas de dois jogadores tiverem os mesmos valores, obrigando, assim, a divisão das apostas;

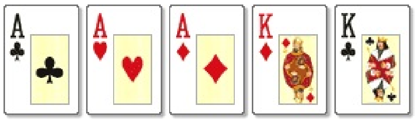

Figura 2.6 Full House

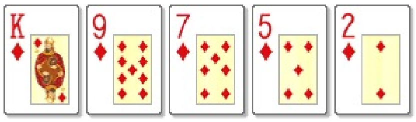

Figura 2.7 Flush

6. *Straight ou seguida ou sequência:* combinação de cinco cartas em sequencia hierárquica, com naipes diferentes. Caso haja empate, a sequência será a que tem início com a carta mais alta. Se forem absolutamente idênticas, o valor do pote será dividido;

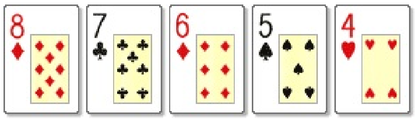

Figura 2.8 Straight ou Sequência

7. *Three of a Kind ou terno ou trinca:* junção de três cartas do mesmo valor. A trinca mais alta é a vencedora, em caso de empate;

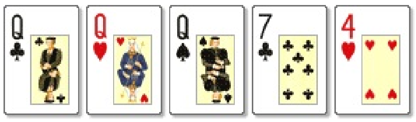

Figura 2.9 Three of a kind ou Trinca

8. *Two pairs ou Dois pares:* junção de dois pares de cartas com valores diferentes. Caso ocorra empate, o par mais alto vence. Se nesse quesito houver novo empate, a quinta carta mais alta *(kicker)* define a vitória. Com empate absoluto, as apostas são divididas;

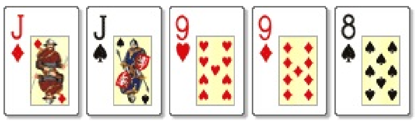

Figura 2.10 Two Pairs ou Dois Pares

9. *Pair ou Um Par:* trata-se da simples ocorrência de duas cartas de mesmo valor. Caso ocorra empate, o par de cartas mais altas é vitorioso. Se ainda existir empate, o ganhador

é quem tiver a terceira, quarta ou quinta carta mais alta. Com empate absoluto, o valor total das apostas é dividido;

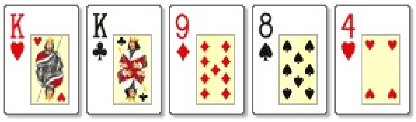

Figura 2.11 Pair ou Par

10. *High card ou Carta maior:* quando não há combinações, a carta mais alta vence. Caso exista um empate, prevalece a segunda carta maior, e assim por diante. Em caso de empate absoluto, o pote será dividido.

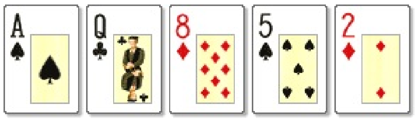

Figura 2.12 High card ou Carta mais alta

2.2.3 Variantes do poker

O Poker é um nome genérico para centenas de jogos, mas todos eles têm características que os distinguem[8]. Podem-se dividir as variantes do Poker em três grupos[12]:

- Draw Poker: cada jogador recebe um grupo de cartas que apenas ele pode ver e que pode melhorar seu jogo trocando cartas[13]. Como exemplos de jogos de Poker que fazem parte deste grupo temos o Five-Card Draw, Badugi e o Kansas City Lowball;

- Stud Poker: são os jogos em que cada jogador recebe uma combinação de cartas reveladas (cartas com a face virada para cima) e cartas privadas (cartas com a face virada para baixo) em várias rodadas de apostas. O Six-Card Stud, o Razz e o Eight-or-better high-low stud são algumas das variantes do Stud Poker[14];

- Community card poker: nesta modalidade, cada jogador recebe uma quantidade variável de cartas fechadas que formam uma mão a ser completada através da combinação com as cartas comunitárias[15]. A variante do Poker mais popular na atualidade, o Texas Hold?em, pertence a este grupo de variantes de Poker, bem como Omaha Hold?em e Manila.

As variantes de Poker podem ser distinguidas, ainda, umas das outras, tendo em conta as seguintes variáveis[22]:

- Número de rodadas de aposta

  Cada variante tem um número específico de rodadas de apostas[23]. O Texas Hold?em, por exemplo, tem quatro: Pre-Flop, Flop, Turn e River, nas quais vão sendo reveladas cartas comunitárias. No Flop são reveladas três cartas, no Turn, uma carta e no River uma carta [24]. A variante Five-card draw tem três rodadas de apostas. Uma rodada depois de serem entregues as cinco cartas aos jogadores. Outra rodada depois dos jogadores trocarem as suas 12 cartas por cartas do baralho e, por último, uma rodada semelhante à anterior. Após esta rodada os jogadores em jogo mostram as suas cartas para determinar o vencedor[25]. Em qualquer uma das variantes podem ocorrer menos rodadas se apenas se mantiver um jogador em jogo, e os restantes tiverem desistido.

- Número de cartas públicas e cartas fechadas

  O número de cartas fechadas e públicas não é fixo. No Texas Hold?em, são mostradas cinco cartas comunitárias e cada jogador recebe duas cartas fechadas. Na variante Cincinnati são mostradas quatro cartas públicas, uma antes de cada rodada de apostas e cada jogador tem quatro cartas fechadas. Vale ressaltar que o conceito de cartas públicas apenas existe nas variantes que pertencem ao grupo Community Card Poker.

- Número de jogadores

  O número máximo de jogadores varia conforme a variante. Em geral, os jogos são disputados por dois a nove jogadores. A variante Five-card draw, por exemplo, pode ser jogado no mínimo por dois jogadores e no máximo por oito jogadores.

- Determinação do vencedor

  Há jogos *high* como seven-card stud e Texas Hold'em, em que a mão mais alta ganha, e jogos *low* como draw lowball e razz, em que vence a mão mais baixa. Há também jogos high-low split, em que a melhor mão mais alta e a melhor mão mais baixa dividem o pote.

- Número de cartas expostas

  Entre jogos high, low e high-low split há aqueles, como five-card draw, em que as mãos estão fechadas, e aqueles, como seven-card stud, em que algumas das cartas dos jogadores são expostas para todos os jogadores verem[16].

- Com que cartas do baralho se joga

  Há também variantes que se jogam com mais do que um baralho, como Royal Deck, ou então com apenas algumas cartas do baralho, como Manilla: variante a qual é jogada apenas com as cartas com valor igual ou superior a sete. Sendo assim, joga-se apenas com 32 cartas.

- Estruturas de apostas

  Outra das principais diferenças entre as variantes do Poker é a estrutura de apostas. A estrutura pode ser *limit*, *pot-limit* ou *no-limit*. Para os jogos *limit*, existe um limite mínimo e máximo para cada aposta feita por um jogador. Num jogo *pot-limit*, de acordo com o site *pokertips.org*, "a aposta mínima é estruturada como no pôquer com limite e a aposta máxima é a quantia de dinheiro no pote"[25]. Nos jogos *no-limit*, não existem limites para as apostas.

- Estrutura das blinds

  A estrutura das blinds é mais um dos fatores que diferencia as variantes umas das outras. Algumas variantes não usam blinds, como é o caso do Leduc Hold?em, e outras usam, como no Texas Hold?em. As variantes que usam blinds, costumam usar duas blinds, a small blind e a big blind. No entanto, existem variantes que utilizam também a dealer blind.

- Uso de cartas wild

  Jokers, cartas selvagens e regras especiais podem ser introduzidos em qualquer um destes jogos para criar aberrações como o Baseball, Follow the Queen, Anaconda, e dezenas de outras variantes[8]. Nestes tipos de jogos, os jokers e as cartas selvagens podem assumir o valor de qualquer carta do baralho menos as cartas presentes na mão do jogador.

- Troca de cartas

  Algumas regras especiais relacionadas com as cartas são usadas em algumas variantes. A variante Anaconda permite que os jogadores, após receberem as cartas, passem para o jogador à sua esquerda três cartas que não queiram. A variante *Five Card Draw* permite que os jogadores troquem cartas que não lhes sejam favoráveis por cartas do baralho, de forma a melhorar a sua mão. Outras variantes obrigam os jogadores a descartarem um número variável de cartas, numa determinada altura do jogo[22].

2.2.4 O Texas Hold'em

Por ser a modalidade mais popular, vamos nos retratar, daqui por diante, apenas à modalidade *Texas Hold'em*. Descreveremos abaixo suas regras de forma minunciosa, baseados nas referências [17] e [18].

No Texas Hold'em utiliza-se um baralho padrão de 52 cartas, e dele podem participar de 2 a 10 jogadores. Entretanto, antes que quaisquer cartas sejam distribuídas, os jogadores precisam determinar quem será o *Dealer* da próxima mão. Isso não necessariamente significa que o jogador deverá distribuir as cartas (a distribuição é feita automaticamente online, e por um dealer de casino no jogo ao vivo). O dealer é identificado por uma marca conhecida como botão do dealer ou, simplesmente, 'botão'. Sua posição determina quais são os dois jogadores que deverão colocar os 'blinds' - apostas obrigatórias "às cegas" de modo a garantir que sempre haja dinheiro a ser ganho no pote. Um jogador coloca o 'small blind', colocando um valor igual à metade da aposta realizada pelo jogador à sua esquerda, o 'big blind'. O dealer muda de posição a cada mão, o que significa que os jogadores revezam as posições de dealer, small blind e big blind. Depois que os blinds são colocados, cada um dos jogadores recebem duas cartas viradas para baixo. Essas são conhecidas como cartas fechadas, e só podem ser vistas e utilizadas pelo jogador que as recebeu. Ao todo, cinco cartas comunitárias são então distribuídas, e ficam disponíveis para o uso de todos os jogadores. Vence quem fizer a melhor mão de cinco cartas dentre as sete disponíveis.

