



Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática



# A REGRA DOS SINAIS DE DESCARTES

ADRIANO CHAGAS COUTINHO

Orientador

Antonio José Ferreira Gomes Junior

**Recife-PE**

Agosto de 2016



Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática



## A REGRA DOS SINAIS DE DESCARTES

*Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.*

ADRIANO CHAGAS COUTINHO

Recife-PE

Agosto de 2016

## Banca examinadora:

---

*Prof. Dr. Antonio José Ferreira Gomes Junior (Orientador)*

---

*Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Karla Ferreira de Arruda Duque*

---

*Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo*

*Dedico esta Dissertação a todos os estudantes brasileiros, principalmente aos da rede pública que vivem em condições financeiras limitadas. Também aos meus companheiros de trabalho, professores que se dedicam de todas as formas para contribuir com a formação dos estudantes.*

*A mente que se abre a uma nova ideia jamais volta ao seu tamanho original.*

*Albert Einstein*

## Agradecimentos

Agradeço ao Professor Antonio Gomes por ter aceitado me orientar neste trabalho e pela confiança em mim depositada.

Agradeço a todos os professores que me ensinaram no PROFMAT, em especial ao Professor Paulo Santiago que me mostrou grande parte do significado real de uma carreira profissional e ao Professor Ross Nascimento que me deu grande incentivo para atuar como Professor. Fico grato também a Marcella Feitosa por ter me dado apoio e assistência com o  $\text{\LaTeX}$ .

Aos meus familiares e pessoas próximas que me deram inesquecível apoio e estímulo desde o início da minha graduação, contribuindo em grande peso na minha formação de forma direta ou indireta.

Por fim, agradeço aos meus alunos. Vocês foram e sempre serão minha inspiração e motivação por ter escolhido essa carreira.

## Resumo

Neste trabalho, estudaremos a Regra dos Sinais de Descartes, que foi conjecturada por ele em meados do século XVII, onde o mesmo relacionou o número de raízes positivas de um polinômio com os sinais de seus coeficientes. Inicialmente, apresentaremos uma demonstração do resultado de Descartes elaborada por **Xiaoshen Wang** [8]. Em seguida, estudaremos uma regra parecida para funções mais gerais, cuja demonstração foi feita por **Vilmos Komornik** [7]. Para finalizar, traremos um Roteiro de como abordar o assunto nas escolas, juntamente com uma lista de exercícios resolvidos e comentados, envolvendo o tema.

# Abstract

In this work, we study the Rule Signs of Descartes, which was conjectured by him in the mid-seventeenth century, where it linked the number of positive roots of a polynomial with the signs of their coefficients. Initially, we will present a statement of Descartes elaborated by **Xiaoshen Wang** [8]. Then we will study a similar rule for more general functions, whose statement was made by **Vilmos Komornik** [7]. Finally, we will bring a Roadmap on how to approach the subject in schools, along with a list of fixed and commented exercises involving the theme.



# Conteúdo

Introdução	1
1 Resultados de Cálculo e Indução	3
2 Lemas Introdutórios	5
3 A Regra dos Sinais de Descartes para Funções Polinomiais	17
4 Uma Regra para Funções mais Gerais	23
5 Aplicação na Escola	26
5.1 Roteiro da Aula . . . . .	27
5.2 Exercícios Resolvidos . . . . .	31
Referências Bibliográficas	32

# Introdução

Neste trabalho, aplicaremos alguns dos conceitos desenvolvidos na cadeira de cálculo do PROFMAT, afim de demonstrar o Teorema da Regra dos Sinais de Descartes. Regra esta que pode ter uma boa aplicabilidade no 9º ano do Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio. Tentando assim, contemplar as ideias do PROFMAT que dentre outras coisas, consiste em melhorar a qualidade dos Ensinos Fundamental e Médio.

A Regra dos Sinais de Descartes foi vista pela primeira vez na obra **La Géométrie** [5] por volta do século XVII. Apesar de René Descartes ter conjecturado, ele não fez a demonstração deste Teorema. Segue um fragmento de como foi enunciado o teorema:

*”podem existir tantas verdadeiras como de vezes os sinais + e – se encontrem trocados; e tantas falsas como de vezes se encontrem dois sinais + ou dois sinais – seguidos.*

Quando Descartes usa a palavra “*verdadeiras*”, ele faz referência à quantidade de raízes positivas. Já a palavra “*falsas*” está sendo usada como referência para a quantidade de raízes negativas. Observe que a frase “*os sinais + e – se encontrem trocados*” significa que dois termos consecutivos têm sinais opostos. Assim como a frase “*se encontrem dois sinais + ou dois sinais – seguidos*” significa que dois termos consecutivos têm os respectivos sinais iguais.

