



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Antonio Ferreira da Silva**

**Uma introdução elementar à programação linear no plano via GeoGebra**

RECIFE  
2023





UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Antonio Ferreira da Silva**

**Uma introdução elementar à programação linear no plano via GeoGebra**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves

RECIFE  
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S586i

Silva, Antonio Ferreira da

Uma introdução elementar à programação linear no plano via GeoGebra / Antonio Ferreira da Silva. - 2023.  
59 f. : il.

Orientador: Rodrigo Jose Gondim Neves.  
Inclui referências.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática (PROFMAT), Recife, 2023.

1. Programação linear. 2. Maximização. 3. Minimização. 4. GeoGebra. I. Neves, Rodrigo Jose Gondim, orient. II. Título

CDD 510

---

ANTONIO FERREIRA DA SILVA

**Uma introdução elementar à programação linear no plano via GeoGebra.**

*Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Aprovado em 15/02/2023

BANCA EXAMINADORA

---

**Prof. Dr. Rodrigo Jose Gondim Neves** (Orientador) – UFRPE

---

**Prof. Dr. Airton Temístocles Gonçalves de Castro** - UFPE

---

**Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente** – PROFMAT/UFRPE



*À minha família*





# Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me concedido a oportunidade de concluir mais essa etapa em minha vida, já com os meus 56 anos. Fazer o mestrado sempre foi meu sonho, agora é uma realidade.

À minha esposa Sarai Alves por todo apoio e compreensão nos períodos em que precisava me dedicar aos estudos. Aos meus filhos, Jônatas Thiago e Arquimedes César, ambos são dádivas que Deus nos concedeu. Às minhas noras Poliana Ferreira e Thamara Ferreira, são pessoas maravilhosas. Aos meus netos Samuel Benicio, 6 anos e Isabel Giovana, 2 anos, são bênçãos em nossa vida.

Aos meus pais Severino Ferreira e Celsa Feliciano, ambos não estão mais nesse mundo. Eles se esforçaram e trabalharam muito para criar e educar a mim e meus irmãos, agradeço também às minhas irmãs Maria das Graças e Maria do Amparo e ao meu irmão Pedro Ferreira, todos são pessoas admiráveis.

À Rede Municipal de Ensino da Prefeitura do Recife por conceder a licença para estudo no momento em que eu mais precisava, foi fundamental para minha continuidade no mestrado.

Ao Prof. Dr Francisco Luiz dos Santos por todo apoio durante o período do curso.

Ao meu orientador Prof. Dr Rodrigo Gondim pelas orientações, apoio e paciência, aprendi muito com seus ensinamentos, minha gratidão por tudo.

Aos professores da banca examinadora por aceitarem o convite e pelas sugestões de melhoria deste trabalho.

À Coordenação e Secretária do PROFMAT- UFRPE sempre atentas às necessidades dos mestrandos.

Aos Professores do PROFMAT-UFRPE pela dedicação e empenho.

Aos colegas de turma, nos tornamos uma família, muito grato por ter convivido com todos vocês nesses dois anos, no primeiro ano apenas remotamente, por causa da pandemia, mas no segundo ano tivemos a oportunidade de conviver presencialmente.

Aos colegas professores e professoras que trabalham comigo, não tenho como listar os nomes de todos aqui. Sempre contribuíram comigo de uma forma ou de outra para conclusão deste trabalho.



*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.  
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)*



# Resumo

Este trabalho propõe o ensino da programação linear em nível elementar para estudantes do ensino médio. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica, consultando livros da educação básica e livros específicos sobre a temática. Analisa como o tópico é abordado e faz uma sistematização dos conceitos, procurando rerepresentá-los em uma linguagem mais simples, acessível aos estudantes do ensino médio. Dando enfoque aos problemas de otimização (maximização e minimização) numa perspectiva mais prática, usando técnicas algébricas e gráficas simples, e as ferramentas do software GeoGebra.

**Palavras-chave:** Programação linear, Maximização, Minimização , GeoGebra.



# Abstract

This work proposes the teaching of linear programming at an elementary level for high school students. This is a bibliographical research, consulting basic education books and specific books on the subject. It analyzes how the topic is approached and makes a systematization of the concepts, trying to present them in a simpler language, accessible to high school students. Focusing on optimization problems (maximization and minimization) in a more practical perspective, using simple algebraic and graphical techniques, and GeoGebra software tools.

**Keywords:** Linear programming, Maximization, Minimization , GeoGebra.





# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação gráfica das duas inequações . . . . .	24
Figura 2 – Região com possíveis valores de $x$ e $y$ . . . . .	25
Figura 3 – Retas paralelas, variando-se o valor de $R$ em $70x + 90y = R$ na região $\alpha$ . . . . .	26
Figura 4 – Representação gráfica das três inequações . . . . .	27
Figura 5 – Região com possíveis valores de $x$ e $y$ . . . . .	27
Figura 6 – Retas paralelas, variando-se o valor de $M$ em $3x + 2y = M$ . . . . .	28
Figura 7 – Reta que representa o custo mínimo na região $\beta$ . . . . .	28
Figura 8 – Representação da equação da reta no Plano Cartesiano . . . . .	31
Figura 9 – Representação dos dois semiplanos deteminados pela reta . . . . .	32
Figura 10 – Região que representa a inequação $3x - 2y - 6 \leq 0$ . . . . .	33
Figura 11 – Região que representa a inequação $4x + 3y - 12 \geq 0$ . . . . .	33
Figura 12 – Interseção das regiões que representam as inequações $3x - 2y - 6 \leq 0$ e $4x + 3y - 12 \geq 0$ . . . . .	34
Figura 13 – Região que representa a inequação $2x - 3y + 4 \geq 0$ . . . . .	34
Figura 14 – Interseção das regiões que representam as inequações $3x - 2y - 6 \leq 0$ , $4x + 3y - 12 \geq 0$ e $2x - 3y + 4 \geq 0$ . . . . .	35
Figura 15 – Representação de $ax + by > c$ e $ax + by < c$ com $a.b < 0$ e $c > 0$ . . . . .	36
Figura 16 – Representação de $ax + by > c$ e $ax + by < c$ com $a.b > 0$ e $c > 0$ . . . . .	36
Figura 17 – Exemplo de bola aberta e bola fechada . . . . .	37
Figura 18 – Exemplo de pontos interiores e não interiores . . . . .	38
Figura 19 – Exemplo de pontos interiores, na fronteira e exteriores . . . . .	39
Figura 20 – Exemplos de conjuntos fechados . . . . .	39
Figura 21 – Exemplos de conjuntos que não são fechados . . . . .	39
Figura 22 – Conjunto fechado, mas não limitado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2   y \geq x^2\}$ . . . . .	40
Figura 23 – Conjunto fechado e limitado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2   4x^2 + y^2 \leq 4\}$ . . . . .	40
Figura 24 – Exemplo de região convexa e não convexa . . . . .	41
Figura 25 – Região triangular fechada com vértices nos pontos $(2, 0)$ , $(0, 2)$ e $(0, -2)$ . . . . .	42
Figura 26 – Região formada por $5x + 6y \leq 30$ , $3x + 2y \leq 12$ , $x \geq 0$ e $y \geq 0$ . . . . .	44
Figura 27 – Ponto máximo(mínimo) no interior de uma região convexa $D$ . . . . .	46
Figura 28 – Interface do GeoGebra Classic 6 . . . . .	48
Figura 29 – Barra de Ferramentas do GeoGebra Classic 6 . . . . .	48
Figura 30 – Configurações das Ferramentas . . . . .	48
Figura 31 – Botões de Configurações das Ferramentas . . . . .	49
Figura 32 – Entrada das restrições do Exemplo 2.3 no GeoGebra . . . . .	51
Figura 33 – Exibindo a calculadora do GeoGebra para entrada das restrições . . . . .	51

Figura 34 – Interseção das Restrições . . . . .	52
Figura 35 – Representação da equação $Z = 20x + 40y$ para $Z = 0$ . . . . .	52
Figura 36 – Representação da solução ótima para $Z = 20x + 40y$ com $x$ e $y$ dentro da região viável . . . . .	53
Figura 37 – Representação das restrições do Exemplo 2.4 . . . . .	54
Figura 38 – Representação da região viável e sentido de crescimento de $Z$ em $Z = 20x + 30y$	54
Figura 39 – Representação da solução ótima de $Z = 20x + 30y$ . . . . .	55

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Vitaminas presentes nos produtos P e Q . . . . .	26
Tabela 2 – Valores que a equação $M = 3x + 2y$ assume nos vértices . . . . .	29



# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>1</b>	<b>PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO - SEGUNDO IEZZI, DANTE, PAIVA E COSTA</b> . . . . .	<b>23</b>
1.1	Conceitos básicos de programação linear para a educação básica . . . . .	23
1.2	Problemas envolvendo a programação linear . . . . .	24
<b>2</b>	<b>DESIGUALDADE LINEAR NO PLANO</b> . . . . .	<b>31</b>
2.1	Representação gráfica de inequações lineares . . . . .	31
2.2	Desigualdades lineares . . . . .	34
<b>3</b>	<b>TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROGRAMAÇÃO LINEAR</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1	Conjunto fechado, limitado e convexo no plano . . . . .	37
3.2	Máximos e mínimos em um conjunto compacto . . . . .	41
3.3	Teorema Fundamental . . . . .	45
<b>4</b>	<b>PROGRAMAÇÃO LINEAR VIA GEOGEBRA</b> . . . . .	<b>47</b>
4.1	O que é o GeoGebra . . . . .	47
4.2	Conhecendo as ferramentas do GeoGebra . . . . .	47
4.3	Resolução de problemas de programação linear com duas variáveis usando o GeoGebra . . . . .	49
	<b>Conclusão</b> . . . . .	<b>57</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>59</b>



# Introdução

O presente trabalho tem como foco principal abordar a programação linear em nível elementar para estudantes do ensino médio. A Programação Linear (PL) é uma técnica de planejamento usada em pesquisa operacional. Ela lida com problemas de otimização, buscando formas de maximizar a receita (ou lucro) e minimizar as despesas.

Os estudantes começam a empreender muito cedo, sendo assim a programação linear pode ser útil na tomada de decisões relativas aos negócios e demais problemas do cotidiano.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular(BNCC) (BRASIL, 2018) a metodologia de ensino e aprendizagem da matemática deve estar articulada com as diversas áreas do conhecimento, utilizando-se dos processos de Otimização e Modelagem, dentre outros. Na habilidade (EM13MAT301) a BNCC destaca:

Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 544).

A PL é uma das técnicas mais usadas na Pesquisa Operacional, porém os livros da educação básica quando tratam deste tema, o fazem de forma bem resumida. Em alguns livros, não se propõe nenhuma questão para os estudantes resolverem. Já as publicações técnicas sobre o assunto, em sua maioria, usam uma linguagem muito formal, dificultando a compreensão dos estudantes do Ensino Médio.

Diante da importância do tema, como salienta a BNCC, e da escassez de material em linguagem acessível aos estudantes da educação básica, este trabalho aborda a PL com duas variáveis motivadas por exemplos compatíveis com os vistos em livros didáticos do ensino médio, usando técnicas algébricas e gráficas simples, destacando o uso do software GeoGebra na resolução dos problemas envolvendo a PL.

Neste sentido, o objetivo desse trabalho é propor o ensino da programação linear em nível elementar para estudantes do ensino médio. De forma mais específica, busca-se definir a programação linear; descrever como ela aparece nos livros do ensino médio; localizar os semiplanos determinados pelas desigualdades lineares; apresentar alguns problemas e resolvê-los, usando o método gráfico; demonstrar o teorema fundamental da programação linear para duas variáveis e desenvolver a solução de problemas de PL usando o software GeoGebra.

Trata-se de uma pesquisa bibliográfica acerca do ensino da programação linear nas turmas do ensino médio. Foram consultados livros da educação básica e livros específicos sobre a temática. Analisando como o tópico é abordado, fazendo uma sistematização dos conceitos, procurando rerepresentá-los em uma linguagem mais simples, acessível aos estudantes.





# 1 Programação Linear no ensino Médio - Segundo Iezzi, Dante, Paiva e Costa

Este capítulo apresenta os conceitos básicos da programação linear da forma que eles aparecem em alguns livros do ensino médio, pois há poucos livros da educação básica tratando deste assunto. Também será apresentada a solução gráfica de dois problemas.

## 1.1 Conceitos básicos de programação linear para a educação básica

A Programação Linear (PL) é uma técnica de planejamento usada em pesquisa operacional. Ela lida com problemas de otimização, buscando formas de maximizar a receita (ou lucro) e minimizar as despesas (IEZZI, 2016). O autor aborda esse assunto logo após estudar a resolução gráfica de inequações do 1º grau no 3º ano do Ensino Médio. Nota-se que é um momento bem propício, pois muitos estudantes têm dificuldade de entender o que a inequação representa. Desta forma é possível ver a aplicação do conteúdo que está sendo estudado.

O autor (DANTE, 2016) aborda a PL logo após a discussão de um sistema linear. Ele mostra que as equações e inequações lineares ajudam na resolução de muitos problemas do dia a dia. É uma abordagem bem interessante, pois dá significado às representações que geralmente são usadas nas aulas de matemática, e às vezes os estudantes têm dificuldade de ver um significado para aquela equação ou sistema de equações. Ele mostra uma situação-problema, representando-o em uma tabela e resolvendo pelo método gráfico. No final da abordagem, indica várias fontes de consulta, onde o estudante pode pesquisar para obter mais informações.