2.2.4.1 Rodadas de apostas

São quatros as rodadas de apostas numa partida de Texas Hold'em: Pré-Flop, Flop, Turn e River.

O Pré-Flop

Toda a ação que ocorre antes das três primeiras cartas comunitárias (o 'flop') serem distribuídas é descrita como 'pré-flop'. Depois que cada jogador pôde observar suas cartas fechadas, cada um deles age pela primeira vez.

O jogador sentado à esquerda do big blind age primeiro, seguido pelos demais jogadores à sua esquerda. Cada jogador, chegada a sua vez, dispões das seguintes opções:

- Desistir (Fold): Isto significa que você não joga mais na mão, e deixa suas cartas de lado. Você não pleiteia mais o dinheiro do pote, mesmo que tenha pago um dos blinds.
- Pagar (Call): Isto significa que você deseja jogar a mão igualando o tamanho da aposta atual. Observe que, após o flop, você também deverá ter a opção de passar, caso não tenha havido apostas antes de você.
- Aumentar (Rise): Quer dizer que você deseja aumentar o tamanho de sua aposta atual. Caso ninguém antes de você realize um aumento, você mesmo pode realizar uma aposta.

O Flop

Nesse momento, são postas na mesa três cartas comunitárias. Inicia-se uma nova rodada de apostas, onde cada jogador, seguindo a mesma ordem de jogadas da primeira rodada, pode desistir, passar a vez (Check; aposta nula), pagar ou aumentar a aposta. Após todas as apostas terem sido feitas, inicia-se a próxima rodada.

O Turn

Aqui, é revelada mais uma carta comunitária e mais uma rodada de apostas é iniciada. Após todas as apostas terem sido realizadas, é dada a largada para a última rodada.

O River

A quarta e última rodada de apostas. Nesse momento, é revelada a quinta carta comunitária. A rodada, como em todas as outras é iniciada pelo jogador à esquerda do Dealer.

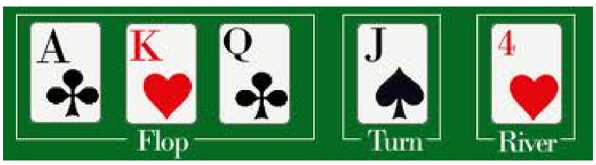

Figura 2.13 Flop, Turn e River

Abertura de cartas (Showdown)

Após o término da última rodada de apostas, cada jogador deve formar a melhor mão de poker de cinco cartas possível, a partir de uma combinação de suas duas cartas fechadas (hole cards) e as cinco cartas comunitárias. Nesse momento, todos os jogadores restantes devem mostrar suas mãos, para que a melhor mão possa ser determinada. O jogador com a melhor mão no showdown ganha o pote. Caso mais de um jogador possua a mesma mão vencedora, o pote é então dividido. Quando a mão atual está completa e antes que a mão seguinte possa começar, o botão do dealer move para a esquerda, e segue para o próximo jogador.

Agora que estamos familiarizados com o Texas Hold'em, vamos descrever alguns conceitos da Combinatória, a Probabilidade e a Esperança Matemática - fundamentais à nossa proposta - para que possamos analisar matematicamente as principais situações numa mesa de poker.

CAPÍTULO 3

Referencial Teórico

3.1 Combinatória

Usaremos as ideias mencionadas em [19]:

"As ideias de contagem se relacionam com probabilidade (...) Sem pretender ser exaustivo, apenas mencionamos aqui as definições e resultados básicos de análise combinatória:

Definição 3.1.0.1 (Princípio Fundamental da Contagem)**.** *Se uma tarefa tem k etapas e cada etapa i tem n_i maneiras diferentes de ser realizada, então o número total de alternativas para realizar a tarefa é dado pelo produto $n_1 n_2 ... n_k$.*

Definição 3.1.0.2 (Arranjos e Combinações)**.** *Considere que desejamos escolher k dentre n objetos. Se a ordem de escolha é importante, temos um* **arranjo** *de n objetos tomados k a k. Caso a ordem não importe, o agrupamento formado é a* **combinação** *de n objetos tomados k a k. O número de diferentes agrupamentos que podem ser formados são apresentados a seguir:*

- Arranjo: $A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$;
- Combinação: $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

3.2 Probabilidade

> *"A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de caos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é portanto uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e o denominador é o conjunto de todos os casos possiveis."*[21]

Definição 3.2.0.3 (Experimento Determinístico)**.** *É o experimento que quando repetido em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente idênticos. No caso dos jogos, são aqueles que seguem padrões e encontrando o padrão se ganha sempre.*

Definição 3.2.0.4 (Experimento Aleatório)**.** *É todo experimento que, quando repetido sob as mesmas condições várias vezes, produz resultados imprevisíveis. É o caso da maioria dos jogos: antes de se iniciarem as jogadas, não é possível saber com exatidão qual será o resultado obtido.*

Definição 3.2.0.5 (Espaço Amostral)**.** *É o conjunto de todos os resultados possiveis de um experimento aleatório e é representado por* Ω.

Definição 3.2.0.6 (σ-álgebra)**.** *Uma classe de subconjuntos de* Ω*, representada por* $\mathscr{F}$*, é denominada uma* σ*-lgebra se satisfaz as seguintes propriedades:*

(A1) $\Omega \in \mathscr{F}$

(A2) Se $A \in \mathscr{F}$, então $\overline{A} \in \mathscr{F}$;

(A3) Se $A_i \in \mathscr{F}$, $i \geq 1$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

Definição 3.2.0.7 (Definição Axiomática de Probabilidade)**.** *Seja* Ω *um espaço amostral e* $\mathscr{F}$ *uma* σ*-álgebra associado a um experimento aleatório. Probabilidade é uma função* $P : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$*, que associa a cada evento A de* Ω *um número real* $P(A) \in [0,1]$*, que satisfaz os seguintes axiomas:*

I. Axioma 1: $P(A) \geq 0$

II. Axioma 2: $P(\Omega) = 1$

III. Axioma 3: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3.2.1 Propriedades da Probabilidade

Vamos, agora, estabelecer propriedades da probabilidade, que resultam diretamente dos Axiomas I a III.

1. $P(\emptyset) = 0$

   Demonstração. Como $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, resulta que $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset)$. Mas Ω e $\emptyset$ são mutuamente excludentes; portanto, podemos aplicar o Axioma III para obter

   $$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = P(\Omega) - P(\Omega) = 0$$

   .

2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

   Demonstração. Sabemos que

   $$\Omega = (A \cup \overline{A})$$

   Mas, pelo Axioma II, $P(\Omega) = 1$. Assim,

   $$1 = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

   .

3. $P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B} = P(A) - P(A \cap B)$

   Demonstração. Sabe-se que

   $$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

   .

   Assim,
   $$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$

   Por outro lado, como $B \setminus A = B \cap \overline{A}$, segue que:

   $$P(B \setminus A) = P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B).$$

4. Para dois eventos A e B quaisquer,

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

   Demonstração. Observe que este resultado generaliza o Axioma III para dois eventos quaisquer, ou seja, não é exigido que A e B sejam mutuamente exclusivos.

   Podemos escrever
   $$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$
   e, como esses últimos são mutuamente excludentes, segue que

   $$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B).$$

   Assim, pela propriedade 3:

   $$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

5. Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$.

   Demonstração. Se $A \subset B$, então $A \cap B = A$. Segue, pela Propriedade 3, que:

   $$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)$$

   Porém, pelo Axioma I, a probabilidade de qualquer evento é não-negativa. Logo,

   $$P(B \setminus A) \geq 0 \Rightarrow P(B) - P(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

- $P(A) \leq 1$ para qualquer evento $A \subset \Omega$.

  Demonstração. Usando a propriedade 5 e o Axioma II, temos que

  $$A \subset \Omega \Rightarrow P(A) P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A) \leq 1.$$

3.2.2 Espaços amostrais finitos e equiprováveis

Vamos considerar, agora, uma situação especial, em que o espaço amostral Ω é finito e todos os seus eventos elementares são igualmente prováveis. Esse contexto leva à definição clássica de probabilidade, tendo sido explicitada por Girolamo Cardano (1501-1576).

Sejam $E_1, E_2, ..., E_N$ os eventos elementares de Ω .Então,

$$\Omega = E_1 \cup E_2 \cup ... E_N$$

e esses eventos elementares são mutuamente excludentes dois a dois. Pode-se provar, por indução, que

$$P(\Omega) = 1 = P(E_1 \cup E_2 \cup ... E_N) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_N)$$

Como estamos supondo que todos eles são igualmente prováveis, segue que

$$P(E_i) = \frac{1}{N} = \frac{1}{n(\Omega)}, \forall i$$

Como qualquer evento $A \subset \Omega$ pode ser escrito como união de eventos elementares, resulta que

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Definição 3.2.2.1 (Definição Clássica de Probabilidade)**.** *Segundo Laplace, "a teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é portanto uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis."Essa definição é conhecida como definição clássica de probabilidade.*

Seja Ω um espaço amostral finito cujos eventos elementares são todos igualmente prováveis, então, para qualquer evento $A \subset \Omega$,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{numero\ de\ casos\ favoraveis}{numero\ de\ casos\ possiveis}.$$

3.2.3 Probabilidade Condicional

"A probabilidade condicional é uma nova medida de probabilidade, de forma a representar melhor as chances de eventos aleatórios a partir da informação de que um dado evento aconteceu. É definida da seguinte maneira:"[22]

Definição 3.2.3.1 (Probabilidade Condicional)**.** *Define-se a probabilidade condicional de A dado que B ocorreu, ou simplesmente probabilidade de A dado B, por*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Quando $P(B) = 0$, *definimos*

$$P(A|B) = P(A).$$

Regra do produto. A regra do produto permite expressar a probabilidade da ocorrência simultânea de diversos eventos a partir do valor de cada probabilidade condicional dados os eventos anteriores.