Usando os resultados de cálculo que se encontram no *Capítulo 1* e os Lemas introdutórios do *Capítulo 2* faremos no *Capítulo 3* a demonstração da Regra dos Sinais de Descartes feita por **Xiaoshen Wang** [8] em 2004. Mais precisamente, provaremos o seguinte Teorema:

Seja  $P(x) = a_0x^{B_0} + a_1x^{B_1} + a_2x^{B_2} + \dots + a_nx^{B_n}$  um polinômio com coeficientes reais não nulos cujos expoentes satisfazem  $B_0 < B_1 < \dots < B_n$ . Então, o número de raízes positivas de  $P(x)$  (mesmo contadas com suas multiplicidades) é menor ou igual à quantidade de mudanças de sinais na sequência de coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . Além disso, a diferença entre a quantidade de mudança de sinais e a quantidade de raízes positivas de  $P(x)$  é um número par.

Já no *Capítulo 4*, analisaremos uma versão deste Teorema com aplicação para funções mais gerais e sua respectiva demonstração feita por **Vilmos Komornik** [7] em 2006.

Seja  $P(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \dots + a_nx^{b_n}$  um polinômio com  $a_0, \dots, a_n$  reais não nulos e expoentes também reais  $b_0, b_1, \dots, b_n$  satisfazendo a sentença  $b_0 > b_1 > \dots > b_n$ . Então, a quantidade de raízes estritamente positivas não ultrapassa o número de mudanças consecutivas dos sinais nos valores  $a_0, \dots, a_n$ .

Observe que a demonstração realizada em [8] nos mostra mais uma informação: a diferença entre o número de trocas de sinal e o número de raízes estritamente positivas é um número par.

No *Capítulo 5* faremos um exemplo de como abordar o assunto nas escolas, onde preparamos um roteiro de aula com a demonstração para polinômios de 1º e 2º graus, seguida de uma lista de exercícios resolvidos para a fixação dos conteúdos.

# Capítulo 1

## Resultados de Cálculo e Indução

Aqui serão enunciados alguns resultados que foram vistos no curso de cálculo, necessários ao desenvolvimento do trabalho. Suas respectivas demonstrações podem ser vistas no livro **Fundamentos de Cálculo** [2]. Entretanto, ao passo que usarmos estes resultados, faremos a devida adaptação do problema ao formato do enunciado do teorema, afim de deixar a leitura acessível.

**Teorema 1.0.1.** *Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  duas funções definidas em um intervalo aberto  $I$ . Se as duas funções forem deriváveis em  $x_0 \in I$ , então as funções  $(fg)(x)$  e  $(f + g)(x)$  são deriváveis em  $x_0$  e vale que:*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \text{ e } (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

**Teorema 1.0.2.** *Toda função do tipo  $P(x) = a_n x^{b_n} + a_{n-1} x^{b_{n-1}} + \dots + a_1 x^{b_1} + a_0 x^{b_0}$ , com  $a_i$  e  $b_i \in \mathbb{R}$  é diferenciável e portanto contínua em seu domínio, que é  $\mathbb{R}$ , caso  $b_i \geq 0$  para todo  $i$ , e  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  caso  $b_i < 0$ , para algum  $i$ .*

**Teorema 1.0.3.** *Se  $f$  é contínua em um intervalo aberto contendo  $x_1$  e  $f(x_1) > 0$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ .*

**Teorema 1.0.4.** (O Teorema de Rolle) Seja  $f$  uma função real que satisfaça as seguintes hipóteses:

(i)  $f$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ .

(ii)  $f$  é diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ .

(iii)  $f(a) = f(b)$

Então, existe um real  $c$  em  $(a, b)$ , tal que  $f'(c) = 0$ .

**Teorema 1.0.5.** Seja  $f$  uma função derivável, do tipo  $f(x) = a(x - c)^b$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  reais. Então,

$$[a(x - c)^b]' = ab(x - c)^{b-1}$$

**Proposição 1.0.6.** Seja  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  um polinômio:

Se  $a_n > 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = +\infty$

Se  $a_n < 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = -\infty$

No curso de Matemática Discreta, disciplina obrigatória na formação do PROFMAT, foi visto dentre outras coisas o *Princípio da Indução*. Com base neste Princípio serão desenvolvidas as demonstrações vistas aqui para o Teorema da Regra dos Sinais de Descartes.

**Axioma 1.** Seja  $P(n)$  uma proposição relativa aos números naturais. Suponha que:

(i)  $P(m)$  é verdadeira, e

(ii) Se  $P(n)$  é verdadeira, para algum  $n$ , segue-se que  $P(n + 1)$  também é verdadeira.

Então  $P(n)$  é verdadeira para todos os números naturais maiores ou iguais a  $m$ .

# Capítulo 2

## Lemas Introdutórios

Neste capítulo, faremos alguns lemas para simplificar as demonstrações dos teoremas principais. As provas desses resultados, bem como o enunciado de alguns deles, foram criados durante as reuniões de orientação, conforme os problemas apareciam.

**Definição 2.0.1.** Dizemos que  $x_1$  é uma raiz do polinômio  $P(x)$  com multiplicidade  $m_1$ , se  $P(x)$  pode ser escrito da seguinte forma:  $P(x) = (x - x_1)^{m_1}Q(x)$ , onde  $Q(x)$  é um polinômio de grau menor que  $P(x)$  e  $Q(x_1) \neq 0$ .