Já o autor Manoel Paiva inclui a PL após a representação gráfica de uma inequação do 1º grau. Ele inicia fazendo três perguntas:

Como obter o maior rendimento de uma máquina com o menor custo possível? Na fabricação de produtos compostos pelas mesmas matérias-primas, que quantidade de cada produto deve ser fabricada para se obter o máximo de lucro? Quais devem ser as dimensões de uma embalagem para que seja gasto o mínimo de material em sua confecção? (PAIVA, 2010, p. 132).

Após fazer essas perguntas, ele resolve um problema de otimização, representando em uma tabela, montando as inequações e fazendo a resolução gráfica. Depois apresenta onze problemas como exercícios.

Segundo (COSTA, 2022) nos exames de seleção para UFPE (Universidade Federal de Pernambuco) e UFRPE (Universidade Federal Rural de Pernambuco), nas provas que eram

elaboradas pela COVEST (Comissão de vestibular), na década de 90 e início dos anos 2000, havia questões bem intrigantes, envolvendo a programação linear. O autor resolve três questões de otimização, maximizando lucros e reduzindo prejuízos. Em seguida ele apresenta uma lista com cinco questões para serem resolvidas.

## 1.2 Problemas envolvendo a programação linear

### Exemplo 1.1. (PAIVA, 2010)

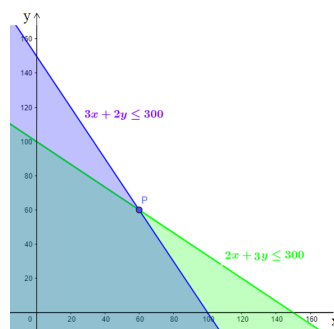
Para a realização de um bazar beneficente, uma entidade filantrópica recebeu de uma confecção de roupas, uma doação de 300 calças e 300 camisas. Os organizadores do evento decidiram embalar essas peças em dois tipos de pacote: O tipo A, formado por 2 calças e 3 camisas; e o tipo B, formado por 3 calças e 2 camisas. Cada pacote do tipo A será vendido por R\$ 70,00, e do tipo B, por R\$ 90,00 cada um. Quantos pacotes de cada tipo devem ser formados para se obter a receita máxima com a venda de todos?

Solução:

Considerando  $x$  a quantidade de pacotes do tipo A e  $y$  a quantidade de pacotes do tipo B. Pelas informações do enunciado tem-se que a quantidade de calças será de  $2x + 3y$ , e de camisas será de  $3x + 2y$ . Mas essas quantidades são limitadas:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 300 \\ 3x + 2y \leq 300 \end{cases}$$

Figura 1 – Representação gráfica das duas inequações



Fonte: Produzida pelo autor

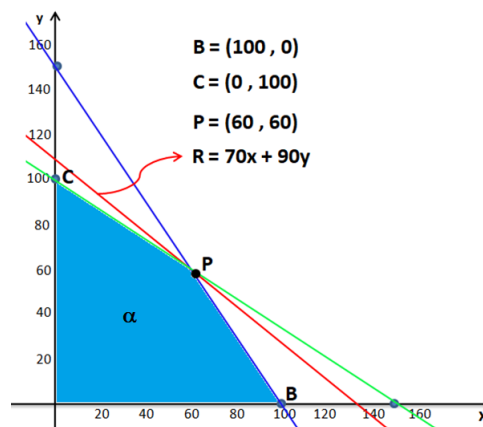
Essas inequações correspondem às regiões do plano, mostrada na Figura 1. O ponto P é a intersecção das retas  $2x + 3y = 300$  e  $3x + 2y = 300$ . Ele pode ser obtido pela resolução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 300 \\ 3x + 2y = 300 \end{cases}$$

Multiplicando a equação  $2x + 3y = 300$  por  $-1$  e somando o resultado com a equação  $3x + 2y = 300$ , obtém-se  $x = y$ . Substituindo em qualquer uma das duas equações anteriores, tem-se  $x = 60$  e  $y = 60$ . Assim  $P = (60, 60)$ .

A Região que satisfaz as duas inequações, bem como as condições  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  é mostrada na Figura 2. Os possíveis valores para  $x$  e  $y$  ficam restritos a essa região  $\alpha$ .

Figura 2 – Região com possíveis valores de  $x$  e  $y$



Fonte: Produzida pelo autor

É necessário saber quais os valores de  $x$  e  $y$ , dentro da região  $\alpha$ , fornece a receita máxima. De acordo com as condições do problema, a receita será dada por  $R = 70x + 90y$ . Fazendo-se variar o valor de  $R$ , obtém-se um feixe de retas paralelas. Como é possível observar na Figura 3. Observa-se que quanto maior o valor de  $R$ , mais a reta se afasta da origem.

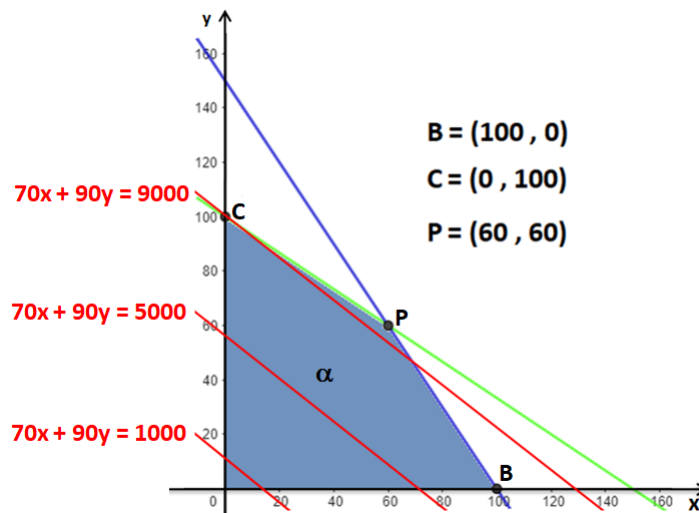
Pretende-se obter a receita máxima, o maior valor possível para  $R$ , de modo que existam valores de  $x$  e  $y$  na região  $\alpha$ , satisfazendo a equação  $R = 70x + 90y$ . Geometricamente, deseja-se o maior valor de  $R$  de modo que a reta determinada por  $R = 70x + 90y$  intercepte a região  $\alpha$ .

A região  $\alpha$  é limitada pelas retas  $r : 2x + 3y = 300$ ,  $s : 3x + 2y = 300$  e os eixos coordenados. A equação da reta que determina a receita máxima, intercepta a região  $\alpha$  em um dos vértices  $B(100, 0)$ ,  $P(60, 60)$ ,  $C(0, 100)$ , no lado  $CP$  ou no lado  $PB$ .

As declividades das três retas são:

- Reta que representa a receita máxima  $R = 70x + 90y$ ,  $m = -7/9$ .
- Reta que contém o lado  $CP$ , da região  $\alpha$ ,  $r : 2x + 3y = 300$ ,  $m_r = -2/3$ .
- Reta que contém o lado  $PB$ , da região  $\alpha$ ,  $s : 3x + 2y = 300$ ,  $m_s = -3/2$ .

Nota-se que  $m_s < m < m_r$ . As retas tem declividades diferentes, elas não são paralelas. Portanto a reta que representa a receita máxima não intercepta a região  $\alpha$  coincidindo nos lados

Figura 3 – Retas paralelas, variando-se o valor de R em  $70x + 90y = R$  na região  $\alpha$ 

Fonte: Produzida pelo autor

$CP$  ou  $PB$ . Nota-se na reta  $R = 70x + 90y$ , que  $R \geq 0$ , pois  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . Assim quanto mais afastada da origem ela estiver, maior o valor de  $R$ , como mostra a Figura 3. Deste modo a receita máxima será obtida quando esta reta estiver mais afastada da origem possível, porém dentro da região  $\alpha$ , e isto ocorre no ponto  $P = (60, 60)$ .

Desta forma, a receita máxima é obtida quando a reta  $R = 70x + 90y$  interceptar a região  $\alpha$  no ponto  $P = (60, 60)$ . Então a receita máxima será obtida substituindo  $x = 60$  e  $y = 60$  na equação  $R = 70x + 90y$ . Logo  $R = 70.60 + 90.60 \implies R = 4200 + 5400 \implies R = 9600$ .

A receita máxima será obtida com a formação de 60 pacotes do tipo A e 60 pacotes do tipo B, totalizando R\$ 9.600,00

### Exemplo 1.2. (DANTE, 2016)

Dois produtos, P e Q, contêm as vitaminas A, B e C nas quantidades indicadas no quadro abaixo. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com o menor custo?

	P	Q	
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
	3	2	

Tabela 1 – Vitaminas presentes nos produtos P e Q

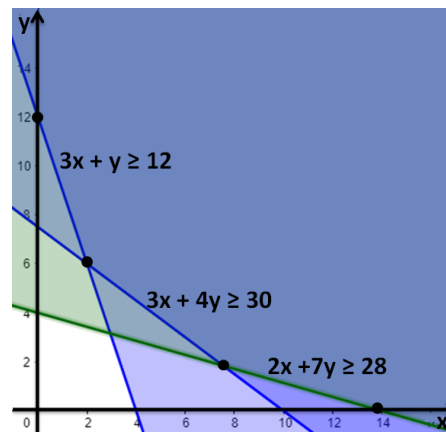
Solução:

Representando por  $x$  e  $y$  as quantidades dos produtos dos tipos **P** e **Q**, respectivamente, e de acordo com os dados fornecidos no enunciado, tem-se que a quantidade de vitamina **A** nos produtos é  $3x + y$ , a quantidade de vitamina **B** é  $3x + 4y$  e a quantidade de vitamina **C** é  $2x + 7y$ . Pelas informações dadas, essas quantidades são limitadas pelas inequações:

$$\begin{cases} 3x + y \geq 12 \\ 3x + 4y \geq 30 \\ 2x + 7y \geq 28 \end{cases}$$

Essas inequações correspondem às seguintes regiões do plano, mostrado na Figura 4.

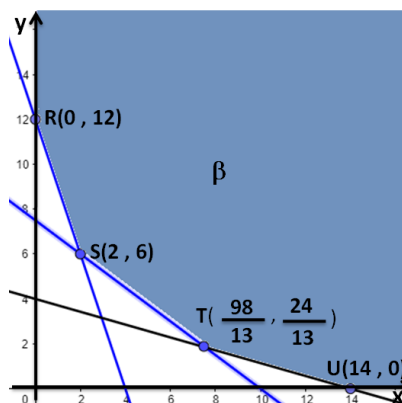
Figura 4 – Representação gráfica das três inequações



Fonte: Produzida pelo autor

A região que satisfaz as três inequações e as restrições  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  é mostrada na Figura 5. Os possíveis valores de  $x$  e  $y$  ficam restritos a essa região  $\beta$ .

Figura 5 – Região com possíveis valores de  $x$  e  $y$

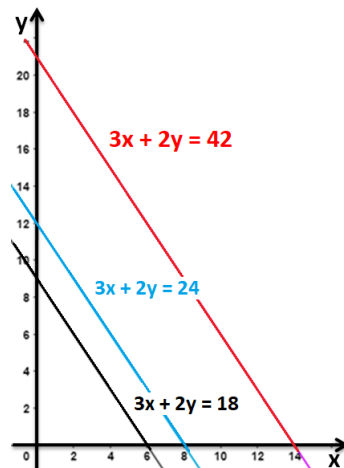


Fonte: Produzida pelo autor

Deseja-se saber quais valores de  $x$  e  $y$ , dentro da região  $\beta$ , fornece o custo mínimo. Analisando-se as informações do problema, o custo mínimo será dado por  $M = 3x + 2y$ .

Variando-se o valor de  $M$ , obtém-se um feixe de retas paralelas. Como é possível observar na Figura 6. Nota-se que  $M \geq 0$ , pois  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . Assim quanto maior o valor de  $M$ , mais a reta se afasta da origem.

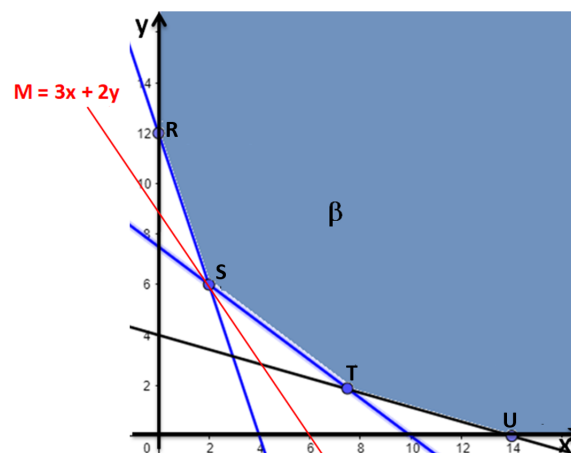
Figura 6 – Retas paralelas, variando-se o valor de  $M$  em  $3x + 2y = M$



Fonte: Produzida pelo autor

Pretende-se obter o custo mínimo, o menor valor possível para  $M$ , de tal modo que exista  $x$  e  $y$  na região  $\beta$ , satisfazendo a equação  $M = 3x + 2y$ . Geometricamente, deseja-se o menor valor de  $M$  de modo que a reta determinada por esta equação intercepte a região  $\beta$ . Assim a reta deve estar o mais próximo da origem possível, mas dentro da região  $\beta$ , como mostra Figura 7

Figura 7 – Reta que representa o custo mínimo na região  $\beta$ .