Teorema 3.2.3.1 (Regra do Produto.)**.** *Dados* $A_1, A_2, ..., A_n$, *eventos (subconjuntos) de* Ω, *vale*

$$P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}).$$

Demonstração. Vamos provar por indução sobre n. Para $n = 1$, o resultado é trivial: $P(A_1) = (A_1)$. Para $n = 2$, temos

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1} \Rightarrow P(A_2|A_1) = P(A_1)P(A_2|A_1).$$

Para $n = 3$, temos

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)}$$

e portanto,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2).$$

Supondo verdadeira a igualdade para $n = m$, temos:

$$P(A_{m+1}|A_1 \cap ... \cap A_m) = \frac{P(A_1 \cap ... \cap A_m \cap A_{m+1})}{P(A_1 \cap ... \cap Am)}$$

e portanto, usando a hipótese de indução,

$$P(A_1 \cap ... \cap A_{m+1}) = P(A_1 \cap ... \cap Am)P(A_{m+1}|A_1 \cap ... \cap A_m)$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_{m+1}|A_1 \cap ... \cap A_m).$$

Assim, pelo Princípio da Indução Finita,

$$P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}), \forall n$$

natural, como queríamos.

3.3 Esperança Matemática

“O conceito de Esperança Matemática (ou valor esperado ou, simplesmente, média) parece ter sido historicamente desenvolvido para avaliar ganhos em jogos com apostas a dinheiro. O retorno financeito, obtido em uma jogada de dados ou rodada de um certo jogo de cartas, seria imprevisível. A questão de interesse era avaliar esse retorno num horizonte de várias jogadas. Seria uma espécie de balanço final de muitas jogadas, após contabilizar perdas e ganhos. Com o auxílio do formalismo matemático, essas ideias foram estabelecidas em definições rigorosas.” [19]

Antes de discutirmos acerca da definição de Esperança Matemática, se faz necessário compreender outro conceito: o de variáveis aleatórias.

Definição 3.3.0.2 (Variável Aleatória). *Seja (Ω, $\mathscr{F}$, P) um espaço de probabilidade. Denominamos de variável aleatória, qualquer função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que*

$$X^{-1}(I) = w \in \Omega : X(w) \in I \in \mathscr{F},$$

para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Em palavras, X é tal que sua imagem inversa de intervalos $I \subset \mathbb{R}$ pertencem à σ-álgebra $\mathscr{F}$.

Definição 3.3.0.3 (Esperança Matemática). *A definição do valor médio, ou esperança matemática da variável aleatória X que assume valores $x_1, x_2, ..., x_n$ é dada por*

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i),$$

onde $p(x_i)$ é a probabilidade da variável aleatória assumir o valor x_i.

Vejamos alguns exemplos:

1. Um empresário pretende estabelecer uma firma para montagem de um componente mecânico. Cada peça é composta de duas partes, A e B, cada uma com uma chance específica de ser defeituosa. Só é possível verificar a qualidade das peças depois que elas são montadas. Se ambas são defeituosas, a peça é descartada e dá um prejuízo de R$5. Se a peça B é defeituosa, ainda é possível reparar a peça e obter um lucro de R$5. De maneira semelhante, se A é defeituosa, o reparo permite vender a peça inteira com um lucro de R$10. Se as duas peças são boas, o lucro é de R$15. À cada uma das configurações está associada uma probabilidade:

$$P(A \cap B) = 0,56, P(\overline{A} \cap B) = 0,23$$

$$P(A \cap \overline{B}) = 0,02, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,19$$

Qual o lucro médio por peça produzida esperado?*(Adaptado de: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5a. edição, pág 129.)*

Solução. Sejam $x_1 = 15, x_2 = 10, x_3 = 5$ e $x_4 = -5$ os lucros obtidos em cada situação. Assim, a esperança matemática para esse caso será:

$$E(x) = 15p(l = 15) + 10p(l = 10) + 5p(l = 5) - 5p(l = -5) =$$

$$\Rightarrow E(x) = 15 \times 0,56 + 10 \times 0,23 + 5 \times 0,02 - 5 \times 0,19 = 9,85.$$

Para o nosso estudo, numa rodada de apostas, dispomos de apenas dois eventos: ganhar ou não o valor acumulado no pote. É claro que esses eventos são complementares. Assim, adaptando a definição para o nosso contexto, teríamos que a Esperança Matemática numa mão de *poker* é dada pela expressão:

$$E(x) = P(x) \times t - [1 - P(x)] \times a,$$

onde $P(x)$ é a probabilidade de vencer a mão; t é o total acumulado no pote; $1 - P(x)$ a probabilidade de perder a rodada; e a é o valor da sua aposta. Uma conclusão direta é que se esse valor esperado é positivo, significa que vale a pena apostar na mão. Do contrário, desistir do jogo é a melhor decisão a ser tomada. Essas considerações se evidenciam quando se pensa a longo prazo. Ou seja, um jogador que usa o conceito de Esperança Matemática antes de cada decisão a ser tomada(apostar ou não), a longo prazo, obterá lucro com o jogo.

Vejamos, para exemplificar, o caso da Mega-Sena:

2. Para o concurso a ser realizado em 31/05/2014, a estimativa do prêmio é de 7 milhões[1]. Cada aposta custa $R\$2,50$ e a probabilidade de ganhar a mega-sena com uma simples aposta (ter as suas seis dezenas sorteadas dentre as sessenta) é de:

$$P(G) = \frac{1}{C_{60,6}} = \frac{1}{50.063.860}$$

e a probabilidade de não ganhar a mega-sena é, consequentemente:

$$P(\overline{G}) = \frac{50.063.859}{50.063.860}.$$

Assim, o valor esperado é de:

$$E(v) = 7.000.000 \times \frac{1}{50.063.860} - 2,5 \times \frac{50.063.859}{50.063.860}$$

$$\Rightarrow E(v) \simeq 0,1398 - 2,5000 \Rightarrow E(v) = -2,3602,$$

o que mostra que, nessas condições, a cada aposta de $R\$2,50$ você perde $R\$2,36$, aproximadamente. Por essa razão que a mega-sena é considerado um jogo de azar.

Uma situação inusitada ocorre na mega-sena da virada:

[1]Dado obtido em 29/05/2014, no site: www.caixa.gov.br

3. Em 31/12/2013, a mega-sena da virada teve um prêmio de $R\$224.700.000$, que gerou para uma aposta simples (que custava $R\$2,00$) uma esperança matemática de

$$E(v) = 224.700.000 \times \frac{1}{50.063.860} - 2 \times \frac{53.063.859}{53.063.860}$$

$$\Rightarrow E(v) \simeq 4,4883 - 2 \Rightarrow E(v) \simeq 2,49$$

o que significaria que a mega-sena da virada não seria um jogo de azar. Porém não estamos pensando a longo prazo - conceito fundamental para compreensão da Esperança Matemática.

Mais adiante, no capítulo 7, iremos expor como o conceito de esperança matemática pode ajudar a decidir se vale a pena ou não apostar numa rodada de um jogo de *poker*, na modalidade *Texas Hold'em*.

CAPÍTULO 4

Jogos possíveis e probabilidades

4.1 Usando todas as cartas do baralho

Vamos agora calcular as probabilidades de saída numa mão de *poker*.Para isso, inicialmente, vamos determinar o número total de jogos possíveis, considerando o baralho completo.

4.1.1 Total de Jogos Possíveis

Como cada jogo é formado por 5 das 52 cartas que há no baralho, temos que o total de jogos possíveis é

$$C_{52,5} = \frac{52!}{5!47!} = 2598960.$$

4.1.2 Royal Straight Flush ou Sequência Real

Existem apenas 4 sequências reais, sendo uma para cada naipe. Dessa forma, a probabilidade de se obter uma sequência real numa mão de poker é de:

$$P(Sequncia\ Real) = \frac{4}{2598960} \simeq 0,00000154 = 0,000154\%.$$

4.1.3 Straight Flush

São as sequências de mesmo naipe em que o valor mínimo é A(1), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Assim, existem 9 sequências desse tipo para cada naipe e 36 no total. Dessa forma, a probabilidade de se obter um Straight Flush é de

$$P(Straight\ Flush) = \frac{36}{2598960} \simeq 0,00001386 = 0,001386\%.$$

4.1.4 Four (ou Quadra)

Para formar um Four, temos 13 valores disponíveis (Ás ao Rei) e 48 cartas restantes para ser a quinta carta da mão. Existem, assim, $13 \times 48 = 624$ combinações de Four possíveis. A probabilidade de ocorrer este evento é:

$$P(Four) = \frac{624}{2598960} \simeq 0,00024 = 0,024\%.$$

4.1.5 Full House

O Full House (casa cheia, tradução direta) é formado por uma trinca (Three of a Kind) e um par (Pair). Assim sendo, existem 13 valores para a trinca e 12 valores para o par. Dentre as cartas de mesmo valor, há $C_{4,3} = 4$ maneiras de formar uma trinca e $C_{4,2} = 6$ maneiras de montar um par, com 4 naipes diferentes. Existem, assim, $13 \times 12 \times 4 \times 6 = 3744$ Full House's possíveis e a probabilidade que isso ocorra é:

$$P(Full\ House) = \frac{3744}{2598960} \simeq 0,00144 = 0,144\%.$$

4.1.6 Flush

O Flush é formado por cinco cartas do mesmo naipe. Para isso, temos $C_{13,5} = \frac{13!}{5!8!} = 1287$ combinações possíveis por naipe. No entanto, 10 dessas combinações também são sequências (Straight) e, portanto, devem ficar de fora da nossa contagem: $1287 - 10 = 1277$. Como são 4 naipes, temos $4 \times 1277 = 5108$ combinações possíveis para formar um Flush. Assim, a probabilidade que isso ocorra é:

$$P(Flush) = \frac{5108}{2598960} \simeq 0,00197 = 0,197\%.$$

4.1.7 Straight (Sequência)

Para formar uma sequência com naipes distintos, 10 cartas são adequadas para ser a mais baixa da sequência (Ás ao 10), por naipe: $10 \times 4 = 40$ maneiras. A partir desta, há 4 possibilidades para cada uma das 4 cartas restantes: $40 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 10240$. Excluindo as sequências de mesmo naipe, real ou não, obtemos $10240 - 40 = 10200$ sequências *straight* possíveis. Dessa forma, a probabilidade de obter uma sequência é:

$$P(Straight) = \frac{10200}{2598960} \simeq 0,00392 = 0,392\%.$$

4.1.8 Trinca (Three of a Kind)

Para uma trinca, existem 13 valores em cada naipe e, para as duas cartas restantes, $C_{12,2} = \frac{12!}{2!10!} = 66$ por naipe, ou seja, $66 \times 4 = 264$ combinações. Como são $C_{4,3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$ formas de montar uma trinca com cartas do mesmo valor, obtemos, assim, $13 \times 4 \times 264 \times 4 = 54192$ trincas possíveis. Portanto, a probabilidade de obter uma trinca é:

$$P(Trinca) = \frac{54912}{2598960} \simeq 0,02113 = 2,113\%.$$

4.1.9 Dois Pares (Two Pairs)

Para formar dois pares, há $C_{13,2} = \frac{13!}{2!11!} = 78$ conjuntos de dois valores dos pares e $C_{4,2} = 6$ formas de montar cada par, além de $11 \times 4 = 44$ opções para compor a quinta carta. Assim, existem $78 \times 6 \times 6 \times 44 = 123552$ possibilidades de formar dois pares. Dessa forma, a probabilidade de obter essa mão é:

$$P(Dois\ Pares) = \frac{123552}{2598960} \simeq 0,04754 = 4,754\%.$$

4.1.10 Um Pair (One Pair)

Para formar um par, existem 13 valores em cada naipe com $C_{4,2} = 6$ maneiras distintas de formar esse par. Existem ainda, para as três cartas restantes, $C_{12,3} = \frac{12!}{3!9!} = 220$ combinações por naipe, totalizando $220 \times 4 = 880$ possibilidades. Existem, ainda, $C_4, 3 = 4$ formas de montar essas três cartas restantes, referente à escolha de 3 dos 4 naipes disponíveis. Assim, há $13 \times 4 \times 6 \times 880 \times 4 = 1098240$ pares possíveis. Dessa forma, a probabilidade de obter um par é de:

$$P(Um\ Par) = \frac{1098240}{2598960} \simeq 0,42257 = 42,257\%.$$

4.1.11 Carta Mais Alta (High Card)

Em uma mão que não contenha alguma das combinações valiosas, especificadas nos itens anteriores, considera-se apenas o valor da carta mais alta. Assim, temos $C_{13,5} = \frac{13!}{5!8!} = 1287$ possibilidades de 5 cartas em 13. No entanto, 10 possibilidades formam uma sequência e, desconsiderando-as, restam 1277 possibilidades. Devemos considerar também que cada uma das 5 cartas pode ser de um dos quatro naipes, resultando assim, em $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$ possibilidades. Entretanto, elas todas não podem ser do mesmo naipe, isto é, devemos desconsiderar essas possibilidades, que são 4 (uma por naipe), obtendo assim, $1024 - 4 = 1020$ possibilidades. Assim, existem $1277 \times 1020 = 1302540$ combinações sem valor, e a probabilidade que se ocorra é:

$$P(Carta\ mais\ alta) = \frac{1302540}{2598960} \simeq 0,50118 = 50,118\%.$$

Diante desses resultados, é importante ressaltar que são essas probabilidades que definem a hierarquia dos jogos obtidos numa mão de poker. São esses resultados que, por um lado, fazem da Sequência Real a mão mais poderosa num jogo de pôquer e, por outro, fazem do *High Card* a mão menos valiosa.

A tabela abaixo resume os resultados encontrados e nela verifica-se a relação direta da hierarquia dos jogos com as probabilidades obtidas nas últimas seções.

4.2 Usando o baralho reduzido

Algumas mesas de poker, devido ao pequeno número de jogadores, optam pela redução no número de cartas do baralho a ser usadas. Essa medida é coerente devido à redução na ocorrência dos jogos mais valiosos, subtraindo, assim, uma parcela da emoção agregada à competitividade de cada rodada. De acordo com [9]:

Tabela 4.1 Jogos possíveis e suas probabilidades (usando o baralho completo)

1	Sequência Real*(Royal Straight Flush)*	0,0001%
2	*Straight Flush*	0,0014%
3	Quadra *(Four)*	0,024%
4	*Full House*	0,144%
5	*Flush*	0,197%
6	Sequência *(Straight)*	0,392%
7	Trinca *(Three of a Kind)*	2,113%
8	Dois Pares *(Two Pairs)*	4,754%
9	Um Par *(Pair)*	42,257%
10	Carta mais Alta *(High Card)*	50,118%

"... para que a partida fique mais interessante e competitiva, é possível adaptar o número de cartas do baralho ao número de participantes, o que torna o jogo mais rápido e competitivo. Adotar o baralho incompleto, em caso de poucos jogadores, permite, sobretudo, aumentar a ocorrência de jogos altos." .

O autor ainda completa com sugestões de mudanças no número de cartas, adaptando-o ao número de jogadores:

- *" 7 a 9 pessoas: use o baralho inglês completo, ou seja, as 13 cartas de cada naipe (52 no total);*

- *6 pessoas: é bom não incluir as cartas 2 e 3 de cada naipe, limitando o baralho a 44 cartas;*

- *5 pessoas: elimine as cartas 2, 3 e 4 de cada naipe. O baralho ficará com 40 cartas. Também é aceitável não incluir as cartas de valor 5, o que deixa o baralho com 36 cartas;*

- *4 pessoas ou menos (estilo mais corrente no Brasil): retire as cartas de 2 a 6 de cada naipe. O baralho ficará reduzido a 32 cartas".*

Com o intuito de que o texto não fique repetitivo e, consequentemente, cansativo ao leitor, vamos detalhar as probabilidades para o último caso supracitado, quando se tem 4 pessoas ou menos jogando, em que o baralho fica reduzido para 32 cartas. Ao final, apresentaremos numa tabela todos as probabilidades obtidas, em todos os casos mencionados.

4.2.1 Total de Jogos Possíveis

Agora, cada jogo será formado por 5 das 32 cartas que há no baralho. Assim, temos que o total de jogos possíveis é

$$C_{32,5} = \frac{32!}{5!27!} = 201376.$$

4.2.2 Royal Straight Flush ou Sequência Real

Neste caso, não há nenhuma alteração no número de sequências reais: existem apenas 4, sendo uma para cada naipe. Dessa forma, a probabilidade de se obter uma sequência real numa mão de poker é de:

$$P(Sequncia\ Real) = \frac{4}{201376} \simeq 0,0000199 = 0,00199\%.$$

4.2.3 Straight Flush

Neste caso, as possibilidades para o valor mínimo de cada sequência reduzem para: Ás, 7, 8 ou 9. Assim, existem 4 sequências desse tipo para cada naipe e 16 no total. Nessas condições, a probabilidade de se obter um Straight Flush é de

$$P(Straight\ Flush) = \frac{16}{201376} \simeq 0,0000795 = 0,00795\%.$$

4.2.4 Four (ou Quadra)

Agora temos 8 valores disponíveis (Ás, 7, 8, 9, 10, J, Q e K) para a quadra e 28 cartas restantes para ser a quinta carta da mão, totalizando $8 \times 28 = 224$ combinações de Four possíveis. Assim, a probabilidade de ocorrer este evento será:

$$P(Four) = \frac{224}{201376} \simeq 0,0012713 = 0,12713\%.$$

4.2.5 Full House

Para formar uma trinca e um par, com o baralho reduzido, existem 8 valores para a trinca e 7 valores para o par. Dentre as cartas de mesmo valor, há 4 formas de montar uma trinca e 6 formas de montar um par, com os 4 naipes diferentes. Existem, assim, $8 \times 7 \times 4 \times 6 = 1344$ trincas e pares possíveis. Assim, a probabilidade de se obter um Full House é:

$$P(Full\ House) = \frac{1344}{201376} \simeq 0,0066741 = 0,66741\%.$$

4.2.6 Flush

Sabemos que o Flush é formado por cinco cartas do mesmo naipe. Para isso, com a redução do baralho, temos $C_{8,5} = \frac{8!}{5!3!} = 56$ combinações possíveis por naipe. Porém, 5 dessas combinações também são sequências (Straight) e, portanto, devem ficar de fora da nossa contagem: $56 - 5 = 51$. Como são 4 naipes, temos $4 \times 51 = 204$ combinações possíveis para formar um Flush. Assim, a probabilidade que isso ocorra é:

$$P(Flush) = \frac{204}{201376} \simeq 0,0010130 = 0,10130\%.$$

4.2.7 Straight (Sequência)

Para formar uma sequência *straight*, nas novas condições, 5 cartas são adequadas para ser a mais baixa da sequência (Ás, 7, 8, 9 e 10), por naipe: $5 \times 4 = 20$ maneiras. A partir desta, há 4 possibilidades para cada uma das 4 cartas restantes: $20 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 5120$. Excluindo as sequências de mesmo naipe, real ou não, obtemos $5120 - 20 = 5100$ sequências *straight* possíveis. Dessa forma, a probabilidade que este evento ocorra é:

$$P(Straight) = \frac{5100}{201376} \simeq 0,0253258 = 2,53258\%.$$

4.2.8 Trinca (Three of a Kind)

Temos, agora, 8 valores em cada naipe para a trinca propriamente dita e, para as duas cartas restantes, $C_{7,2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$ por naipe, ou seja, $21 \times 4 = 84$ combinações. Como são $C_{4,3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$ formas de montar uma trinca com cartas do mesmo valor, obtemos, assim, $8 \times 4 \times 84 \times 4 = 10752$ trincas possíveis. Nessas condições, a probabilidade de obter uma trinca é:

$$P(Trinca) = \frac{10752}{201376} \simeq 0,0524988 = 5,24988\%.$$

4.2.9 Dois Pares (Two Pairs)

Para formar dois pares, num baralho com 32 cartas há $C_{8,2} = \frac{8!}{2!6!} = 28$ conjuntos de dois valores dos pares e $C_{4,2} = 6$ formas de montar cada par, além de $6 \times 4 = 44$ opções para compor a quinta carta. Assim, existem $28 \times 6 \times 6 \times 24 = 24192$ possibilidades de formar dois pares. Dessa forma, a probabilidade de obter essa mão é:

$$P(Dois\ Pares) = \frac{24192}{201376} \simeq 0,1201334 = 12,01334\%.$$

4.2.10 Um Pair (One Pair)

Para formar um par, agora temos 8 valores em cada naipe com $C_{4,2} = 6$ maneiras distintas de formar esse par. Existem ainda, as três cartas restantes, $C_{7,3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$ combinações por naipe, totalizando $35 \times 4 = 140$ possibilidades e, ainda, 4 formas de montar essas três cartas restantes. Assim, há $8 \times 4 \times 6 \times 140 \times 4 = 107520$ pares possíveis. Dessa forma, a probabilidade de obter um par é de:

$$P(Um\ Par) = \frac{107520}{201376} \simeq 0,5339266 = 53,39266\%.$$

4.2.11 Carta Mais Alta (High Card)

Com o baralho reduzido, temos $C_{8,5} = \frac{8!}{5!3!} = 56$ possibilidades de 5 cartas em 8. Contudo, 5 possibilidades formam uma sequência e, desconsiderando-as, restam 51 possibilidades. Devemos considerar também que cada uma das 5 cartas pode ser de um dos quatro naipes, resultando assim, em $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$ possibilidades. Entretanto, elas todas não podem ser do mesmo naipe, isto é, devemos desconsiderar essas possibilidades, que são 4 (uma por naipe), obtendo assim, $1024-4=1020$ possibilidades. Assim, existem $56\times 1020=52020$ combinações sem valor, e a probabilidade que se ocorra é:

$$P(Carta\ mais\ alta)=\frac{52020}{201376}\simeq 0,2583227=25,83227\%.$$

Analisando os resultados obtidos, percebemos uma sutil mudança no comparativo das probabilidades e, consequentemente, na hierarquia dos jogos. Vejamos na tabela abaixo o resumo dos resultados obtidos, ordenados da menor para a maior probabilidade de saída - valores que, como visto anteriormente, definem a hierarquia das mãos de *poker*.

Tabela 4.2 Jogos possíveis e suas probabilidades com o baralho reduzido a 32 cartas

1	Sequência Real*(Royal Straight Flush)*	0,00199%
2	*Straight Flush*	0,00795%
3	*Flush*	0,1013%
4	Quadra *(Four)*	0,12713%
5	*Full House*	0,66741%
6	Sequência *(Straight)*	2,53258%
7	Trinca *(Three of a Kind)*	5,24988%
8	Dois Pares *(Two Pairs)*	12,01334%
9	Carta mais Alta *(High Card)*	25,83227%
10	Um Par *(Pair)*	53,39266%

Vejamos, agora, uma tabela completa com as probabilidades de saída nas diversas situações, seja com o baralho completo, seja com o baralho reduzido.

Tabela 4.3 Distribuição das probabilidades por tipos de jogos

Jogo/Número de cartas	52	48	44	40	36	32
Sequência Real*(Royal Straight Flush)*	0,0002%	0,0002%	0,0004%	0,0006%	0,0011%	0,002%
Straight Flush	0,0014%	0,0019%	0,0026%	0,0036%	0,0053%	0,0079%
Quadra *(Four)*	0,024%	0,0308%	0,0405%	0,0547%	0,0764%	0,1112%
Full House	0,1441%	0,185%	0,2431%	0,3283%	0,4584%	0,6674%
Flush	0,1965%	0,1829%	0,1676%	0,1489%	0,1273%	0,1013%
Sequência *(Straight)*	0,3925%	0,5361%	0,7514%	1,0851%	1,6234%	2,5326%
Trinca *(Three of a Kind)*	2,1128%	2,4669%	2,9171%	3,5015%	4,2781%	5,3393%
Dois Pares *(Two Pairs)*	4,7539%	5,5504%	6,5635%	7,8783%	9,6257%	12,0133%
Um Par *(Pair)*	42,2569%	44,4033%	46,6737%	49,0207%	51,3369%	53,3927%
Carta mais Alta *(High Card)*	50,1177%	46,6424%	42,6402%	37,9783%	32,4675%	25,8323%

4.3 Probabilidade de Saída do *Texas Hold'em*

Nessa modalidade, como explorado na seção 3.2, cada jogador recebe duas cartas. É o primeiro momento em que cada jogador deve considerar se a probabilidade está ao seu favor ou não. Afinal, é logo após todos jogadores receberem as cartas que se inicia a primeira rodada de apostas:

esse momento é denominado pré-*flop*. Alguns jogos, dependendo da agressividade dos jogadores, têm suas apostas encerradas nesse momento. Por isso, faz-se necessária a aplicação dos conhecimentos acerca não somente da probabilidade como também da Esperança Matemática. Aqui, discutiremos apenas as probabilidades, deixando as discussões acerca do valor esperado para o próximo capítulo.

Pretendemos, neste capítulo, responder a perguntas como: qual a probabilidade de vencer uma rodada, dado que o jogador possui um par de damas? Isso caracteriza, claramente, uma probabilidade condicional. Mas, inicialmente, vamos discorrer apenas com relação às possíveis duplas de cartas formadas na primeira rodada, isto é, às probabilidades de se obter alguma formação com as duas cartas recebidas no pré-*flop*. Essas formações classificadas em: par, *straight flush draws*(pré-sequência do mesmo naipe), *straight draws*(pré-sequência), *flush draws*(pré-flush) e *no draws*(nada a formar). Para o cálculo das probabilidades, usaremos o fato de que o número total de casos possíveis resulta da escolha de 2 cartas dentre as 52 do baralho. São, dessa forma, $C_{52,2} = \frac{52!}{2!50!} = 1326$ maneiras distintas de formar as duas cartas iniciais. Vejamos as probabilidades em cada caso.

4.3.1 Par

Para obter um par, temos 4 cartas para escolher duas, ou seja, $C_{4,2} = 6$ maneiras diferentes. Como são 13 os valores possiveis, temos $6 \times 13 = 78$ possibilidades de obtermos um par no "dar-cartas". A probabilidade que isso ocorroa é: $P(par) = \frac{78}{1326} \simeq 0,05882$ ou $5,88\%$, aproximadamente.

4.3.2 Straight Flush Draws (SFD)

Como vimos, são 10 sequências possíveis por naipe. Para cada naipe, inicialmente, temos 10 cartas (Ás ao 10) para encabeçar a sequência, cada uma delas com 4 possibilidades para a segunda carta (Ás-2, Ás-3, Ás-4, Ás-5; por exemplo). Para as cartas restantes (J, Q e K), as possibilidades para a segunda carta diminuem: 3, 2 e 1, respectivamente. Temos, então, um total de $(10 \times 4 + 3 + 2 + 1) = 46$ combinações por naipe, ou seja, $46 \times 4 = 184$ possibilidades ao todo. Assim, a probabilidade de ocorrência deste evento é: $P(SFD) = \frac{184}{1326} \simeq 0,138761$ ou $13,88\%$, aproximadamente.

4.3.3 Straight Draws

Aqui, o que diferencia do caso anterior é que os naipes não são os mesmos. Assim, temos 4 possibilidades para o naipe da primeira carta e 3 possibilidades para o naipe da segunda carta. Desa forma, temos um total de $12 \times 46 = 552$ possibilidades e a probabilidade de ocorrência é $P(SD) = \frac{552}{1326} \simeq 0,41629$ ou $41,63\%$, aproximadamente.

4.3.4 Flush draws

Neste caso, queremos duas cartas do mesmo naipe e que não formem uma pré-sequência. Assim, sendo a primeira carta um Ás, restam 4 possibilidades para a segunda carta. Começando por 2, restam 7 possibilidades; por 3, restam 6; por 4, restando 5; por 5, que restam 4; por 6, restando 3; por 7, restando 2 e por 8, restando apenas o Rei (K). Os demais casos já se encontram nos valores anteriores. Assim, são $4+7+6+5+4+3+2+1 = 32$ possibilidades por naipe, totalizando $32 \times 4 = 128$ casos. Dessa forma, a probabilidade que ocorra é $P(FD) = \frac{128}{1326} \simeq 0,09653$ ou $9,65\%$, aproximadamente.

4.3.5 No Draws

Aqui temos uma mão inicial que não forma nenhum dos jogos anteriores. Assim, restam $1326 - 128 - 513 - 148 - 78 = 459$ possibilidades e sua probabilidade de ocorrência é $P(ND) = \frac{459}{1326} \simeq 0,34615$ ou $34,62\%$, aproximadamente.

CAPÍTULO 5

Esperança Matemática no Texas Hold'em

A Esperança Matemática é um conceito fundamental para a teoria dos jogos. Conta-se que esse conceito foi discutido inicialmente por Pascal, no intuito de comparar o valor esperado da vida pia com relação à vida mundana:

> "O objetivo de Pascal foi apontar uma racionalidade para a aposta na existência de Deus. Assim, argumentou que a decisão deveria ser baseada na comparação entre os valores esperados. Essa comparação, que ficou conhecida como o *princípio da expectância matemática*, chamou à atenção dos matemáticos e foi amplamente utilizada como método de análise de decisões durante as últimas décadas do século XVII."[7]

No *poker*, em particular, um jogador que utiliza bem deste conceito obtém, a longo prazo, um lucro garantido. Por isso, é a esperança matemática que norteia a tomada de decisões de um jogador profissional, a cada rodada. Para SKLANSKY [8]:

> "Todas as vezes que você aposta com a probabilidade a seu favor, você ganha alguma coisa naquela aposta, você tendo ganhado ou não a aposta. Do mesmo jeito, quando você aposta com a probabilidade contra você, você está perdendo alguma coisa, não importando se você ganhou ou não a aposta."