**Lema 2.0.2.** Sejam as raízes do polinômio  $P(x)$  dadas por  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ , com multiplicidades respectivamente iguais a  $m_1, m_2, \dots, m_k$ . Então,  $x_1, x_2, \dots, x_k$  também são raízes de  $P'(x)$ , com respectivas multiplicidades  $m_1 - 1, m_2 - 1, \dots, m_k - 1$ . *Observação:* Se  $m_i = 1$ , então  $x_i$  não é raiz de  $P'(x)$ .

**Demonstração.** Se  $x_1$  for raiz de  $P(x)$  com multiplicidade  $m_1$ , então por definição,  $P(x) = (x - x_1)^{m_1}Q(x)$ , onde  $Q(x_1) \neq 0$ .

Calculando a derivada do polinômio  $P(x)$  e aplicando o que diz o **Teorema 1.0.1** temos

$$P(x)' = [(x - x_1)^{m_1}]'Q(x) + (x - x_1)^{m_1}Q(x)'$$

Pelo **Teorema 1.0.5**, temos que

$$[(x - x_1)^{m_1}]' = m_1(x - x_1)^{m_1-1}$$

Daí,

$$P'(x) = m_1(x - x_1)^{m_1-1}Q(x) + (x - x_1)^{m_1}Q'(x).$$

Colocando o fator  $(x - x_1)^{m_1-1}$  em evidência, teremos que

$$P'(x) = (x - x_1)^{m_1-1}[m_1Q(x) + (x - x_1) \cdot Q'(x)].$$

Por conveniência vamos chamar  $m_1Q(x) + (x - x_1) \cdot Q'(x)$  de  $R(x)$ . Note que  $x_1$  não é raiz de  $R(x)$ , veja:

Ao substituírmos  $x$  por  $x_1$  em  $R(x)$  obteremos

$$R(x_1) = m_1Q(x_1) + (x_1 - x_1) \cdot Q'(x_1)$$

$$R(x_1) = m_1Q(x_1) + 0 \cdot Q'(x_1)$$

$$R(x_1) = m_1Q(x_1) + 0$$

$$R(x_1) = m_1Q(x_1) \neq 0$$

Assim,  $P'(x) = (x - x_1)^{m_1-1}R(x)$ . onde  $R(x_1) \neq 0$ . Então, por definição  $x_1$  é raiz com multiplicidade  $m_1 - 1$  de  $P'(x)$ .

**Lema 2.0.3.** *Considere a função  $P(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + a_2x^{b_2} + \dots + a_nx^{b_n}$  com  $a_0, \dots, a_n$  não nulos, onde  $a_i$  e  $b_i \in \mathbb{R}$  com  $b_0 < b_1 < \dots < b_n$  e sejam  $x_1, \dots, x_k$  raízes positivas de  $P(x)$  tais que  $x_1 < \dots < x_k$ . Então, para todo  $i = 1, \dots, k - 1$  temos que existe  $c_i \in (x_i, x_{i+1})$  tal que  $P'(c_i) = 0$ .*

**Demonstração.** Primeiramente, observe que o domínio de  $P(x)$  é  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

O domínio será  $\mathbb{R}$  quando se tratar de uma função com todos os expoentes não-negativos.

O domínio será  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  quando ocorrer de algum termo ter expoente negativo.

Então, pelo **Teorema 1.0.2** do *Capítulo 1* temos que  $P(x)$  é contínua e diferenciável em  $(0, +\infty)$ .

Assim, para todo  $i = 1, \dots, k - 1$  temos que a função

$$P : [x_i, x_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto P(x)$$

é contínua em  $[x_i, x_{i+1}]$ , diferenciável em  $(x_i, x_{i+1})$  e  $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$ .

Sendo assim, pelo **Teorema 1.0.4** temos que existe  $c_i \in (x_i, x_{i+1})$  tal que  $P'(c_i) = 0$ .

Vamos definir:

–  $z(P)$  = a soma das multiplicidades de cada raiz positiva de  $P(x)$ ,

–  $v(P)$  = número de mudanças de sinais em termos consecutivos da sequência dos coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Exemplo:** Seja o polinômio  $P(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$ . Note que  $P(x)$  possui duas raízes positivas, isto é.  $z(P) = 2$ . Ao desenvolver o produto  $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$ , obtemos a expressão:  $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ . Observe que para esta expressão temos a primeira mudança de sinais entre os termos  $+x^3$  e  $-2x^2$ . Não temos mudança dos sinais entre  $-2x^2$  e  $-x$ . Já a segunda mudança entre os sinais dos coeficientes, ocorre entre os termos  $-x$  e  $+2$ . Assim,  $P(x)$  apresenta duas mudanças nos sinais dos seus coeficientes:  $v(P) = 2$ .

**Lema 2.0.4.** *Seja  $P(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \dots + a_nx^{b_n}$  com  $a_0, a_1, \dots, a_n$  reais não nulos e  $b_0 < b_1 < \dots < b_n$ , cujo domínio seja  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , se dividirmos  $P(x)$  por uma potência de  $x$ , então as raízes positivas e a quantidade de mudança dos sinais em  $P(x)$  não se alteram.*

**Demonstração.** Primeiramente vamos analisar o que ocorre com a quantidade de mudança dos sinais ao dividirmos  $P(x)$  por uma potência de  $x$ :

$$\frac{P(x)}{x^k} = \frac{a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \dots + a_nx^{b_n}}{x^k} = a_0x^{b_0-k} + a_1x^{b_1-k} + \dots + a_nx^{b_n-k}$$

Observe que a sequência  $a_0, a_1, \dots, a_n$  não sofre qualquer alteração com relação aos sinais. Ou seja, a quantidade de mudança dos sinais é a mesma.