Fonte: Produzida pelo autor

Essa região é limitada pelas retas  $r : 3x + y = 12$ ,  $s : 3x + 4y = 30$  e  $t : 2x + 7y = 28$ .

A equação da reta que determina o custo mínimo, intercepta a região  $\beta$  em um dos pontos:  $R(0, 12)$ ,  $S(2, 6)$ ,  $T(\frac{98}{13}, \frac{24}{13})$  ou  $U(14, 0)$ , ou em um dos lados: RS, ST ou TU.

As declividades das retas são:

- Reta que representa o custo mínimo:  $M = 3x + 2y$ ,  $m = \frac{-3}{2}$ .
- Reta que contém o lado  $RS$  da região  $\beta$ ,  $r : 3x + y = 12$ ,  $m_r = -3$ .
- Reta que contém o lado  $ST$  da região  $\beta$ ,  $s : 3x + 4y = 30$ ,  $m_s = \frac{-3}{4}$ .
- Reta que contém o lado  $TU$  da região  $\beta$ ,  $t : 2x + 7y = 28$ ,  $m_t = \frac{-2}{7}$ .

Nota-se que para a reta que representa o custo mínimo interceptar a região  $\beta$  coincidindo com um dos lados RS, ST ou TU, ela teria de ser paralela a um desses lados, isto é, deveria ter o mesmo coeficiente angular. Logo a reta  $M = 3x + 2y$ , intercepta a região  $\beta$  em um de seus vértices R, S, T ou U.

Calculando-se o valor que  $M = 3x + 2y$  assume nos vértices, encontramos o custo mínimo.

Vértice	valor de $M = 3x + 2y$
(0,12)	$M = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 12 = 24$
(2,6)	$M = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18$
$(\frac{98}{13}, \frac{24}{13})$	$M = 3 \cdot \frac{98}{13} + 2 \cdot \frac{24}{13} = 26,3$
(14,0)	$M = 3 \cdot 14 + 2 \cdot 0 = 42$

Tabela 2 – Valores que a equação  $M = 3x + 2y$  assume nos vértices

De acordo com os resultados obtidos na tabela 2, Percebe-se que o valor mínimo de  $M = 3x + 2y$  ocorre no ponto  $S(2, 6)$ .

Desta forma a dieta sadia que tem custo mínimo, consiste em consumir 2 unidades do produto P e 6 unidades do produto Q.

Analisando-se a resposta encontrada com os dados fornecidos na Tabela 1, tem-se que na dieta sadia com custo mínimo será consumido 12 unidades da vitamina A, 30 unidades da vitamina B e 48 unidades da vitamina C. As vitaminas A e B serão consumidas na quantidade mínima necessária, já a vitamina C será consumida acima da quantidade mínima, pois  $48 > 28$ .





## 2 Desigualdade linear no plano

Este capítulo mostra como reconhecer a qual semiplano uma inequação linear está se referindo. Esta identificação é importante na resolução gráfica de problemas envolvendo a programação linear. Pois a solução deste tipo de situação está na região correspondente a interseção dos semiplanos representados pelas desigualdades lineares que modelam o problema.

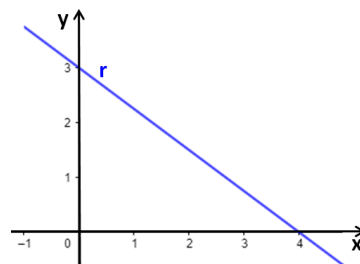
### 2.1 Representação gráfica de inequações lineares

A representação gráfica de uma equação do 1º grau com duas variáveis é uma reta. Segundo (LIMA, 2014), toda reta decompõe o plano em duas regiões, chamadas de semiplanos. Se a reta for representada por  $ax + by + c = 0$ , com  $a, b$  e  $c$  reais e  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ , os semiplanos por ela determinados são definidos pelas desigualdades:  $ax + by + c \geq 0$  e  $ax + by + c \leq 0$ .

Dada uma reta qualquer  $r : ax + by + c = 0$ , sendo  $a, b$  e  $c$  números reais com  $a$  e  $b$  não nulos simultaneamente, isto é,  $a^2 + b^2 \neq 0$ , pode-se saber qual dos semiplanos por ela determinado é  $ax + by + c \geq 0$  ou  $ax + by + c \leq 0$ . Basta tomar um ponto não pertencente à reta e substituir suas coordenadas na inequação. Se o resultado for verdadeiro, a inequação representa esse semiplano. (LIMA, 2002)

Por exemplo, para representar graficamente a inequação,  $3x + 4y - 12 \leq 0$ . Primeiro representa-se a reta  $r : 3x + 4y - 12 = 0$ . Ela intercepta o eixo das ordenadas quando  $x = 0$ , e o eixo das abscissas quando  $y = 0$ , ou seja, nos pontos  $(0, 3)$  e  $(4, 0)$ , conforme mostra a Figura 8.

Figura 8 – Representação da equação da reta no Plano Cartesiano

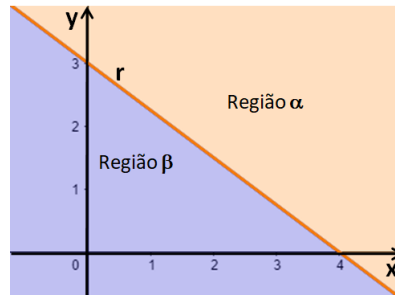


Fonte: Produzida pelo autor

Essa reta divide o plano em dois semiplanos, como mostra a Figura 9. Os semiplanos representados por  $3x + 4y - 12 \leq 0$  e  $3x + 4y - 12 \geq 0$

Tomando-se um ponto qualquer do plano e substituindo em uma das inequações, é possível saber a que semiplano ele pertence, para facilitar os cálculos, é comum tomar o ponto

Figura 9 – Representação dos dois semiplanos determinados pela reta



Fonte: Produzida pelo autor

$(0, 0)$ , neste exemplo ele pertence à região  $\beta$ . Substituindo na inequação  $3x + 4y - 12 \leq 0$ , tem-se:  $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 12 \leq 0$ , de fato  $-12 \leq 0$ . Assim essa inequação representa o semiplano que está na região  $\beta$  e  $3x + 4y - 12 \geq 0$ , o semiplano que está na região  $\alpha$ .

De acordo com (COSTA, 2022), outra forma de visualizar qual é a região que a inequação representa, é isolar uma das variáveis. Neste exemplo,  $3x + 4y - 12 \leq 0$ , isolando-se  $x$ , tem-se  $x \leq \frac{-4y}{3} + 4$ , representa a região que está à esquerda da reta  $r : 3x + 4y - 12 = 0$ , região  $\beta$ , Figura 9. Isolando-se  $y$ ,  $y \leq \frac{-3x}{4} + 3$ , região que está abaixo da reta  $r$ , região  $\beta$ , Figura 9.

Em um sistema com  $m$  desigualdades lineares, da forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \leq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 \leq 0 \\ \vdots \\ a_mx + b_my + c_m \leq 0 \end{cases}$$

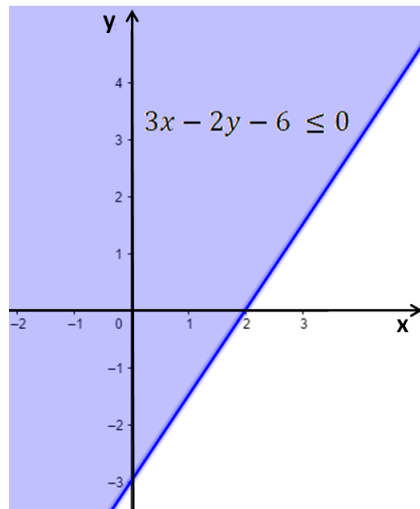
O conjunto de soluções é a interseção dos  $m$  semiplanos correspondentes as  $m$  inequações. A região que representa essa solução é convexa, podendo ser limitada ou não. (LIMA, 2002).

Tomando-se como exemplo o sistema de inequações:

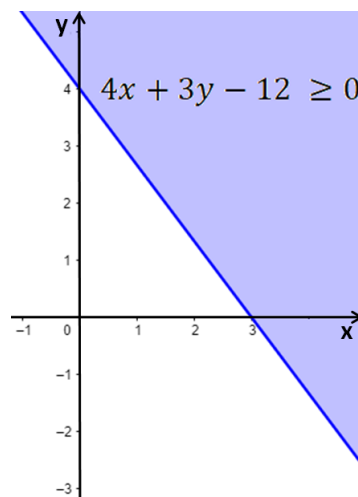
$$\begin{cases} 3x - 2y - 6 \leq 0 \\ 4x + 3y - 12 \geq 0 \end{cases}$$

A região que representa a solução da primeira inequação está destacada na Figura 10, percebe-se que é uma região ilimitada.

Da mesma forma, a região que representa a segunda inequação também é ilimitada, Figura 11

Figura 10 – Região que representa a inequação  $3x - 2y - 6 \leq 0$ 

Fonte: Produzida pelo autor

Figura 11 – Região que representa a inequação  $4x + 3y - 12 \geq 0$ 

Fonte: Produzida pelo autor

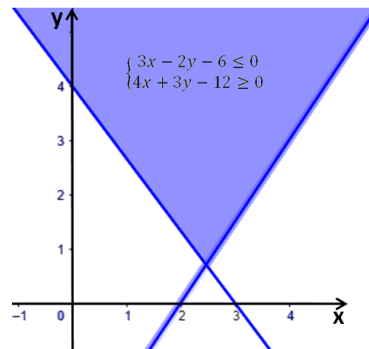
A interseção das regiões que representam as desigualdades  $3x - 2y - 6 \leq 0$  e  $4x + 3y - 12 \geq 0$  é o conjunto de soluções do sistema de inequações, também é uma região ilimitada, como mostra a Figura 12.

Acrescentando-se a inequação  $2x - 3y + 4 \geq 0$  ao sistema do exemplo, tem-se

$$\begin{cases} 3x - 2y - 6 \leq 0 \\ 4x + 3y - 12 \geq 0 \\ 2x - 3y + 4 \geq 0 \end{cases}$$

A região que representa a solução da primeira inequação está na Figura 10, e a região que corresponde a solução da segunda inequação, na Figura 11.

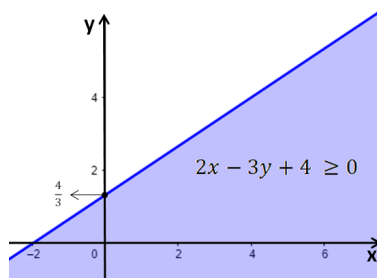
Figura 12 – Interseção das regiões que representam as inequações  $3x - 2y - 6 \leq 0$  e  $4x + 3y - 12 \geq 0$



Fonte: Produzida pelo autor

Já a região que destaca a solução da terceira inequação está na Figura 13.

Figura 13 – Região que representa a inequação  $2x - 3y + 4 \geq 0$



Fonte: Produzida pelo autor

O conjunto solução do sistema é a interseção dos três semiplanos correspondentes as três inequações, Figura 14.

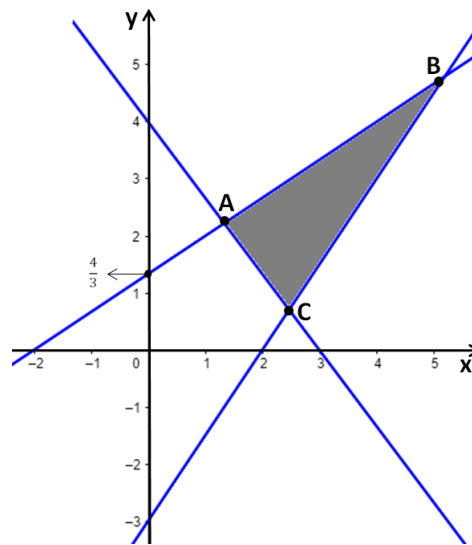
A solução do sistema corresponde à região limitada pelo triângulo ABC, qualquer ponto interno ao triângulo ou em sua fronteira é uma solução do sistema de inequações proposto.

## 2.2 Desigualdades lineares

**Definição 2.1.** (LIMA, 2014) Sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais com  $a$  e  $b$  não nulos simultaneamente, isto é,  $a^2 + b^2 \neq 0$ . A função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x, y) = ax + by$ .

Um ponto  $P(x, y)$  está no nível  $c$  em relação  $f$ , quando  $f(x, y) = c$ . Dessa forma os pontos do plano que está no nível  $c$  são representados pela reta  $ax + by = c$ . Esta reta é chamada de linha de nível da função  $f$ .

Figura 14 – Interseção das regiões que representam as inequações  $3x - 2y - 6 \leq 0$ ,  
 $4x + 3y - 12 \geq 0$  e  $2x - 3y + 4 \geq 0$



Fonte: Produzida pelo autor

Dada uma inequação  $ax + by > c$ , com  $a, b$  e  $c$  reais e  $a^2 + b^2 \neq 0$ . É possível saber quais pontos do plano satisfazem essa desigualdade.