E completa: "Expectativa (Esperança) Matemática é o coração de toda situação de jogo!"

Iremos agora analisar algumas situações prováveis numa mesa de *poker*, na modalidade *No Limit Texas Hold'em*. Para efetuar o cálculo da esperança matemática (ou valor esperado), numa situação real do jogo, precisamos considerar o número de cartas favoráveis à vitória (*outs*), o valor acumulado no pote e o valor a apostar. Adaptando a expressão para a esperança matemática ao poker, temos:

$$E(x) = P(x) \times t - [1 - P(x)] \times a,$$

onde $P(x)$ é a probabilidade de vencer a mão; t é o total acumulado no pote; $1 - P(x)$ a probabilidade de perder a rodada; e a é o valor da sua aposta.

Mas, para obter um bom resultado a longo prazo é necesário que essa esperança matemática seja sempre positiva, isto é, $E(x) > 0$. O que significa que:

$$E(x) > 0 \Rightarrow P(x) \times t - [1 - P(x)] \times a > 0$$

$$\Rightarrow P(x) \times t > [1 - P(x)] \times a \Rightarrow a < \frac{P(x) \times t}{1 - P(x)}.$$

Como $P(x) = \frac{o}{c}$, onde o é o número de *outs*, isto é, o número de cartas não-reveladas favoráveis à sua vitória e c é o número total de cartas ainda não reveladas, segue que:

$$a < \frac{\frac{o}{c} \times t}{1 - \frac{o}{c}} \Rightarrow a < \frac{\frac{o.t}{c}}{\frac{c-o}{c}}.$$

E, finalmente:

$$a < \frac{o.t}{c-o}.$$

Essa conclusão acima é fundamental para acelerar os cálculos de um jogador à beira da decisão de apostar ou não.

No intuito de simplificar as situações, porém sem que haja detrimento da generalidade, iremos analisar duas situações: uma pós-*flop* e outra, pós-*turn*.

5.1 1ª situação: Apostas pós-*Flop*

Você está prestes a decidir se paga, aumenta ou desiste da aposta. Suponha que suas cartas sejam: A(paus) e Q (ouros); e que as cartas do flop sejam K(paus), Q(paus) e 6(Paus)(Figura 5.1). Suponha também que o total acumulado no pote na primeira rodada seja R$ 9 e que todos os 6 jogadores à sua frente na rodada de apostas fizeram uma aposta de R$ 1, totalizando R$ 15 no pote.

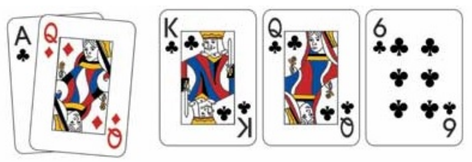

Figura 5.1 Um par de damas com possibilidade para Flush

A essa altura, você precisa considerar que algum oponente seu pode estar com um rei e que sua mão precisa melhorar para você ganhar. Seu jogo pode ser melhorado para uma trinca ou um Four de damas (para isso, existem 2 outs), ou para um Flush, ou até para um Straight Flush (com 9 outs: as nove cartas de paus restantes). Isso te dá um total de 11 outs. Agora, deve-se considerar que cinco cartas lhe foram reveladas, do total de 52. Portanto, você tem 11 casos favoráveis de um total de 47. O valor esperado (E), em função de sua aposta (x) será:

$$E(x) = \frac{11}{47} \times 15 - \frac{36}{47} \times x$$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{165}{47} - \frac{36x}{47}$$

Como é necessária uma esperança positiva para que se decida apostar (ou aumentar a aposta), segue que:

$$E(x) > 0 \Rightarrow \frac{36x}{47} < \frac{165}{47}$$

$$\Rightarrow x < \frac{165}{36} \Rightarrow x < 4,58.$$

Ou seja, você deve apostar e ainda pode aumentar a aposta para até R$ 4.

5.2 2ª situação: Apostas pós-*Turn*

É a sua vez de jogar e você está com um valete de paus e um dois de ouros. Na mesa, após o turn, as cartas sao: J (copas), 6 e 5 (paus) e 7 (copas). Suponha que o total acumulado no pote seja R$ 32 e que os 3 jogadores à sua frente apostaram R$ 4 cada. Nesse momento, você já tem um par de valetes (J) e seu jogo só pode melhorar para uma trinca, com 2 outs de um total de 46. A esperança matemática nessa situação, em função da sua aposta é de:

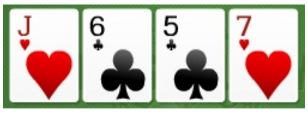

Figura 5.2 Um par de valetes com possibilidade para Trinca

$$E(x) = \frac{2}{46} \times 32 - \frac{44}{46} \times x$$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{64}{46} - \frac{44x}{46}$$

Novamente, o objetivo é obter uma esperança positiva:

$$E(x) > 0 \Rightarrow \frac{44x}{46} < \frac{64}{46}$$

$$\Rightarrow x < \frac{64}{44} \Rightarrow x < 1,45.$$

Diante desse resultado e como a aposta mínima nesta situação é R$ 4, a conclusão direta é que a melhor ação é dar nessa rodada é o *fold*, mesmo com um par "alto".

É importante levar em consideração que esses cálculos para a Esperança Matemática numa mesa de poker podem (e devem) ser estimados, no intuito de acelerar sua conclusão. Por exemplo, ao final da segunda situação não é necessário efetuar a divisão de 64 por 44. Basta que esse valor seja estimado. É fácil ver que ele é maior que 1 e menor que 2, por exemplo. E isso já é suficiente para você tomar sua decisão.

CAPÍTULO 6

Considerações Finais

A partir dessa discussão, é possível sugerir aos colegas uma atividade lúdica diferenciada, relacionando temas como a Análise Combinatória, a Probabilidade e a Esperança Matemática à prática do jogo do poker. Apostar na disseminação desmistificada do poker, é algo que pode render um ótimo trabalho que contribuirá significativamente para o desenvolvimento das habilidades cognitivas (no que compete à compreensão do caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilização de instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística) e não-cognitivas (como autonomia, raciocínio crítico, liderança, facilidade de relacionamento e tolerância, entre outras).

Desejamos aqui contribuir para uma substancial melhoria na qualidade do desenvolvimento dos nossos educandos. Pois, ultimamente, as pesquisas realizadas sobre a capacidade para resolver problemas de matemática aplicados à vida real, inclusive a mais recente realizada pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE), apontam resultados desastrosos: o Brasil ficou em 38º lugar, dentre 44 países avaliados no Programa Internacional de Avaliação de Alunos, o PISA.

Com o objetivo de contribuir para a prática pedagógica dos colegas professores, sugerimos uma sequência de atividades para que seja explorada a matemática do poker em sala de aula.

CAPÍTULO 7

Proposta Pedagógica

7.1 Aula 1

7.1.1 Duração

2 horas/aula (1h40min)

7.1.2 Objetivos

- Apropriar-se das regras básicas do poker, na modalidade *Texas Hold'em*;

- Compreender e demonstrar o porquê das posições no Ranking de Mãos;

7.1.3 Público-alvo

Alunos a partir do 2º ano do Ensino Médio, professores de Matemática e alunos da Licenciatura em Matemática.

7.1.4 Metodologia

- Revisão dos principais conceitos da combinatória e da Probabilidade: Princípio Fundamental da Contagem, Combinações Simples, Arranjos Simples e a Definição Clássica da Probabilidade;

- Apresentação do jogo do poker e suas regras na modalidade *Texas Hold'em*(Aqui sugerimos a exibição do vídeo "Matemática nas Brincadeiras"[11], do professor LEO AKIO YOKOYAMA[1];

- Apresentação e discussão do Ranking de Mãos;

- Realização de atividade (Atividade 1) em grupo para verificar as probabilidades que justificam o ranking das mãos do poker;

- Discussão dos resultados obtidos.

[1] Professor idealizador e responsável pela série de TV "Matemática em Toda Parte"

7.2 Aula 2

7.2.1 Duração

2 horas/aula (1h40min)

7.2.2 Objetivo

- Concretizar as regras do poker através da prática do jogo, na modalidade *Texas Hold'em*.

7.2.3 Metodologia

- Dividisão sa turma em grupos de aproximadamente 8 alunos;
- Estabelecimento do valor inicial que cada jogador entrará para a mesa (Buy-In);
- Distribuição igualitária do número de fichas estabelecido para cada jogador, em cada grupo;
- Prática do jogo;
- Análise/Discussão dos resultados de cada grupo, ou seja, os resultados de cada mesa de poker. (20 minutos finais).

7.3 Aula 3

7.3.1 Duração

2 horas/aula (1h40min)

7.3.2 Objetivos

- Comprender o conceito de Esperança Matemática;
- Aplicar a Esperança Matemática em algumas situações numa mesa de poker.

7.3.3 Metodologia

- Apresentação da definição da Esperança Matemática;
- Exemplificação usando o caso da Mega Sena, citado neste texto;
- Discussão das situações numa mesa de poker apresentadas neste texto.

CAPÍTULO 8

Glossário

Apresentamos aqui uma lista de termos comuns no *poker*, dentre os quais alguns termos mencionados em nosso trabalho. O texto foi retirado e adaptado do site [26].

- AÇÃO

  Serve tanto para o ato de pagar/apostar/repicar quanto para descrever uma mão que tem muitas apostas. Também se refere ao jogador que tem a vez de agir: "A ação está no small blind."