Vamos denotar  $\frac{P(x)}{x^k}$  por  $Q(x)$ .

Seja  $x_0$  uma raiz positiva de  $P(x)$ , então:  $Q(x_0) = \frac{P(x_0)}{x_0^k} = \frac{0}{x_0^k} = 0$ . Logo  $x_0$  é raiz de  $Q(x)$ . De forma geral, as raízes positivas de  $P(x)$  também são raízes em  $Q(x)$ .



Suponha agora que  $x_0$  é uma raiz positiva de  $Q(x)$ . Então

$$Q(x_0) = 0$$

$$\frac{P(x_0)}{x_0^k} = 0$$

Como  $x_0^k \neq 0$ , então  $P(x_0) = 0$ . Ou seja,  $x_0$  é raiz de  $P(x)$ . Em outras palavras, as raízes de  $P(x)$  são exatamente iguais as raízes de  $Q(x)$ .

**Lema 2.0.5.** *Seja  $P(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + a_2x^{b_2} + \dots + a_nx^{b_n}$ , um polinômio com coeficientes reais não nulos, onde  $b_0 > b_1 > \dots > b_n$ . Então  $z(P') \geq z(P) - 1$ .*

**Demonstração.** Sejam  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$  as raízes positivas de  $P(x)$  com respectivas multiplicidades dadas por  $d_1, d_2, \dots, d_k$ . Sendo assim, a quantidade de raízes positivas de  $P(x)$  é expressa por:  $z(P) = \sum_{i=1}^k d_i$ .

Sabendo que  $P'(x)$  pode ter raízes que não são raízes de  $P(x)$ , e fazendo uso do **Lema 2.0.2** é que podemos afirmar que:

$$z(P') \geq (d_1 - 1) + (d_2 - 1) + \dots + (d_k - 1) = (d_1 + d_2 + \dots + d_k) + (-1 - 1 \dots - 1) = z(P) - k.$$

Pelo **Lema 2.0.3**, temos que para cada intervalo entre duas raízes positivas e consecutivas de  $P(x)$  existe pelo menos uma raiz de  $P'(x)$ , ou seja, existe um  $c_i \in (x_i, x_{i+1})$  tal que  $P'(c_i) = 0$ . Como temos  $k - 1$  intervalos entre as raízes, temos  $k - 1$  raízes positivas em  $P'(x)$  distintas das raízes de  $P(x)$ . Podemos afirmar que  $z(P')$  apresenta a quantidade de pelo menos  $z(P) - k + (k - 1)$  raízes. Veja a seguir um exemplo ilustrativo do que foi dito.