Sendo  $f(x, y) = ax + by$ , a reta  $ax + by = c$  é a linha de nível  $c$  da função  $f$ . O nível zero de  $f$  está na origem, pois  $f(0, 0) = 0$ , e  $f(a, b) = a^2 + b^2 > 0$ . Assim o ponto  $P(a, b)$  está no nível positivo de  $f$ . Desse modo quando se percorre o segmento  $OP$ , no sentido de  $O$  para  $P$ , os números  $c$  da reta vão crescendo, tornando possível distinguir os semiplanos  $ax + by < c$  e  $ax + by > c$ .

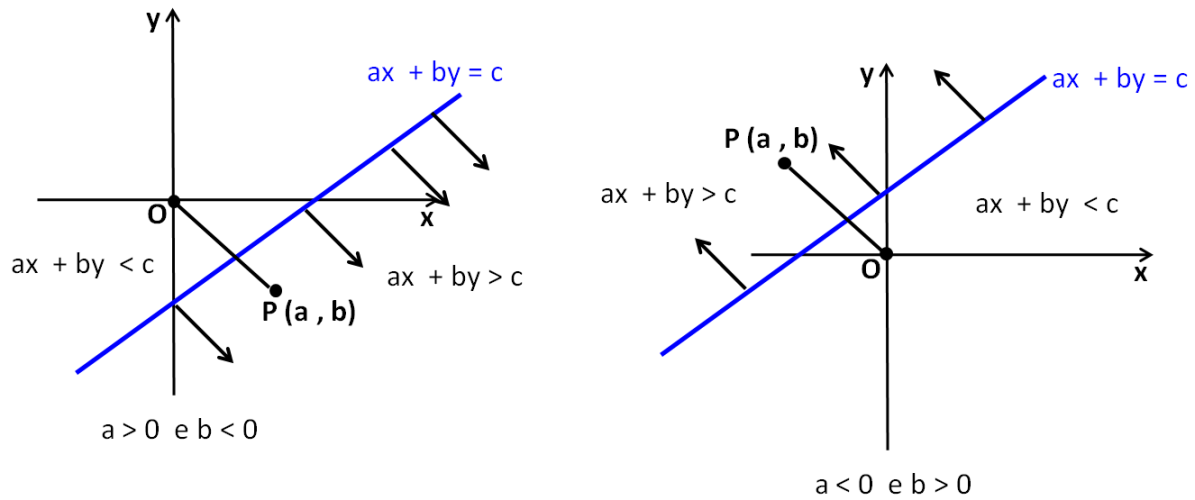
**Exemplo 2.2.** Sendo  $ax + by = c$ , com  $a, b$  e  $c$  reais não nulos e  $c > 0$ . Determinar a região do plano que satisfazem a:  $ax + by < c$ ,  $ax + by = c$  e  $ax + by > c$ . Considerando duas situações  $a \cdot b > 0$  e  $a \cdot b < 0$ .

Nos dois casos, representa-se primeiro a reta  $ax + by = c$  no Plano Cartesiano. Depois localiza-se o ponto  $P(a, b)$  e o segmento orientado  $OP$ . A reta  $ax + by = c$  separa os dois semiplanos, no sentido de  $O$  para  $P$ , tem-se  $ax + by > c$  e no sentido oposto,  $ax + by < c$ . (Figura 15 e 16).

Nota-se que considerando  $c = 0$  ou  $c < 0$ , em cada um dos casos vistos no Exemplo 2.2, o segmento orientado  $OP$  não muda de sentido, e assim os semiplanos  $ax + by > c$  e  $ax + by < c$  permanecem do mesmo lado em relação à reta  $ax + by = c$ .

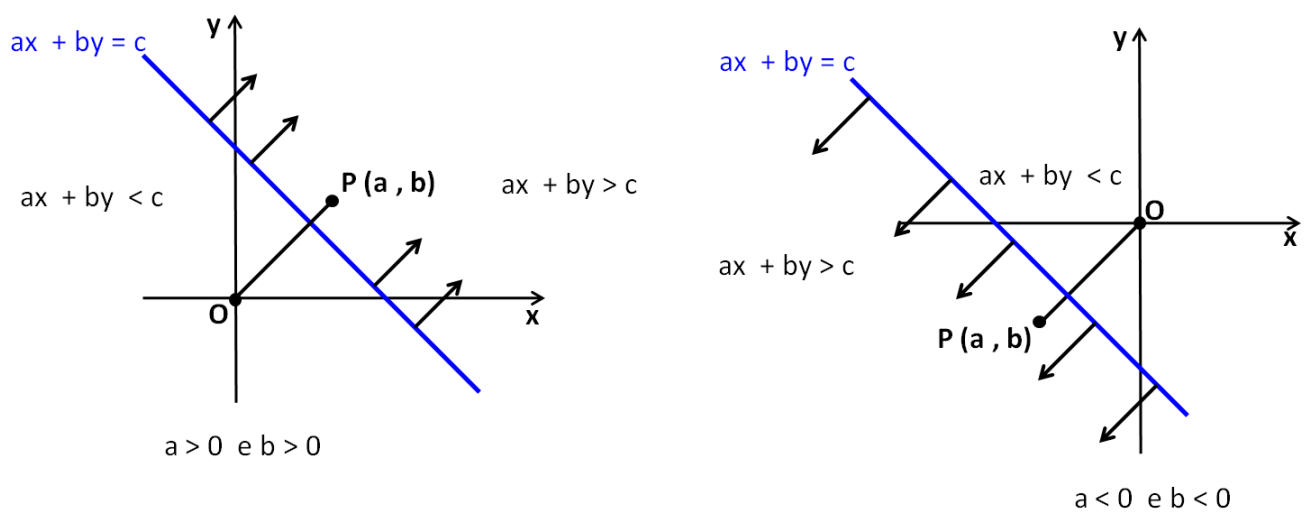
Também é possível notar que se  $a = 0$  ou  $b = 0$ , o segmento orientado  $OP$  ficará sobre um dos eixos coordenados. Da mesma forma a reta  $ax + by = c$  separará os dois semiplanos e no sentido de  $O$  para  $P$ , será  $ax + by > c$  e no sentido oposto,  $ax + by < c$ .

Figura 15 – Representação de  $ax + by > c$  e  $ax + by < c$  com  $a \cdot b < 0$  e  $c > 0$



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 16 – Representação de  $ax + by > c$  e  $ax + by < c$  com  $a \cdot b > 0$  e  $c > 0$



Fonte: Produzida pelo autor

# 3 Teorema Fundamental da Programação Linear

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições como: Conjunto compacto, conjunto convexo, função contínua, máximos e mínimos em um conjunto compacto. Será apresentada a solução de dois problemas de otimização usando esses conceitos.

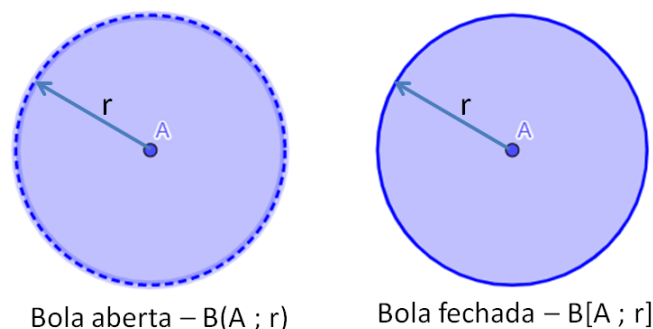
Apesar de ser possível resolver um problema de programação linear sem essas ideias, elas são importantes para uma melhor compreensão da demonstração do teorema fundamental da programação linear e serve de base aos estudantes que desejam aprofundar seus conhecimentos em matemática.

## 3.1 Conjunto fechado, limitado e convexo no plano

**Definição 3.1.** (LEITHOLD, 1994) Sendo  $A$  um ponto em  $\mathbb{R}^2$  e  $r$  um número real positivo, a bola aberta de centro em  $A$  e raio  $r$  é o conjunto  $B(A;r)$ , formado por todos os pontos  $P \in \mathbb{R}^2$ , tais que a distância ao ponto  $A$  é menor que  $r$ .

**Definição 3.2.** (LEITHOLD, 1994) Sendo  $A$  um ponto em  $\mathbb{R}^2$  e  $r$  um número real positivo, a bola fechada de centro em  $A$  e raio  $r$  é o conjunto  $B[A;r]$ , formado por todos os pontos  $P \in \mathbb{R}^2$ , tais que a distância ao ponto  $A$  é menor ou igual a  $r$ .

Figura 17 – Exemplo de bola aberta e bola fechada

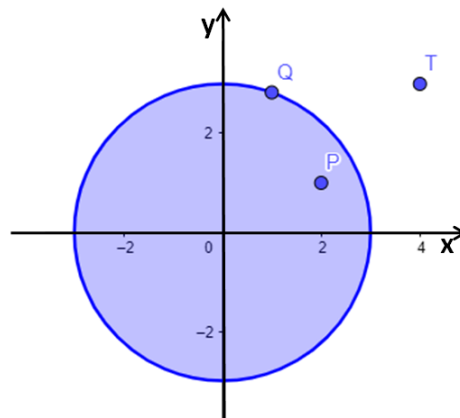


Fonte: Produzida pelo autor

**Definição 3.3.** (LIMA, 2004) Seja  $A \in X \subset \mathbb{R}^2$ . O ponto  $A$  é interior ao conjunto  $X$  quando, para algum  $r$  positivo, tem-se  $B(A;r) \subset X$ . Todos os pontos suficientemente próximos de  $A$  ainda pertencem ao conjunto  $X$ . O conjunto dos pontos interiores a  $X$  são indicados por  $\text{int}X$

**Exemplo 3.4.** Seja  $\mathbf{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 9\}$  o círculo de centro  $(0, 0)$  e raio 3. O ponto  $\mathbf{P} = (2, 1)$  é um ponto interior de  $\mathbf{X}$ . Já os pontos  $\mathbf{Q} = (1, 2\sqrt{2})$  e  $\mathbf{T} = (4, 3)$  não são pontos interiores ao conjunto  $\mathbf{X}$ . (Figura 18).

Figura 18 – Exemplo de pontos interiores e não interiores



Fonte: Produzida pelo autor

**Definição 3.5.** (LIMA, 2004) Sendo  $\mathbf{X}$  um conjunto contido em  $\mathbb{R}^2$ , os pontos de  $\mathbf{X}$  que não são interiores a  $\mathbf{X}$  nem interiores ao conjunto  $\mathbb{R}^2 - \mathbf{X}$ , são chamados de pontos da fronteira de  $\mathbf{X}$  e indica-se por:  $\text{fr.}\mathbf{X}$ .

**Definição 3.6.** Sendo  $\mathbf{X}$  um conjunto contido em  $\mathbb{R}^2$ , Chama-se pontos exteriores a  $\mathbf{X}$ , os pontos que não estão no interior nem na fronteira de  $\mathbf{X}$ . Esses pontos são indicados por  $\text{ext.}\mathbf{X} = \text{int.}(\mathbb{R}^2 - \mathbf{X})$

**Exemplo 3.7.** Seja  $\mathbf{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq r^2\}$  o círculo de centro  $(0, 0)$  e raio  $r$ . Os pontos interiores são  $\text{int.}\mathbf{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < r^2\}$ . (Figura 19a).

Os pontos da fronteira são  $\text{fr.}\mathbf{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = r^2\}$ . (Figura 19b).

Já os pontos exteriores,  $\text{ext.}\mathbf{X}$ , são os pontos que pertencem ao conjunto  $\mathbb{R}^2 - \mathbf{X}$ . (Figura 19c).

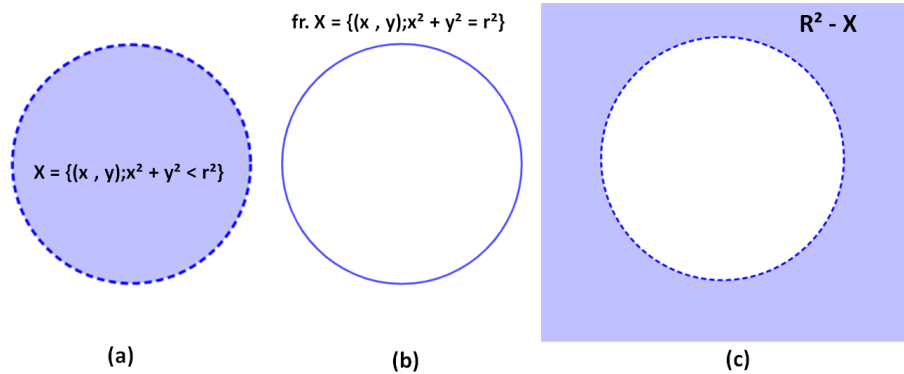
Segundo (STEWART, 2013), da mesma forma que os intervalos fechados contêm suas extremidades, um conjunto fechado no plano contém todos seus pontos da fronteira. Por exemplo, o disco  $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$  é um conjunto fechado, pois contém todos os pontos que estão sobre a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$ .(Figura 20).

No entanto se qualquer ponto da fronteira for omitido, o conjunto não será fechado, conforme mostrado na Figura 21.

Um conjunto é chamado de limitado no plano, quando está contido em uma bola aberta.(STEWART, 2013).