- ALL-IN

  Um jogador é considerado como estando all-in quando aposta todas as suas fichas em uma determinada mão. Os demais jogadores ainda ativos podem aumentar a aposta. As quantidades de fichas apostadas acima do all-in constituirão um pote lateral que será disputado pelos jogadores restantes que pagaram este aumento da aposta. Jogador conservador, que não joga muitas mãos.

- BET

  Apostar.

- BIG BLIND

  A maior das duas apostas obrigatórias que são colocadas antes de qualquer carta ser dada em Texas hold'em e Omaha, bem como em outros jogos menos conhecidos. O big blind é o 2º jogador à esquerda do botão que representa o dealer ativo da mão. Geralmente é o dobro do valor da small blind e é igual ao menor dos dois limites de apostas em limit Texas hold?em. Num jogo de 2 / 4 limit Texas hold'em, a big blind seria 2. As blinds em jogos de ring no limit são determinadas pelas regras da casa e, num torneio, são determinadas por um horário estabelecido, normalmente progressivo à medida que o torneio progride.

- BLIND (cego) ou BLIND-BET

  As apostas obrigatórias que são feitas pelos dois primeiros jogadores sentados diretamente à esquerda do dealer (Small Blind e Big Blind), antes da distribuição de quaisquer cartas. Uma blind não é o mesmo que uma ante, e pode ser usada em conjunto com uma ante, normalmente nas etapas mais avançadas de torneios.

- BLUFF (blefe)

  Tentar enganar os demais jogadores, fazendo uma aposta alta sem nenhum jogo ou com um jogo muito fraco.

- BOARD OU BOARDCARDS

A board são todas as cartas no meio da mesa que podem ser usadas por todos os jogadores ativos, geralmente chamadas cartas comunitárias. As variantes mais comuns de poker a usarem cartas de board são o Texas holdem e Omaha.

- BUTTON (botão)

  Também conhecido como botão dealer, é um pequeno disco que se move ao fim de cada mão, no sentido horário, de jogador para jogador, para indicar quem estaria fazendo o papel de dealer em cada mão. O disco que se move uma posição para a esquerda após cada mão jogada, que representa o jogador nomeado como dealer nessa mão. Em jogos com um dealer real, como nos casinos, o botão mostra qual o jogador que tem a vantagem de ser o último a agir. Em jogos caseiros, o jogador com o botão geralmente também é o dealer. A este jogador normalmente diz-se que é "O botão"ou que "Está no botão.?.

- BUY-IN (compra)

  A quantia mínima que um jogador tem que pagar para se sentar numa determinada mesa apostada de poker ou para se inscrever num torneio. Trocar dinheiro por fichas antes de sentar em uma mesa de poker. Por exemplo, uma mesa de US$4-US$8 fixed limit pode requer que o jogador compre pelo menos US $40 de fichas para entrar. Esta quantia é geralmente bem menor que o jogador espera jogar durante seu período de tempo na mesa, porém grande o suficiente para que ele possa jogar um número grande de mãos sem ter que comprar mais fichas. Desta forma o jogo não fica lento por causa de constantes compras de fichas.

- CALL

  O ato de igualar a última aposta ou raise sem no entanto aumentar ainda mais pote. Por exemplo, "Eu faço call"ou "Eu faço call à tua aposta."Por vezes Ver é também usado com o mesmo significado.

- CARTAS COMUNITÁRIAS (COMMUNITY CARDS)

  As cartas colocadas com a face para cima no centro da mesa, que são partilhadas por todos os jogadores ainda ativos nessa mão de forma a poderem formar a melhor mão possível em conjunto com as suas cartas de mão. Em Texas holdem e Omaha, as cartas comunitárias são compostas pelo flop, turn e river. As cartas comunitárias são também chamadas de cartas de mesa ou mesa.

- CARTAS DA MÃO

  As suas cartas de mão são as cartas que você combina com as cartas comunitárias em jogos do tipo do Texas Holdem e Omaha para fazer a melhor mão de cinco cartas. Em 7 Card Stud, as primeiras dias cartas e a carta final são as cartas de mão.

- CHECK

  Quando ainda está envolvido numa mão de poker e é a sua vez de atuar, e entretanto não existiram apostas anteriores a você, pode passar ou fazer "check"para o próximo jogador sem ter de colocar qualquer aposta. Ao fazer check, você reserva o direito a fazer call ou raise a quaisquer futuras apostas que existam na mesma rodada de apostas. O check é também um termo usado para mencionar uma ficha de casino.

- COMPRAR (buy)

  Diz-se quando se faz um raise que força todos os oponentes a foldarem as suas cartas, diz-se "Comprar o pote", ou quando se faz raise para forçar os jogadores entre si e as blinds a fazerem fold, diz-se "Comprar o botão". Quando ouvir "Comprar o pote", geralmente insinua-se que o jogador está a fazer bluff, mas normalmente quando um jogador tenta "Comprar o botão"; tem uma mão acima da média.

- CONNECTORS

  Normalmente usado quando se discute a mão inicial em Texas holdem, um connector é a mão onde as duas cartas estão seguidas no ranking, como um Valete e um dez ou um terno e uma quadra. Quando o termo "suited"connector é usado, as duas cartas são também do mesmo naipe. Pode ser usado também nos termos one-gap (um de folga) ou two-gap (dois de folga) connector. Isto simplesmente significa que existem uma ou duas cartas, ou falhas, que separam as duas cartas. Por exemplo, uma sena e um oito é um one-gap connector enquanto uma sena e um nove é um twogap connector. Muitos perfeccionistas de poker não reconhecem qualquer mão com uma folga como sendo um connector, mas o termo é usado muitas vezes.

- DEAL

  Distribuir cartas aos jogadores sentados na mesa e participando da rodada, da maneira que dita as regras do jogo. Um acordo para dividir o dinheiro de um prêmio de um torneio de maneira diferente que é paga oficialmente na premiação.

- DEALER

  No jogo online é supostamente quem distribui as cartas e é o último jogador a manifestar-se antes do ?Small Blind? e do ?Big Blind?. No jogo ao vivo é a pessoa que manuseia as cartas, distribui a mesa e monitora o jogo, também conhecido como croupier.

- DEALER BUTTON

  Indica qual jogador está fazendo o papel de Dealer. Normalmente é um círculo com um D no meio. DEALER?S POSITION A última pessoa a apostar numa rodada, aquela que está com o botão de dealer.

- EXPECTATION ou EXPECTATIVA É a quantia que ganhará em média se participar centenas de vezes em casos iguais.

- FOLD

  Dar fold é desistir de participar daquela mão e, na sua vez de jogar, jogar fora as duas cartas. Correr. Deixar de ser um jogador ativo naquela mão. O dealer pode também foldar a sua mão se você não estiver na mesa quando for a sua vez de agir.

- FLOP

  As três primeiras cartas comunitárias ou cartas da mesa num jogo de Texas Holdem ou Omaha. O flop é retirado do baralho após a primeira carta ser queimada, então as três cartas serão colocadas ao mesmo tempo no centro da mesa com a face para cima. Também indica a segunda rodada de apostas.

- FLUSH

  São cinco cartas do mesmo naipe, independente do valor. E sem estarem em seqüência.

- FLUSH DRAW Tentativa de fazer um flush. Quando um jogador tem quatro cartas, todas do mesmo naipe, e espera receber uma quinta para fazer um flush.

- FOUR OF A KIND

  Quadra.

- FULL HOUSE ou FULL HAND ou FULL BOAT

  Uma trinca e um par. Ex: 7?7?7?9?9.

- HAND

  É a melhor combinação que um jogador pode fazer com suas cartas e as cinco abertas na mesa (comunitárias).

- HEADS UP

  Quando uma mão ou torneio fica com apenas dois jogadores ou quando dois jogadores decidem jogar um contra um.

- HOLD? EM GAMES

  Jogos em que existem cartas comunitárias.

- HOLE CARDS ou POCKET CARDS

  Também referidas como poket cards; são as cartas que recebe em mãos no início da rodada em jogos como Texas Hold'em e Omaha, estas combinam com as cartas comunitárias na mesa para formar a sua mão. No 7 Card Stud, as duas primeiras cartas e a carta final são as hole cards.

- KICKER

  A segunda carta na sua mão quando usa uma carta para formar uma mão com a mesa. O seu kicker será comparado com o kicker do seu adversário quando empata num pote, com o pote a ir para quem tiver o kicker maior, a não ser que os jogadores tenham mãos de cinco cartas idênticas. Por exemplo, se você e o seu adversário tiverem Ás na vossa mão e estiver um Ás na mesa, o jogador com a segunda carta mais alta, ou kicker, na sua mão vence o pote. Contudo, se um jogador tiver Ás duque e o outro Ás terno e na mesa estiver Ás Dama, dez, oito e seis, os jogadores dividem o pote pois ambos têm mãos de cinco cartas idênticas e como tal nenhum dos seus kickers é chamado a jogo.

- LATE POSITION

  Os dois últimos lugares da mesa.

- MIDDLE POSITION

  Os lugares seis, sete e oito da mesa.

- NO-LIMIT

  Uma forma de poker, normalmente Texas holdem, onde qualquer aposta pode chegar a ser ou incluir todas as fichas que um jogador tem na mesa.

- NUT FLUSH

  Um flush (todas as cartas do mesmo naipe), que contenha o A, ou seja, o maior flush possível.

- ODDS

  A probabilidade de se fazer uma mão.

- OMAHA

  Jogo em que cada jogador recebe quatro cartas fechadas com cinco cartas comunitárias. Para fazer a sua mão, o jogador é obrigado a usar duas de suas cartas e três das cartas comunitárias.

- OPEN-ENDED STRAIGHT DRAW

  Quatro cartas para uma sequência sem falhas entre elas e com pelo menos uma carta para ir prá mesa é um open ended straight draw. Também apelidado quatro para uma sequência. Por exemplo, Dama, Valete, dez, nove é um open-end straight draw. Se tem uma falha, chama-se um gutshot straight draw. Outro straight draw, chamado de double gutshot é quase igual a um open ended straight draw no que refere a determinar as pot odds. Um exemplo de double gutshot é terno, quina, sena, sete, e nove. Repare que quer uma quadra quer um oito completarão uma sequência.