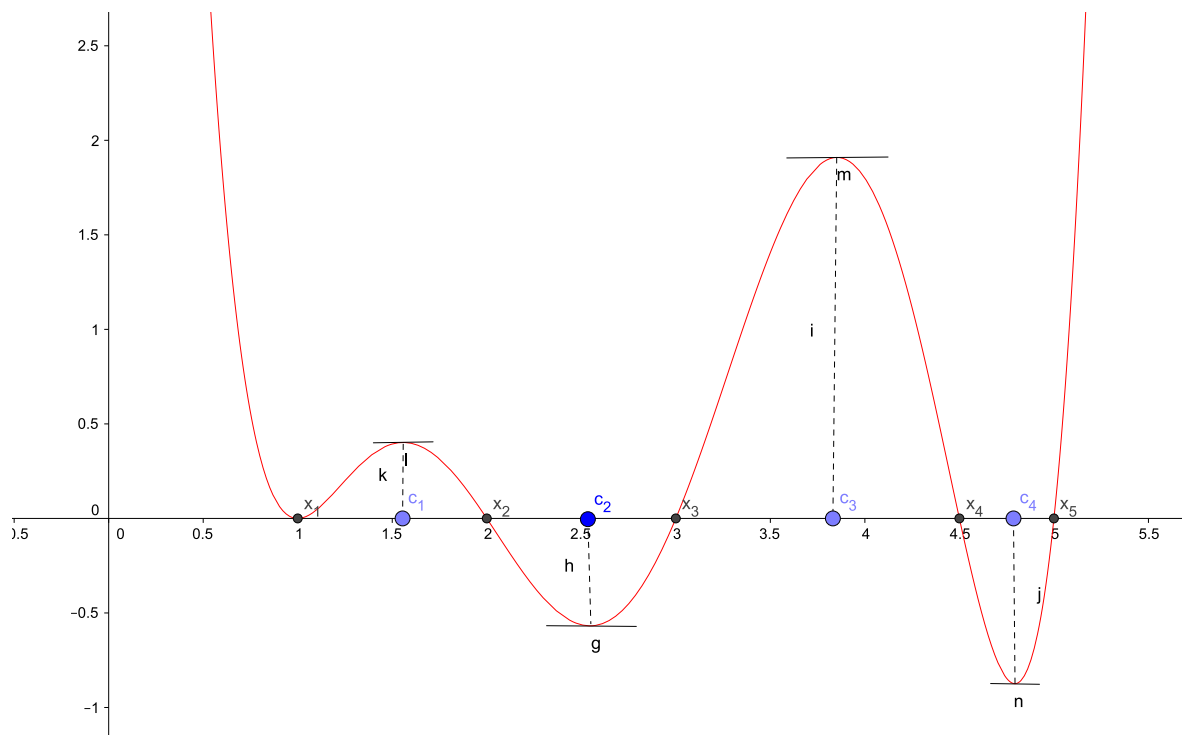


Figura 2.1: Ilustração do Lema 2.0.3.

Logo  $z(P') \geq z(P) - 1$ .

**Lema 2.0.6.** *Se  $x_1$  é uma raiz do polinômio  $P(x)$  tal que exista um  $\delta > 0$  onde o sinal constante de  $P(x)$  em  $(x_1 - \delta, x_1)$  é diferente do sinal constante de  $P(x)$  quando  $x \in (x_1, x_1 + \delta)$ , então a multiplicidade de  $x_1$  em  $P(x)$  é ímpar.*

Segue uma ilustração do que diz o Lema

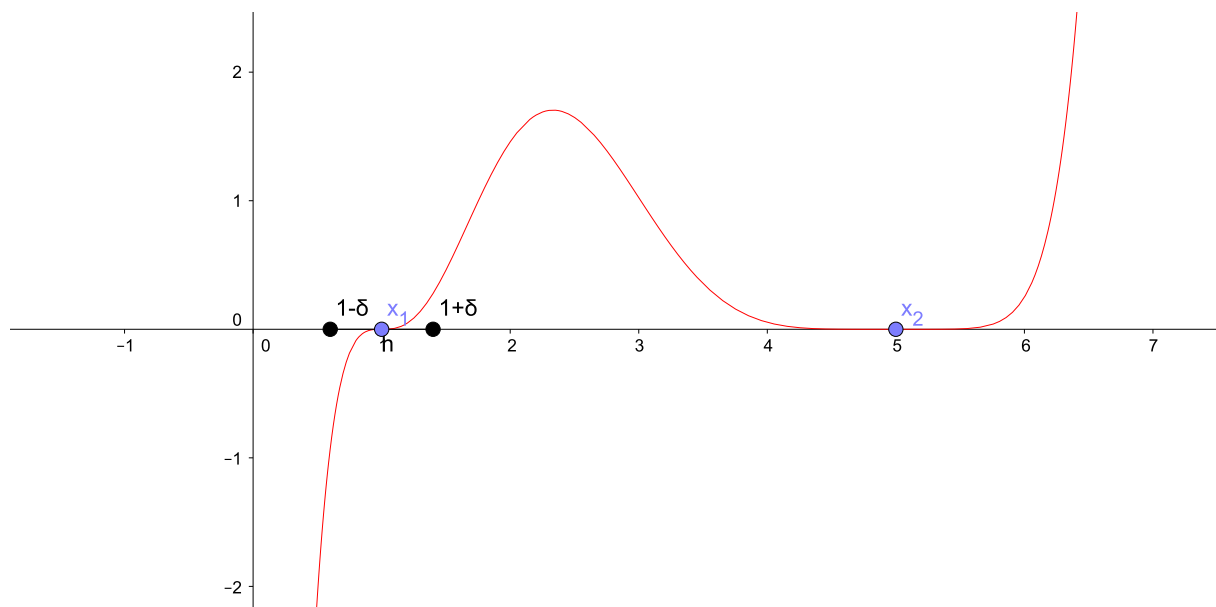


Figura 2.2: Ilustração do Lema 2.0.6

**Demonstração.** Seja  $m_1$  a multiplicidade de  $x_1$  em  $P(x)$ , por definição temos que  $P(x) = (x - x_1)^{m_1}Q(x)$ , com  $Q(x_1) \neq 0$ .

Suponha, sem perda de generalidade, que  $Q(x_1) > 0$ . De forma análoga pode ser feita a análise para  $Q(x_1) < 0$ . Como  $Q(x)$  é um polinômio, temos pelo **Teorema 1.0.2**, que  $Q(x)$  é contínua e pelo **Teorema 1.0.3** do capítulo 1 que existe um  $\epsilon \in (0, \delta)$  onde podemos afirmar que para todo  $x \in (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$  temos  $Q(x) > 0$ .