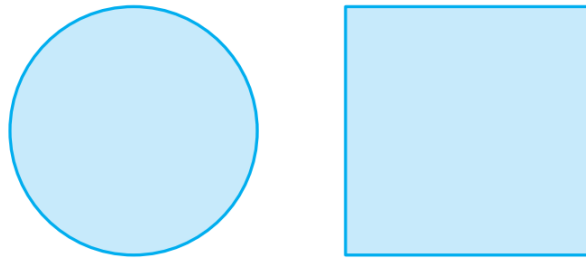


Figura 19 – Exemplo de pontos interiores, na fronteira e exteriores



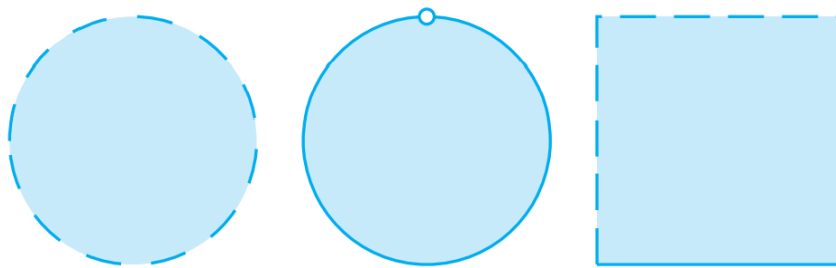
Fonte: Produzida pelo autor

Figura 20 – Exemplos de conjuntos fechados



Fonte:(STEWART, 2013, p. 854)

Figura 21 – Exemplos de conjuntos que não são fechados

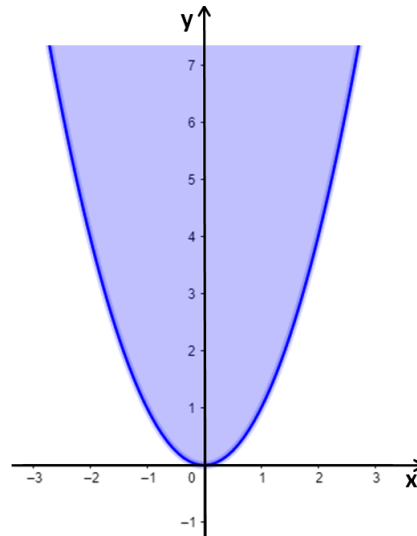


Fonte:(STEWART, 2013, p. 854)

**Definição 3.8.** (GUIDORIZZI, 2014) Quando um conjunto é fechado e limitado, ele é chamado de compacto.

**Exemplo 3.9.** (GUIDORIZZI, 2014). O conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$  é um conjunto fechado, porém não é um conjunto limitado, logo ele não é um conjunto compacto.(Figura 22).

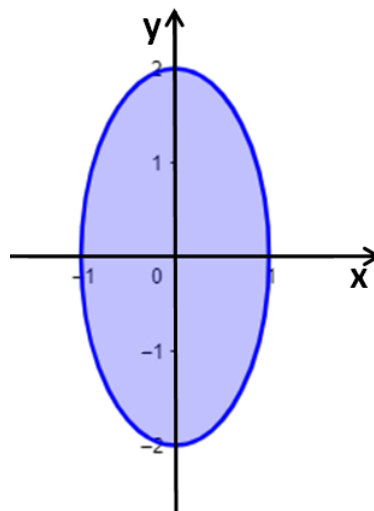
Figura 22 – Conjunto fechado, mas não limitado  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$



Fonte: Produzida pelo autor

**Exemplo 3.10.** O conjunto  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 4\}$  é um conjunto limitado e fechado, portanto ele é compacto. (Figura 23).

Figura 23 – Conjunto fechado e limitado  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 4\}$



Fonte: Produzida pelo autor

Segundo (LIMA, 2004), Toda bola fechada  $B[A; r]$  é um conjunto compacto, no entanto nenhuma bola aberta  $B(A; r)$  é um conjunto compacto.

**Definição 3.11.** (BOLDRINI et al., 1980)

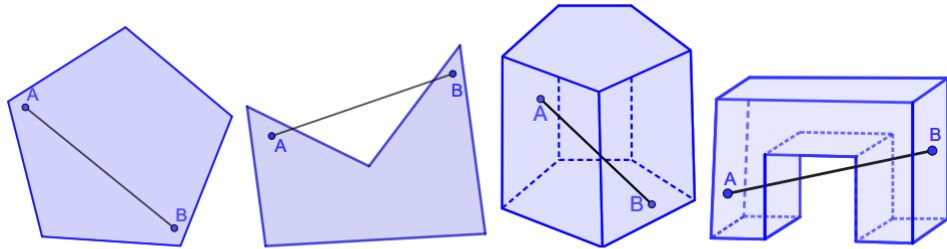
Sendo  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  dois pontos do  $\mathbb{R}^n$ . O Segmento de extremos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  é o conjunto  $\mathbf{AB}$  de pontos do  $\mathbb{R}^n$ , dado por :

$$\mathbf{AB} = \{(1 - t)\mathbf{A} + t\mathbf{B}; 0 \leq t \leq 1\}$$

**Definição 3.12.** (BOLDRINI et al., 1980)

Um subconjunto  $X$  do  $\mathbb{R}^n$  é chamado **convexo** se para quaisquer dois pontos  $A$  e  $B$  de  $X$ , o segmento  $AB$  está inteiramente em  $X$ .

Figura 24 – Exemplo de região convexa e não convexa



(a) Convexo do  $\mathbb{R}^2$  (b) Não convexo do  $\mathbb{R}^2$  (c) Convexo do  $\mathbb{R}^3$  (d) Não convexo do  $\mathbb{R}^3$

Fonte: (PEREIRA, 2020, p. 29)

## 3.2 Máximos e mínimos em um conjunto compacto

**Definição 3.13.** (THOMAS, 2012) Um ponto interior do domínio de uma função  $f(x,y)$  onde a derivada parcial em relação a  $x$ ,  $f_x$ , com a derivada parcial em relação a  $y$ ,  $f_y$ , sejam zero ou onde  $f_x$  ou  $f_y$  não existam é um **ponto crítico de  $f$** .

**Definição 3.14.** (LEITHOLD, 1994) Supondo que  $f$  seja uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ , e  $A$  um ponto do  $\mathbb{R}^2$ . Sendo  $A = (x_0, y_0)$ , a função  $f$  é chamada de contínua em um ponto  $A$  se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

- $f(x_0, y_0)$  existe;
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$  existe;
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ .

Se uma dessas condições não forem verificadas no ponto  $A$ , a função  $f$  será **descontínua** em  $A$ .

**Teorema 3.15.** (Weierstrass). *Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função contínua e  $A$  um conjunto compacto. Então existem pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  em  $A$  tais que, para todo  $(x, y)$  em  $A$ ,*

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2).$$

O Teorema de Weierstrass garante que se  $f$  for contínua em um conjunto compacto  $A$ , então  $f$  assumirá em  $A$  valor máximo e valor mínimo.

O problema, a partir daqui, é determinar os pontos onde  $f$  assume valor máximo e valor mínimo. Supondo que  $f$  tenha derivadas parciais nos pontos interiores de  $A$ , os únicos com possibilidade de serem extremantes são os pontos críticos. (GUIDORIZZI, 2014).

Segundo(STEWART, 2013), para se determinar os valores extremos absolutos de uma função contínua  $f$  em um conjunto compacto  $A$ . Proceda-se da seguinte forma:

- Determina-se os valores de  $f$  nos pontos críticos de  $f$  no interior de  $A$
- Determina-se os valores máximos e mínimos de  $f$  na fronteira de  $A$ .
- O maior desses valores será o valor máximo de  $f$  em  $A$  e o menor desses valores será o valor mínimo de  $f$  em  $A$ .

**Exemplo 3.16.** (STEWART, 2013) Determinar os valores máximos e mínimos absolutos da função  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$  no conjunto  $A$ , sendo  $A$  a região triangular fechada de vértices  $(2,0)$ ,  $(0,2)$  e  $(0,-2)$ .

Como a função  $f$  é uma função polinomial, então ela é contínua no conjunto compacto  $A$  e o Teorema de Weierstrass garante que existem máximo e mínimo absoluto.

1. Cálculo dos pontos críticos:  $f_x = 2x - 2$  e  $f_y = 2y$

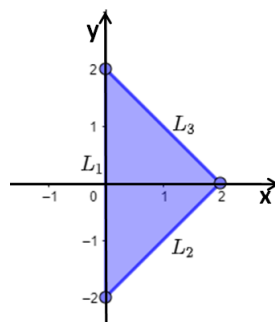
Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Obtém-se  $x = 1$  e  $y = 0$ . Logo o único ponto crítico existente é  $(1,0)$ . Neste ponto o valor de  $f$  é  $f(1,0) = 1^2 + 0^2 - 2.1 = 1 - 2 = -1$

2. Cálculo dos valores de  $f$  na fronteira de  $A$ , que é constituída por três segmentos de retas (Figura 25)

Figura 25 – Região triangular fechada com vértices nos pontos  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  e  $(0, -2)$



Fonte: Produzida pelo autor

a) Para o segmento de reta  $L_1$ ,  $x = 0$  e  $f(0, y) = y^2$  com  $-2 \leq y \leq 2$ , a função quadrática atinge seu valor mínimo em  $y = 0$  e  $f(0, 0) = 0$ . Já seu valor máximo é atingido em  $y = \pm 2$  e  $f(0, \pm 2) = 4$

b) Para o segmento  $L_2$ ,  $y = x - 2$  e  $0 \leq x \leq 2$ .

$$f(x, y) = f(x, x - 2) = x^2 + (x - 2)^2 - 2x = 2x^2 - 6x + 4$$

$$\Rightarrow f(x, x - 2) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

A função quadrática atinge seu valor mínimo em  $x = \frac{3}{2}$ . Assim  $f(x, x - 2) = f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ . O Valor máximo é atingido em  $x = 0$  e  $f(x, x - 2) = f(0, -2) = 4$

c) Para o segmento  $L_3$ ,  $y = 2 - x$  e  $0 \leq x \leq 2$ .

$$f(x, y) = f(x, 2 - x) = x^2 + (2 - x)^2 - 2x = 2x^2 - 6x + 4$$

$$\Rightarrow f(x, 2 - x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

A função atinge seu valor mínimo em  $x = \frac{3}{2}$

Assim  $f(x, 2 - x) = f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ .

O Valor máximo é atingido em  $x = 0$  e  $f(x, 2 - x) = f(0, 2) = 4$

3. Comparando os valores que  $\mathbf{f}$  obtém em cada segmento com o valor encontrado no ponto crítico, pode-se concluir que o valor máximo absoluto de  $\mathbf{f}$  em  $\mathbf{A}$  é  $f(0, \pm 2) = 4$  e valor mínimo absoluto é  $f(1, 0) = -1$ .

**Exemplo 3.17.** (GUIDORIZZI, 2014) Determinar o valor máximo e mínimo de  $\mathbf{f}(x, y) = x + 5y$  em  $\mathbf{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x + 6y \leq 30, 3x + 2y \leq 12, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ .

Como a função  $\mathbf{f}$  é contínua em  $\mathbf{D}$ , pelo Teorema de Weierstrass, ela tem valor máximo e valor mínimo em  $\mathbf{D}$ .

1. Cálculo dos pontos críticos: Percebe-se que  $\mathbf{f}$  não tem ponto crítico, pois  $f_x = 1$  e  $f_y = 5$  as duas derivadas parciais existem e são diferente de zero. (Definição 3.13).
2. Cálculo dos valores de  $\mathbf{f}$  na fronteira: Ela é constituída por quatro segmentos de reta (Figura 26)

a) Para o segmento  $L_1$ ,  $x = 0$  e  $f(0, y) = 5y$ , com  $0 \leq y \leq 5$ .

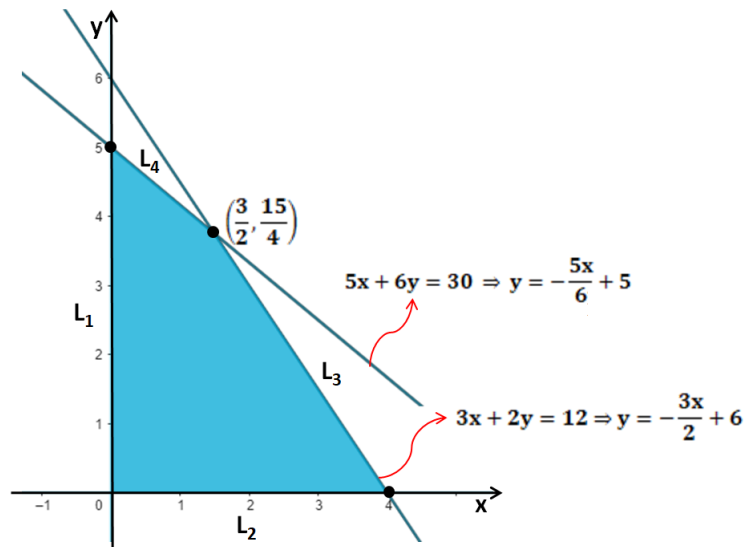
A função atinge seu valor mínimo em  $y = 0$  e  $f(0, 0) = 0$ .

Já o valor máximo é atingido quando  $y = 5$  e  $f(0, 5) = 25$ .

b) Para o segmento  $L_2$ ,  $y = 0$  e  $f(x, 0) = x$ , com  $0 \leq x \leq 4$ .