- OUT

  Uma carta que pode sair no turn e/ou no river que melhora a sua mão para uma mão vencedora chama-se um out. Por exemplo, se tem quatro cartas para um flush, você tem nove outs para melhorar para um flush. "Eu tinha 12 outs no river, mas saiu furado, atirando-me para fora do torneio."

- OUTS

  O número de cartas restantes no baralho que podem melhorar a sua mão. Ex.: 5?4?3?2, você tem 8 ?outs? possíveis: 4 seis e 4 ases.

- POT

  É o total das fichas acumuladas na mesa desde o início de cada rodada.

- POTE CENTRAL OU POTE PRINCIPAL

  A parte do pote total que qualquer jogador ativo na mão pode vencer. Geralmente é o pote inteiro, mas no caso de um jogador estar em all in enquanto outros jogadores continuaram a apostar, a parcela do pote que o jogador all in pode vencer é o pote central, ou principal. Quaisquer outras apostas serão colocadas num pote paralelo (side pot).

- POT LIMIT

  Uma forma de poker, mais usual em Texas holdem e Omaha, onde as apostas e os raises podem chegar até à totalidade de dinheiro no pote. No caso de um raise, o raise pode ser o valor do pote mais a quantia necessária para fazer call a uma aposta anterior nessa rodada. Por exemplo, se estiverem dez dólares no pote e um adversário apostar dez, então pode fazer um raise de trinta, dez do pote mais dez da aposta adversária mais dez do seu call. Neste caso colocaria quarenta no pote, os dez para cobrir a aposta mais os trinta do raise.

- POT ODDS

  A quantia de possível retorno que o pote lhe oferece se você vencer a mão em comparação com a quantia a que tem de fazer call de maneira a manter-se em jogo. Quando as pot odds são usadas em conjunto com as suas odds para melhorar um projeto para melhor mão, pode tomar decisões mais precisas sobre o provável lucro se se mantiver em jogo. Por exemplo, se tiver quatro cartas para um flush e pensa que quando acertar no flush ganhará a mão e que estão vinte dólares no pote e só tem de fazer call com cinco, o pote oferece-lhe odds de quatro para um. Se as suas odds de acertar no flush forem melhores que quatro para um, então deve fazer call. Não se esqueça de ponderar sobre apostas que possa ter de fazer call no river ou que você obrigue os outros a pagar, quando determina as suas odds.

- QUADS ou FOUR

  São quatro cartas iguais. Quadras. Ex.: A-A?A-A ou 3-3-3-3.

- RAISE

  É aumentar (repicar) a aposta que chega a você. Colocar uma aposta após um ou mais adversários terem apostado. A aposta tem de ser no mínimo igual à aposta anterior. Por exemplp, num jogo de no limit Texas holdem, o seu adversário aposta 100, você deve fazer um raise de pelo menos 100, numa aposta total de 200 (100 pelo call e 100 pelo raise) para poder fazer raise. No exemplo anterior não pode fazer raise de 50. Abrindo as apostas numa rodada de apostas n eo é considerado raise, apenas apostar.

- RANK

  O nível do valor das cartas no baralho. Um Ás é superior a um Rei, que é superior a uma Dama, etc. Quando se fazem declarações sobre duas cartas idênticas ou duas cartas de mesmo valor, significa duas ou mais cartas iguais. Por exemplo, dois Reis são cartas idênticas. Ranking = O valor de cada carta ou da mão

- RE-RAISE

  Também conhecido como contra-repicar, dar re-raise é aumentar novamente uma aposta que já tenha sido aumentada.

- RIVER

  A última carta comunitária em Texas holdem e Omaha, também chamada de fifth street (quinta via).

- ROYAL FLUSH ou ROYAL STRAIGHT FLUSH

  Uma seqüência máxima do mesmo naipe, A-K-Q-J-T. É a melhor mão possível no poker.

- SATELLITE

  Um torneio que, em vez de dar prêmios em dinheiro, premia os primeiros colocados com entradas para um torneio maior.

- SEVEN CARD STUD

  Stick de sete cartas. É um jogo de poker bastante conhecido, em que os jogadores recebem três cartas fechadas e quatro cartas abertas. Ele faz mão com as cinco melhores cartas dessas sete.

- SMALL BLIND

  É o jogador sentado à esquerda do Dealer e que é obrigado a fazer a primeira aposta da mesa. Em torneios, se o nível está em 20-40, ele é obrigado a colocar 20 fichas. Nas mesas apostadas (Cash Game ou Ring game) ele põe sempre o pingo menor obrigatório. A menor das apostas obrigatórias que são colocadas em jogos de Texas holdem ou Omaha antes das cartas serem dadas. É colocada pelo primeiro jogador à esquerda do dealer, ou "botão", e geralmente é igual a metade da big blind e/ou metade do menor limite de apostas num ring game. Por exemplo, num jogo de 4 / 8, a small blind seria de 2 e a big blind seria 4.

- SPLIT (dividir)

  Empate, divisão do pote.

- STACK (pilha)

  A quantidade de fichas ou dinheiro de cada jogador.

- STEAL RAISE Roubar a banca. Um aumento de aposta por parte de um jogador numa posição final, numa tentativa de reduzir o número de jogadores e/ou ficar com a mesa.

- STRAIGHT

  Cinco cartas consecutivas de qualquer naipe, seqüência.

- STRAIGHT FLUSH

  Cinco cartas consecutivas do mesmo naipe.

- TEXAS HOLD’EM

  Também chamado de Hold’em. Nele cada jogador recebe duas cartas fechadas e são abertas mais cinco cartas comunitárias na mesa. Cada jogador deve fazer uma mão de cinco cartas, podendo usar quaisquer das sete cartas disponíveis a ele.

- THREE OF A KIND ou TRIPS

  Trinca.

- TURN

  A penúltima carta aberta pelo Dealer em Texas holdem e Omaha, quarta carta comunitária da mesa. É a terceira rodada de apostas. Também conhecida por fourth street.

- TWO PAIR

  Dois pares.

- VALUE (valor)

  Como em "bet for value."Isto significa que você gostaria de fato que seus oponentes dessem call sua aposta (ao contrário de um blefe, quando você quer que eles dêem fold). Geralmente é porque você tem a melhor mão. Porém, também pode ser um draw que, devido a ter mais de um adversário, tem uma expectativa positiva.

- WSOP (World Series Of Poker)

  Torneio Mundial de Poker.

Referências Bibliográficas

[1] PCNs. Parâmetros Curriculares Nacionais, 1999.

[2] Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco, 2012.

[3] FIGUEIREDO, Ricardo MOLINA. Perícia emitida pelo Laboratório de Perícias. Disponível em: <www.cbth.org.br/cbth/public/files/DrRicardoMolina.pdf?>. Acesso em: 14/02/2014

[4] DICAS DE POKER. E-book disponível em: <www.dicasdepoker.com>. Acessado em 15/01/2014.

[5] GADELHA, Augusto. História da Probabilidade. Notas de Aula: Teoria da Probabilidade I. Curso de Pós-Graduação em Estatística, DME/IM/UFRJ. Março/2004.

[6] VYGOTSKY, LS. A formação social da mente. Martins Fontes. São Paulo, 1989.

[7] CUSINATO, Rafael Tiecher. Teoria da decisão sob incerteza e a hipótese da utilidade esperada: conceitos analíticos e paradoxos. [Dissertação], UFRGS. Porto Alegre, 2003.

[8] SKLANSKY, D. The theory of poker : a professional poker player teaches you how to think like one. [S.l.]: Two Plus Two, 1989.

[9] FERREIRA, Jeferson. Poker sem segredo. Digerati Books, São Paulo, 2007.

[10] WIKIPEDIA. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/P%C3%B4quer>. Acessado em 24/03/2013.

[11] MATEMÁTICA NAS BRINCADEIRAS. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Q9_KNEwdu1w>. Acessado em 09/06/2014.

[12] CORREIA, João P. C. PGDL: Sistemas para definição genérica de jogos de Poker [Dissertação de Mestrado] Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto. Portugal, Junho/2013.

[13] Wikipedia, ?Draw Poker.? [Online]. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Draw_poker>.

[14] Wikipedia, ?Stud Poker.? [Online]. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Stud_poker>.

[15] Wikipedia, ?Community Card Poker.? [Online]. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Community_card_poker>.

[16] POKER VARIANTS. [Online]. Disponível em: <http://www.xenomind.com/pokervar/>

[17] Wikipedia, "Texas Hold'em". [Online]. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Texas_hold_'em>.

[18] INTELIPOKER, "Regras do Texas". [Online]. Disponível em: <http://www.intelipoker.com/articles/Regras-do-Texas>.

[19] MAGALHÃES, M. Nascimento. Propriedades e Variáveis Aleatórias, 2006.

[20] MORGADO, Augusto César. Análise Combinatória e Probabilidade. IMPA, 1991.

[21] LAPLACE, Pierre Simon. Ensaio Fiolosófico sobre as Probabilidades. Tradução, Introdução e Notas: Pedro Leite de Santana. Contraponto Editora.

[22] ROLLA, Leonardo T. Introdução à Probabilidade, IMPA, julho/2013. Disponível para download em: <http://www.impa.br/-leorolla>. Acessado em: 15/01/2014

[23] LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio - volume 2 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. - 6. ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

[24] LOPES, C. E. O estudo da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. Artigo. Campinas, São Paulo, 2008.

[25] Pokertips. "Pôquer Pot Limit". Disponível em: <http://pt.pokertips.org/rules/pot-limit.php>. Acessado em: 26/05/2014.

[26] ASES DO POKER. Disponível em: <http://asesdopoker.com/wp-content/uploads/Gloss%E1rio%20de%20Poker.pdf>. Acessado em 22/04/2014.