Observe no exemplo a seguir o comportamento da curva para valores próximos de  $x_1$

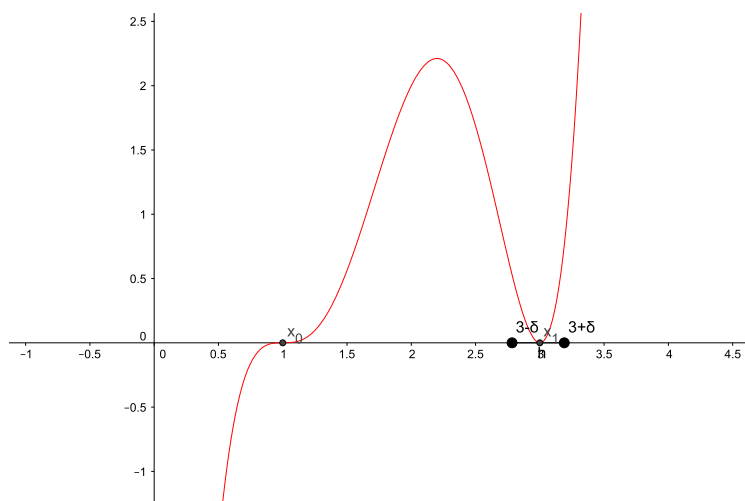


Figura 2.3: Ilustração do Lema 2.0.6

Suponha  $m_1$  par.

– Seja  $x_0 \in (x_1 - \epsilon, x_1)$ , então  $x_0 - x_1 < 0$ .

Assim,  $P(x_0) = (x_0 - x_1)^{m_1}Q(x_0)$  é positivo, pois  $(x_0 - x_1)^{m_1} > 0$  uma vez que  $m_1$  é par e  $Q(x_0) > 0$ , pois  $x_0 \in (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$ . Donde vemos que o sinal de  $P(x)$  é positivo em  $x \in (x_1 - \epsilon, x_1)$ .

– Seja  $x_0 \in (x_1, x_1 + \epsilon)$ , então  $x_0 - x_1 > 0$ .

Assim, o sinal de  $P(x_0) = (x_0 - x_1)^{m_1}Q(x_0)$  é positivo.

Logo se  $x_0 \in (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \setminus \{x_1\}$  então o sinal de  $P(x_0) = (x_0 - x_1)^{m_1}Q(x_0)$  é positivo, um absurdo, pois contradiz a hipótese. Como acontece a mudança de sinal, podemos afirmar que  $m_1$  é ímpar.

**Lema 2.0.7.** *Se  $x_1$  é uma raiz de  $P(x)$  tal que exista um  $\delta > 0$  onde o sinal constante de  $P(x)$  em  $(x_1 - \delta, x_1)$  é igual ao sinal constante de  $P(x)$  quando  $x \in (x_1, x_1 + \delta)$ , então a multiplicidade de  $x_1$  em  $P(x)$  é par.*

**Demonstração.** Seja  $m_1$  a multiplicidade de  $x_1$  em  $P(x)$ , por definição temos que  $P(x) = (x - x_1)^{m_1}Q(x)$ , com  $Q(x_1) \neq 0$ .

Suponha, sem perda de generalidade, que  $Q(x_1) > 0$ . De forma análoga pode ser feita a análise para  $Q(x_1) < 0$ . O termo  $Q(x)$  é um polinômio, informação essa que pode ser observada da **Definição 2.0.1**. Com base no **Teorema 1.0.2** temos que  $Q(x)$  é contínua. Pelo **Teorema 1.0.3** do capítulo 1 que existe um  $\epsilon \in (0, \delta)$  onde podemos afirmar que para todo  $x \in (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$  teremos  $Q(x) > 0$ .

Suponha  $m_1$  ímpar.

– Seja  $x_0 \in (x_1 - \epsilon, x_1)$ , então  $x_0 - x_1 < 0$ .

Assim,  $P(x_0) = (x_0 - x_1)^{m_1}Q(x_0)$  é negativo, pois  $(x_0 - x_1)^{m_1} < 0$  uma vez que  $m_1$  é ímpar e  $Q(x_0) > 0$ , pois  $x_0 \in (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$ . Donde vemos que o sinal de  $P(x)$  é negativo em  $x \in (x_1 - \epsilon, x_1)$ .

– Seja  $x_0 \in (x_1, x_1 + \epsilon)$ , então  $x_0 - x_1 > 0$ .

Logo o sinal de  $P(x_0) = (x_0 - x_1)^{m_1}Q(x_0)$  é positivo e isto é um absurdo, pois contradiz a hipótese. A contradição veio do fato de admitirmos que  $m_1$  é ímpar. Podemos então afirmar que  $m_1$  é par.

Veremos agora a recíproca para o **Lema 2.0.6** e para o **Lema 2.0.7**.

**Lema 2.0.8.** *Seja  $x_1$  raiz do polinômio  $P(x)$  com multiplicidade  $m_1$ .*

(i) *Se  $m_1$  é ímpar, então o gráfico de  $P(x)$  atravessa o eixo  $X$  ao passar por  $(x_1, 0)$ .*

(ii) *Se  $m_1$  é par, então o gráfico de  $P(x)$  não atravessa o eixo  $X$  ao interceptar o ponto  $(x_1, 0)$  e retorna para o mesmo lado. Neste caso  $x_1$  é máximo ou mínimo local do gráfico de  $P(x)$ .*

**Demonstração.**  $P(x) = (x - x_1)^{m_1}Q(x)$ , com  $Q(x_1) \neq 0$ . Suponha sem perda de generalidade que  $Q(x_1) > 0$ .