A função atinge seu valor mínimo em  $x = 0$  e  $f(0, 0) = 0$

Seu valor máximo é atingido em  $x = 4$  e  $f(4, 0) = 4$ .

Figura 26 – Região formada por  $5x + 6y \leq 30$ ,  $3x + 2y \leq 12$ ,  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ 

Fonte: Produzida pelo autor

c) Para o segmento  $L_3$ ,  $y = -\frac{3x}{2} + 6$  e  $\frac{3}{2} \leq x \leq 4$ .

$$f(x, y) = f(x, -\frac{3x}{2} + 6)$$

$$f(x, -\frac{3x}{2} + 6) = x + 5 \cdot (-\frac{3x}{2} + 6)$$

$$f(x, -\frac{3x}{2} + 6) = x - \frac{15x}{2} + 30$$

$$f(x, -\frac{3x}{2} + 6) = -\frac{13x}{2} + 30$$

$$f(x, -\frac{3x}{2} + 6) = -\frac{13}{2}(x - \frac{60}{13})$$

A função atinge seu valor máximo em  $x = \frac{3}{2}$  e  $f(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}) = \frac{81}{4}$

Enquanto seu valor mínimo é atingido em  $x = 4$  e  $f(4, 0) = 4$

d) Para o segmento  $L_4$ ,  $y = -\frac{5x}{6} + 5$  e  $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ .

$$f(x, y) = f(x, -\frac{5x}{6} + 5)$$

$$f(x, -\frac{5x}{6} + 5) = x + 5 \cdot (-\frac{5x}{6} + 5)$$

$$f(x, -\frac{5x}{6} + 5) = x - \frac{25x}{6} + 25$$

$$f(x, -\frac{5x}{6} + 5) = -\frac{19x}{6} + 25$$

$$f(x, -\frac{5x}{6} + 5) = -\frac{19}{6}(x - \frac{150}{19})$$

A função atinge seu valor máximo em  $x = 0$  e  $f(0, 5) = 25$ .

Já seu valor mínimo é alcançado em  $x = \frac{3}{2}$  e  $f(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}) = \frac{81}{4}$

3. Comparando os resultados, percebe-se que os valores máximo e mínimo foram alcançados nos vértices de **D**.

Valor máximo no ponto  $(0, 5)$  igual a 25

Valor mínimo no ponto  $(0, 0)$  igual a 0

### 3.3 Teorema Fundamental

Os dois lemas apresentados a seguir são importantes para a demonstração do Teorema Fundamental da Programação Linear. Eles podem ser encontrados em (BOLDRINI et al., 1980) e em (PEREIRA, 2020).

**Lema 3.18.** *Seja  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + b$ , com  $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$  e seja  $\mathbf{P}$  um ponto interior do segmento  $\mathbf{AB} \subset \Omega$  do  $\mathbb{R}^2$ , isto é,  $P = \lambda A + (1 - \lambda)B$ ,  $0 < \lambda < 1$ . Então tem-se  $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$  ou  $f(B) \leq f(P) \leq f(A)$ .*

*Demonstração.* Fazendo  $f(x) = L(x) + b$ , onde  $L(x) = L(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$  é linear, e como  $P = \lambda A + (1 - \lambda)B$  então  $f(P) = L(P) + b \Rightarrow f(P) = L(\lambda A + (1 - \lambda)B) + b \Rightarrow f(P) = \lambda L(A) + (1 - \lambda)L(B) + b$ .

Sem perda de generalidades, supondo  $f(A) \leq f(B) \Rightarrow L(A) \leq L(B)$

Como  $f(P) = \lambda L(A) + (1 - \lambda)L(B) + b$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \lambda L(A) + (1 - \lambda)L(A) + b &\leq f(P) \leq \lambda L(B) + (1 - \lambda)L(B) + b \\ \lambda L(A) + L(A) - \lambda L(A) + b &\leq f(P) \leq L(B) + L(B) - \lambda L(B) + b \\ L(A) + b &\leq f(P) \leq L(B) + b \\ f(A) &\leq f(P) \leq f(B) \end{aligned}$$

Da mesma forma, tomando-se  $f(B) \leq f(A)$  mostra-se que  $f(B) \leq f(P) \leq f(A)$  □

**Lema 3.19.** *Seja  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + b$ , com  $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ . Se dentre os valores que  $f$  assumir num segmento  $\mathbf{AB}$  do  $\mathbb{R}^2$ , o valor máximo(mínimo) for assumido num ponto  $\mathbf{P}$  interior deste segmento, então  $f$  será constante em  $\mathbf{AB}$ .*

*Demonstração.* Sem perda de generalidades, supondo  $f(A) \leq f(B)$ , pelo Lema 3.18 implica que  $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$ .

- Caso  $f(\mathbf{P})$  seja máximo, então  $f(P) \geq f(B)$ . Como por hipótese  $f(A) \leq f(B)$  e pelo lema 3.18  $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$ , tem-se  $f(P) = f(B)$ . Sendo  $\mathbf{P}$  um ponto interior do segmento  $\mathbf{AB}$ , conclui-se que  $f$  é constante em  $\mathbf{AB}$ .
- Caso  $f(\mathbf{P})$  seja mínimo, então  $f(P) \leq f(A)$ . Como por hipótese  $f(A) \leq f(B)$  e pelo lema 3.18  $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$ , tem-se  $f(P) = f(A)$ . Sendo  $\mathbf{P}$  um ponto interior do segmento  $\mathbf{AB}$ , conclui-se que  $f$  é constante em  $\mathbf{AB}$ .
- Nos dois casos,  $f$  é constante em  $\mathbf{AB}$ . Considerando  $f(B) \leq f(A)$  a demonstração é semelhante. □

Segundo (BOLDRINI et al., 1980) analisando os lemas 3.18 e 3.19 e a natureza de uma região convexa, pode-se enunciar o Teorema a seguir.

**Teorema 3.20. (Teorema Fundamental da Programação Linear)**

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida na região convexa  $D$  do  $\mathbb{R}^2$  por  $f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + b$ , com  $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ . Suponha que  $f$  assumo valor máximo(mínimo) nesta região. Então, se  $D$  possui vértice(s), o valor máximo(mínimo) será assumido num vértice.

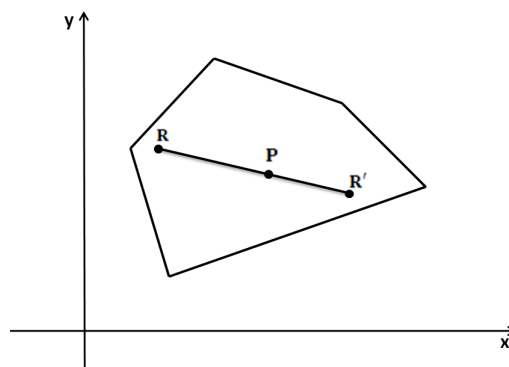
*Demonstração.* Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Supondo que o valor máximo(mínimo) de  $f$  seja assumido em um ponto  $P$  de  $D$ , considerando todas as regiões convexas possíveis do  $\mathbb{R}^2$ , as possibilidades são:

1.  $P$  é um vértice. (Neste caso o Teorema já está provado).
2.  $P$  está numa aresta. Do lema 3.19,  $f$  assumirá este valor máximo(mínimo) em toda aresta. Como a região  $D$  possui vértice(s) esta aresta conterá um vértice  $V$  obrigatoriamente. Logo,  $f(P) = f(V)$ .
3.  $P$  está no interior de  $D$ . Neste caso,  $f$  será constante na região  $D$ .

De fato, seja  $R$  um outro ponto no interior da região  $D$ , Figura 27. Como  $D$  é uma região convexa, o segmento  $RP$  está contido em  $D$ . Como  $P$  é interior a região  $D$ , pode-se considerar um prolongamento  $RR'$  ainda contido em  $D$ , passando por  $P$ . Do Lema 3.19 tem-se que  $f$  é constante em  $RR'$  e assim  $f(P) = f(R)$ .

□

Figura 27 – Ponto máximo(mínimo) no interior de uma região convexa  $D$



Fonte: Produzida pelo autor



## 4 Programação Linear via GeoGebra

Este capítulo apresenta o software GeoGebra e com ele resolve dois problemas de programação linear. Será feita a modelagem da situação-problema em seguida mostrado passo a passo como resolvê-lo usando o GeoGebra. Essas resoluções podem ser tomadas como base para a construção de uma sequência didática aplicável no ensino médio.

### 4.1 O que é o GeoGebra

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica muito popular. O nome vem da junção das palavras geometria e álgebra. Ele é um software livre e está disponível no site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). É possível usá-lo diretamente na plataforma, sem a necessidade de instalar no computador ou baixar a versão para desktop, há também versão para dispositivo móvel, tablet e celular.

Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula em todos os níveis de ensino. O projeto foi iniciado na Universidade de Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Universidade Atlântica da Flórida, além de ser traduzido para inúmeros países, incluindo o Brasil. (BASNIAK; ESTEVAM, 2014, p. 53)

Usando o GeoGebra é possível construir pontos, segmentos de retas, polígonos, circunferência, trabalhar com coordenadas, equações e inequações representadas no plano cartesiano. Também é possível fazer alterações nos objetos depois de prontos, com os resultados percebidos dinamicamente, pode-se inclusive animar os objetos construídos, através de parâmetros predefinidos. Realmente, ele é um software para todos os níveis do ensino.

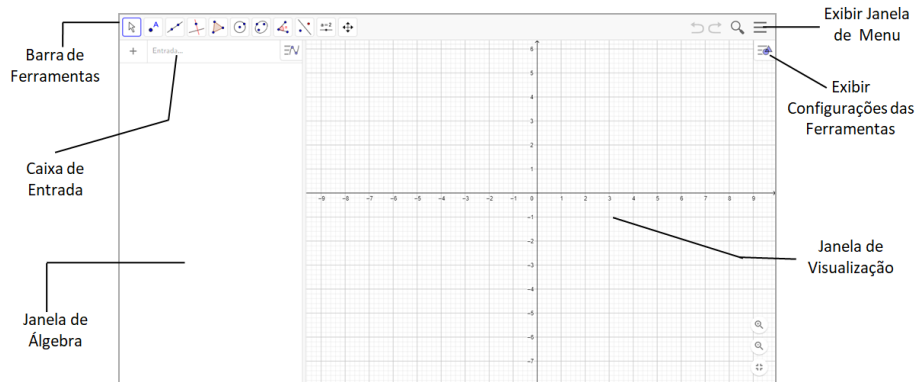
### 4.2 Conhecendo as ferramentas do GeoGebra

Neste trabalho está sendo usando o GeoGebra Classic 6. A Interface deste software é bem intuitiva. Logo que aberto aparecem a barra de ferramentas, a caixa de entrada, a janela de álgebra e a janela de visualização, como mostra a Figura 28.

Na Barra de Ferramentas aparecem os ícones padrões correspondente a cada uma das onze ferramentas. Cada ícone tem uma função conforme Figura 29.

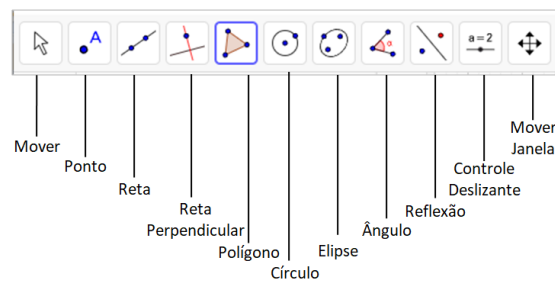
Quando se clica em qualquer um desses botões, abre-se uma janela com outras ferramentas associadas, passando-se o mouse sobre elas é mostrado automaticamente qual é a sua função.

Figura 28 – Interface do GeoGebra Classic 6



Fonte: Produzida pelo autor

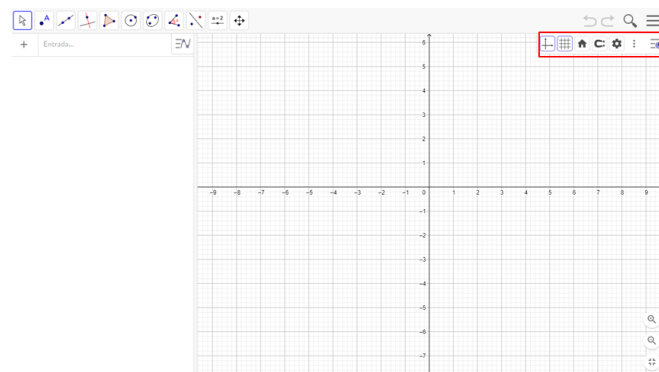
Figura 29 – Barra de Ferramentas do GeoGebra Classic 6



Fonte: Produzida pelo autor

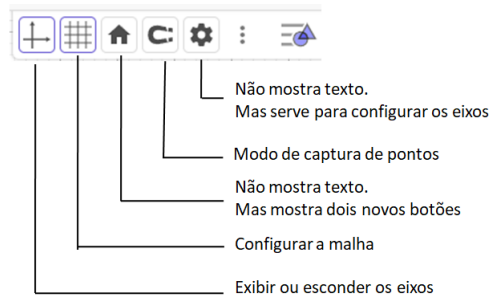
Clicando-se no botão exibir configurações das ferramentas, mostrado na Figura 28, abre-se uma barra com mais cinco botões. Eles configuram a ferramenta que estiver ativa na barra de ferramentas. A Figura 30 mostra o que aparece nesses botões quando a ferramenta Mover está ativa.