Como  $Q(x_1) > 0$ , pelo **Teorema 1.0.3** existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$   $Q(x) > 0$ .

Tome  $x \in (x_1 - \delta, x_1)$ . Então  $x < x_1$ . Daí  $x - x_1 < 0$ . Logo  $P(x) = (x - x_1)^{m_1} \cdot Q(x)$  é positivo se  $m_1$  é par e é negativo se  $m_1$  é ímpar.

Tome agora  $x \in (x_1, x_1 + \delta)$ . Então  $x > x_1$ , daí  $x - x_1 > 0$ . Logo  $P(x) = (x - x_1)^{m_1} \cdot Q(x)$  é positivo tanto para  $m_1$  par quanto para  $m_1$  ímpar.

No caso em que  $m_1$  é ímpar, temos que o sinal de  $P(x)$  é negativo antes de  $x_1$  e positivo depois de  $x_1$ . Desta forma, provamos (i).

Agora, quando  $m_1$  é par, temos que o sinal de  $P(x)$  antes e depois de  $x_1$  é positivo. Assim concluímos (ii).

**Lema 2.0.9.** *Considere o polinômio  $P(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + a_2x^{b_2} + \dots + a_nx^{b_n}$  com  $a_i \neq 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $b_0 < b_1 < \dots < b_n$ .*

(i) *Se os sinais nos termos de menor e maior grau forem diferentes, isto é  $a_0 \cdot a_n < 0$ , então a quantidade de raízes positivas em  $P(x)$ ,  $z(P)$  é ímpar.*

(ii) Se os sinais dos termos de menor e maior grau forem iguais, isto é  $a_0 \cdot a_n > 0$ , então a quantidade de raízes positivas em  $P(x)$ ,  $z(P)$  é par.

Antes de fazer a demonstração do **Lema 2.0.9**, vamos observar como ele funciona em alguns exemplos de aplicação.

Primeiramente vejamos um caso em que  $a_0 \cdot a_n > 0$ .

Segue como ilustração o gráfico da **Figura 2.4**. Note do **Lema 2.0.7** que  $x_1 = 1$  é raiz de multiplicidade par, enquanto que do **Lema 2.0.6**  $x_2 = 3$  e  $x_3 = 4$  são raízes de multiplicidades ímpares. Ou seja, a soma de suas multiplicidades resulta em um número par.

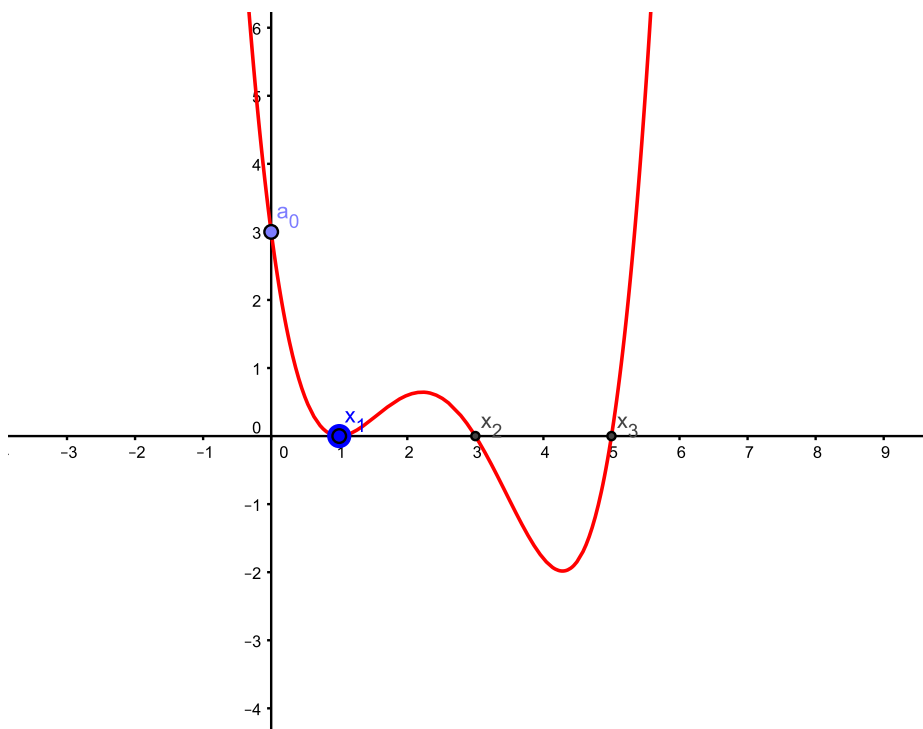


Figura 2.4:  $y = x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12$

Segue na **Figura 2.5** a ilustração da curva  $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ . Usando como referência o **Lema 2.0.6** podemos afirmar que  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 2$  são raízes de multiplicidades ímpares cada. Sendo assim, o total de raízes positivas é um número par.