Figura 30 – Configurações das Ferramentas



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 31 – Botões de Configurações das Ferramentas



Fonte: Produzida pelo autor

Ao passar o mouse sobre esses botões, alguns deles mostram um texto dizendo o que ele faz, conforme mostra a Figura 31.

### 4.3 Resolução de problemas de programação linear com duas variáveis usando o GeoGebra

Para (LINS; CALÔBA, 2006) A resolução de um problema de Programação Linear consiste na representação matemática do problema, resolução e validação dos resultados.

A modelagem matemática do problema é a etapa básica, onde são definidas as variáveis que representam o problema bem como suas restrições e o que se pretende atingir. Segundo (TAHA, 2008). A modelagem dos problemas de programação linear tem três componentes essenciais.

- Variáveis de decisão: são as variáveis relevantes ao problema.
- Função Objetivo (meta): função que será otimizada, isto é, maximizada ou minimizada.
- Restrições que a solução deve satisfazer.

A autora (CUNHA, 2017) apresenta um modelo geral para resolução de um problema de Programação Linear.

$$\text{maximizar(ou minimizar)} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (4.1)$$

Sujeito a

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \{ \geq, =, \leq \} b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (4.2)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.3)$$

- $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$  são as variáveis de decisão.
- A equação (4.1) é denominada de função objetivo, é a função a ser maximizada (ou minimizada).
- $c_j, a_{ij}$  e  $b_i (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$  são constantes e devem ser conhecidas.
- Um problema descrito dessa forma é chamado de um problema de programação linear com **n variáveis** e **m restrições**. As restrições do tipo (4.3) são chamadas de **restrições de não negatividade**.

Usando-se o GeoGebra é possível resolver um problema de Programação Linear com duas variáveis de forma bem prática.

**Exemplo 4.1.** (BUENO, 2007)

Um marceneiro produz mesas e cadeiras. Para cada cadeira produzida usa-se  $1m^2$  de madeira, enquanto que, para cada mesa, usa-se  $3m^2$ . O estoque diário do fabricante é de  $45m^2$  de madeira. Além disso, cada cadeira necessita de 1 hora de trabalho, enquanto cada mesa necessita de 5 horas para fabricação. O total de horas diárias trabalhadas nas linhas de produção dessa empresa é de 20 horas. Segundo levantamentos feitos nos últimos meses, raramente se vende mais do que 15 cadeiras por dia. Considerando que o preço de venda da cadeira é de R\$ 20,00 e o preço da mesa é de R\$ 40,00, quanto se deve produzir diariamente de cada produto para se obter o máximo lucro possível?

Representando-se as variáveis de decisão cadeiras e mesas por  $x$  e  $y$  respectivamente. Tem-se o seguinte modelo para o problema.

Maximizar  $z = 20x + 40y$

Sujeito a :

$$1x + 5y \leq 20$$

$$1x + 3y \leq 45$$

$$1x \leq 15$$

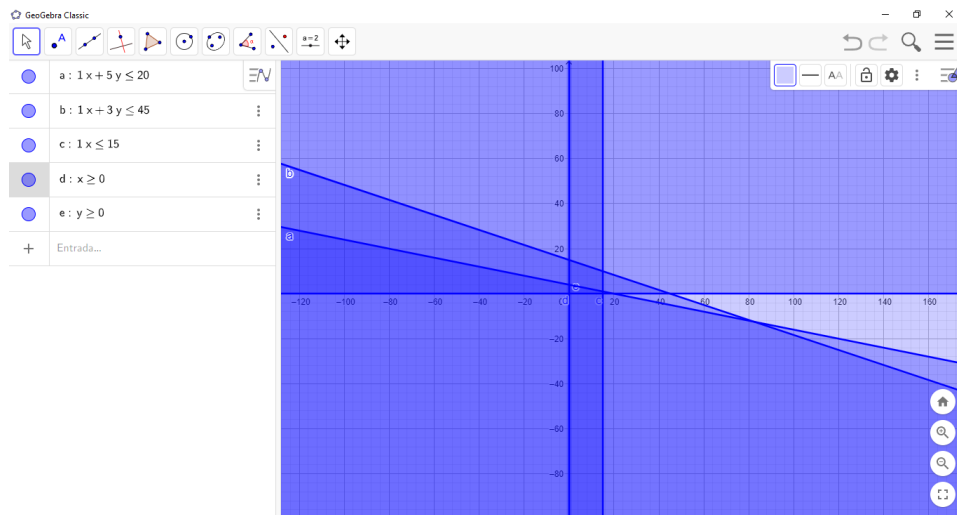
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Abrindo o GeoGebra, aqui usou-se a versão GeoGebra Classic 6, entra-se primeiro com as restrições na caixa de entrada, coloca-se uma de cada vez e pressiona o ENTER (Figura 32).

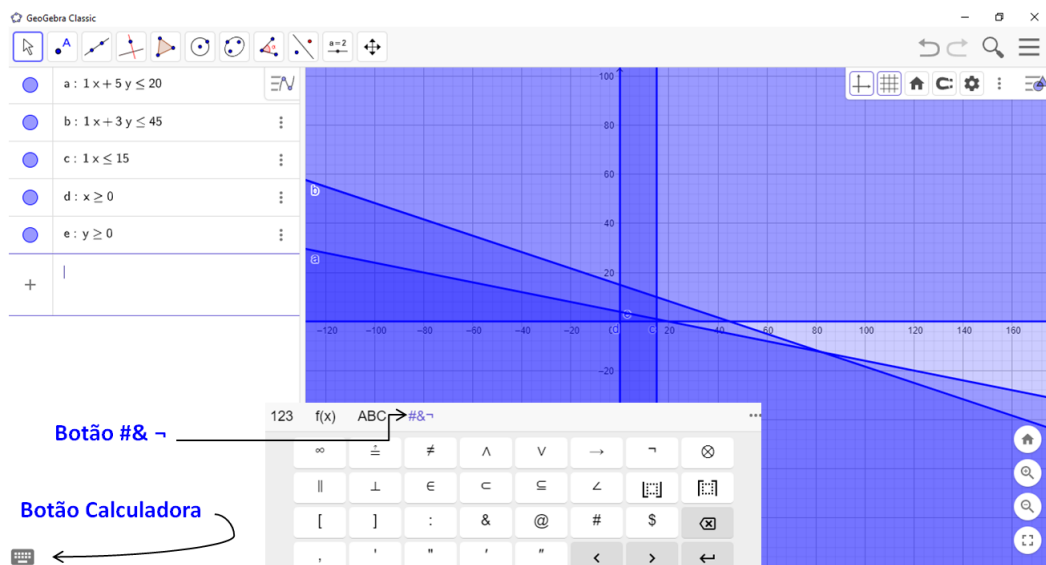
Após a entrada das restrições, deve-se fazer a interseção das regiões. Clicando-se no botão calculadora e botão  $\# \& \neg$ , abre-se a janela mostrada na Figura 33.

Figura 32 – Entrada das restrições do Exemplo 2.3 no GeoGebra



Fonte: Produzida pelo autor no GeoGebra Classic 6

Figura 33 – Exibindo a calculadora do GeoGebra para entrada das restrições

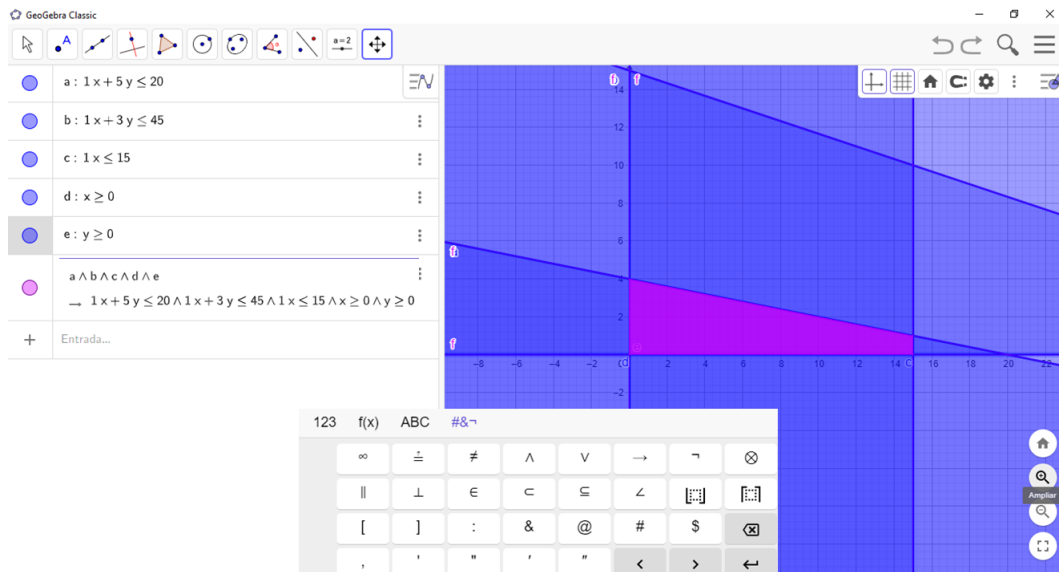


Fonte: Produzida pelo autor no GeoGebra Classic 6

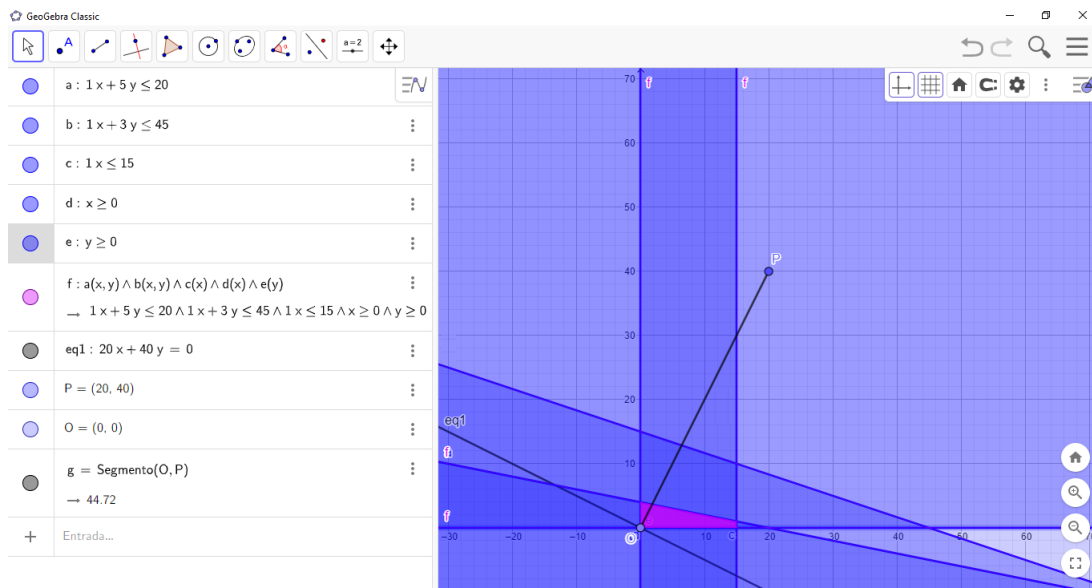
Faz-se a interseção das restrições, digitando-se na caixa de entrada a seguinte instrução:  $a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e$ . Quando for pressionada a tecla ENTER, a parte que corresponde a região viável ao problema, onde estão as soluções ótimas, fica em destaque em uma cor diferente, como mostra a Figura 34, nela está na cor rosa.

A equação a ser otimizada é  $Z = 20x + 40y$ . O valor de  $Z$  altera-se sempre que  $x$  e  $y$  varia dentro da região viável. Fazendo  $Z = 0$  e colocando-se a equação  $20x + 40y = 0$  na caixa de entrada, obtém-se o nível zero, como mostrado na Figura 35.

Figura 34 – Interseção das Restrições



Fonte: Produzida pelo autor no GeoGebra Classic 6

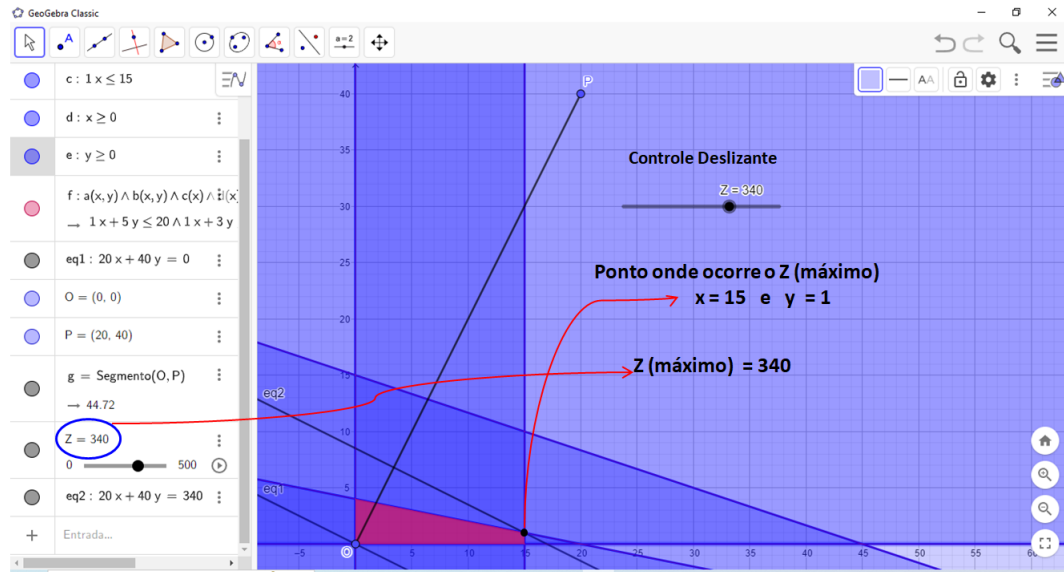
Figura 35 – Representação da equação  $Z = 20x + 40y$  para  $Z = 0$ 

Fonte: Produzida pelo autor no GeoGebra Classic 6

Deslocando a reta  $Z = 20x + 40y$ , no sentido do segmento  $OP$ , onde  $O = (0, 0)$  e  $P = (20, 40)$ , o valor de  $Z$  vai aumentando, sendo possível perceber assim qual é o valor máximo de  $Z$ .

Quando o valor de  $Z$  muda, obtêm-se retas paralelas à  $20x + 40y = 0$  e perpendiculares ao segmento  $OP$ . Colocando-se  $Z$  em um controle deslizante e inserindo a equação  $20x + 40y = Z$ , obtermos os valores que  $Z$  assume para  $x$  e  $y$  dentro da região viável. (Figura 36).

Figura 36 – Representação da solução ótima para  $Z = 20x + 40y$  com  $x$  e  $y$  dentro da região viável



Fonte: Produzida pelo autor no GeoGebra Classic 6

Assim o Lucro máximo é obtido quando se produz diariamente 15 cadeiras e 1 mesa e esse lucro máximo é R\$ 340,00.

Link das construções feitas no GeoGebra. <https://www.geogebra.org/classic/qdj56sye>

#### Exemplo 4.2. (PAIVA, 2010)

Um projeto estima que a iluminação de um salão de festas seja feita com o máximo de 25 lâmpadas de 100 W ou 150 W, totalizando pelo menos 3.000 W de potência, havendo, no mínimo, 9 lâmpadas de 100 W. Cada lâmpada de 100 W custa R\$ 20,00 e cada lâmpada de 150 W custa R\$ 30,00. Quantas lâmpadas de cada tipo devem ser utilizadas de modo que o custo seja o menor possível?

Representando-se as variáveis de decisão lâmpadas de 100 W e 150 W por  $x$  e  $y$  respectivamente. Tem-se o seguinte modelo para o problema.

Minimizar  $Z = 20x + 30y$

Sujeito a :

$$x + y \leq 25$$

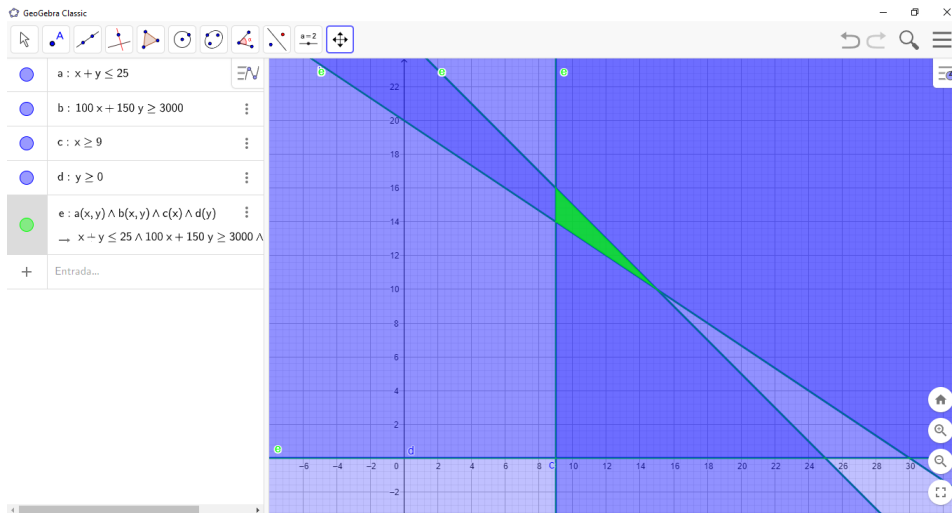
$$100x + 150y \geq 3000$$

$$x \geq 9$$

$$y \geq 0$$

Entrando com as restrições no GeoGebra e fazendo as intersecções, obtém-se o resultado mostrado na Figura 37.

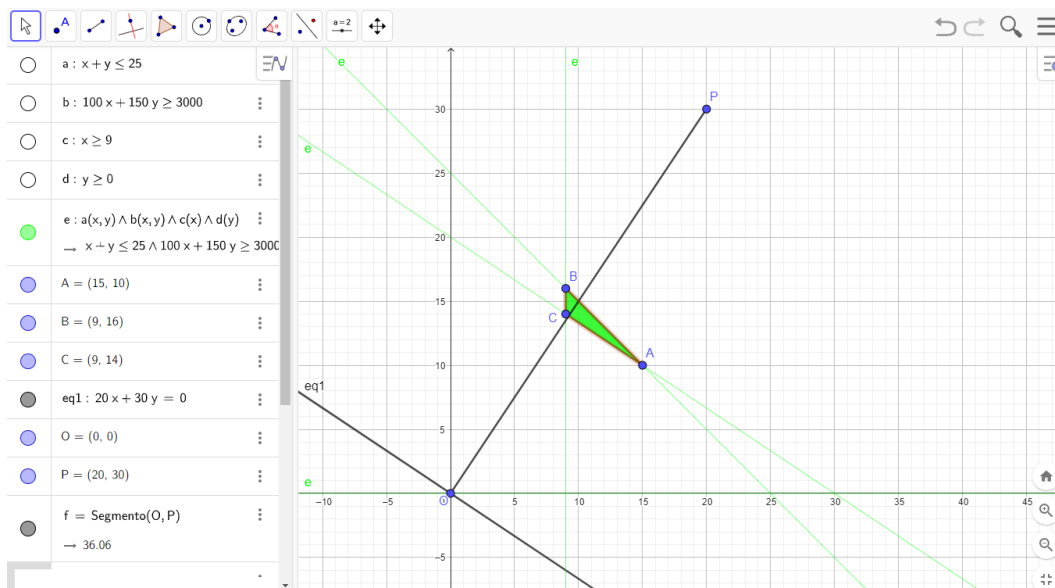
Figura 37 – Representação das restrições do Exemplo 2.4



Fonte: Produzida pelo autor no GeoGebra Classic 6

Selecionando a ferramenta Ponto na Barra de Ferramentas e clicando na intersecção das retas  $x + y = 25$  e  $100x + 150y = 3000$  obtém-se o ponto **A**; e das retas  $x + y = 25$  e  $x = 9$  obtém-se o ponto **B**; e das retas  $100x + 150y = 3000$  e  $x = 9$  obtém-se o ponto **C**. Tem-se assim o  $\triangle ABC$ . Essa é a região viável do problema, destacado na cor verde da Figura 38

Figura 38 – Representação da região viável e sentido de crescimento de  $Z$  em  $Z = 20x + 30y$



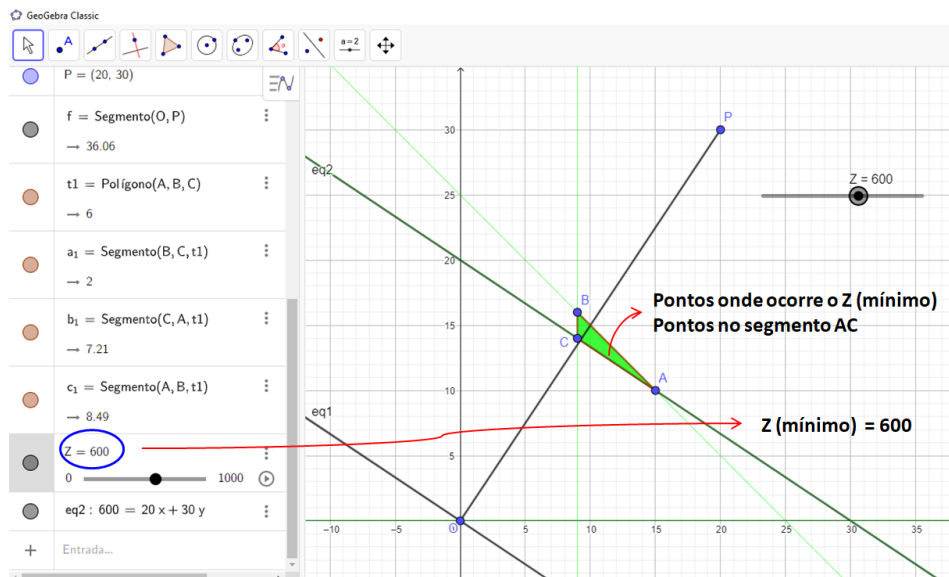
Fonte: Produzida pelo autor no GeoGebra Classic 6



Destacando a região viável, entrando com a equação  $Z = 20x + 30y$ , fazendo  $Z = 0$  e representado o segmento  $OP$ , onde  $O = (0,0)$  e  $P = (20, 30)$ .(Figura 38).

Tem-se assim, o sentido de crescimento e decréscimo de  $Z$ , ao deslocar a reta  $Z = 20x + 30y$  no sentido de  $O$  para  $P$ , o valor de  $Z$  aumenta, no sentido de  $P$  para  $O$ , o valor de  $Z$  diminui. (Figura 39)

Figura 39 – Representação da solução ótima de  $Z = 20x + 30y$



Fonte: Produzida pelo autor no GeoGebra Classic 6

Deslocando-se a reta  $Z = 20x + 30y$  no sentido de  $OP$ , ela coincide com o lado  $AC$  da região viável, atingindo nessa trecho seu menor valor, como mostra a Figura 39.

Como o número de Lâmpadas deve ser um número inteiro, então as soluções ótimas são:  $x = 9$  e  $y = 14$  ou  $x = 15$  e  $y = 10$ . Obtendo assim um valor mínimo de R\$ 600,00.

Link das construções feitas no GeoGebra. <https://www.geogebra.org/classic/ydjjdvub>



# Conclusão

A programação linear é uma ferramenta muito importante na resolução de problemas de otimização. Como os estudantes começam a empreender muito cedo, conhecer técnicas que os ajudem nas decisões a serem tomadas pode fazer muita diferença.

Este trabalho apresentou a definição da programação linear; descreveu como os problemas aparecem nos livros do ensino médio; mostrou como localizar os semiplanos determinados pelas inequações lineares; resolveu alguns problemas de PL com duas variáveis através do método gráfico; fez a demonstração do teorema fundamental da programação linear para duas variáveis e, por fim, mostrou como resolver problemas de PL usando os recursos do software GeoGebra.

A abordagem principal deste trabalho foi feita usando-se os conteúdos matemáticos estudados na educação básica, técnicas algébricas e gráficas simples. Sendo possível os estudantes do ensino médio acompanharem o desenvolvimento das soluções apresentadas.

O trabalho pode servir como fonte de referência aos estudantes e professores da educação básica no ensino e aprendizagem de programação linear em nível elementar.



# Referências

- BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. *O GeoGebra e a Matemática da educação básica: frações, estatística, círculo e circunferência*. Curitiba: Ithala, 2014.
- BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra linear 3. ed.* São Paulo: Harper & Row, 1980.
- BRASIL. Ministério da educação. base nacional comum curricular. Brasília, 2018.
- BUENO, F. *Otimização Gerencial com Excel*. Florianópolis: Visual Books, 2007.
- COSTA, A. *HiperApostila: Geometria Analítica*. 2022. Disponível em: <<https://sites.google.com/view/matematica-andrecosta>>. Acesso em: 23 de outubro de 2022.
- CUNHA, S. F. *Introdução à Programação Linear*. Rio de Janeiro: Editra Ciência Moderna Ltda, 2017.
- DANTE, L. R. *Matemática : contexto aplicações : ensino médio, volume 2 – 3. ed.* São Paulo: Ática, 2016.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo. Vol 2*. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- IEZZI, G. e. *Matemática: ciência e aplicações, volume 3*. São Paulo: Saraiva, 2016.
- LEITHOLD, L. *Cálculo com geometria analítica, vol. 2*. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.
- LIMA, E. L. *Coordenadas no plano, 4ª ed.* Rio de Janeiro: SBM, 2002.
- LIMA, E. L. *Análise real. vol 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- LIMA, E. L. *Geometria analítica e álgebra linear, 1ª ed.* Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- LINS, M. P. E.; CALÔBA, G. M. *Programação Linear: com aplicações em teoria dos jogos e avaliação de desempenho*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
- PAIVA, M. R. *Matemática, volume 3. — 2. ed.* São Paulo: Moderna, 2010.
- PEREIRA, R. M. *Programação linear: uma proposta de sequência didática para o ensino médio e um estudo de caso. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)*. Goiânia: Universidade Federal de Goiás, 2020.
- STEWART, J. *cálculo. vol 2*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- TAHA, H. A. *Pesquisa operacional: uma visão geral - 8. ed.* São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- THOMAS, G. B. *Cálculo, vol.2 - 12. ed.* Sao Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.