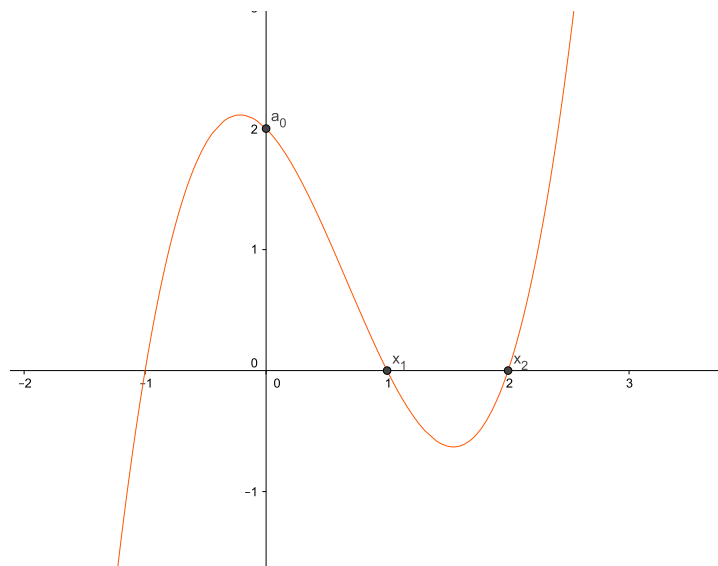


Figura 2.5:  $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Observe agora o caso em que  $a_0 \cdot a_n < 0$ , satisfazendo a condição (ii) do **Lema 2.0.9**.

Veja na **Figura 2.6** o comportamento gráfico. Fazendo uso do **Lema 2.0.7** podemos afirmar que  $x_1 = 1$  é uma raiz positiva com multiplicidade par, enquanto que do **Lema 2.0.6** temos que  $x_2 = 2$  é uma raiz positiva com multiplicidade ímpar. Sendo assim, temos uma quantidade ímpar de raízes positivas.

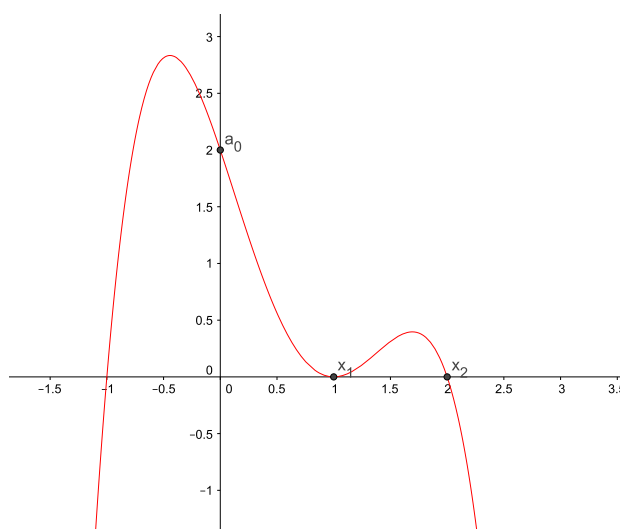


Figura 2.6:  $y = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

Observe agora a ilustração da curva que segue na **Figura 2.7**. Vale a pena chamar a atenção para o fato de que  $x = 2$  é raiz com multiplicidade par, com base no **Lema 2.0.7**. Enquanto que pelo **Lema 2.0.6**,  $x_1 = 1$ ,  $x_3 = 3$  e  $x_4 = 4$  são raízes de multiplicidades ímpares cada. Assim, a soma das multiplicidades das raízes positivas resulta em um número ímpar.

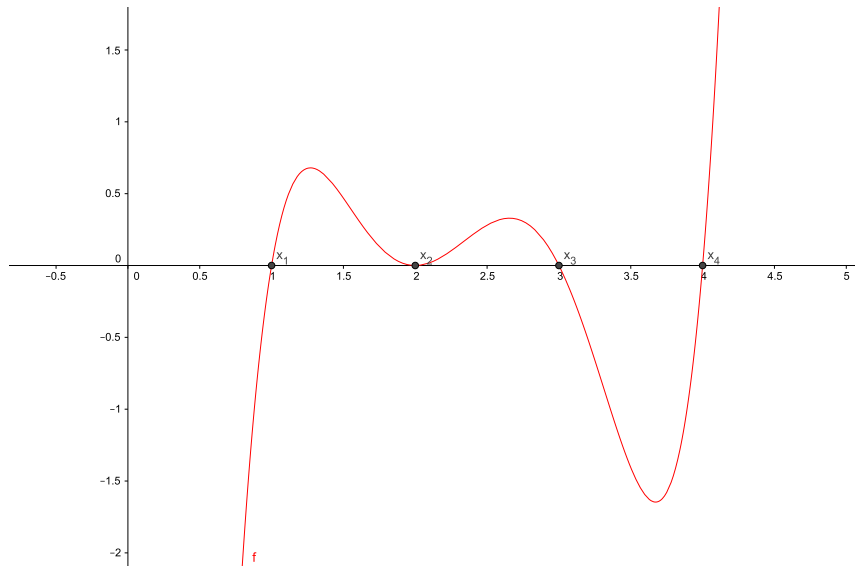


Figura 2.7:  $y = x^5 - 12x^4 + 55x^3 - 120x^2 + 124x - 48$

**Demonstração.** Com base no **Lema 2.0.4** podemos dividir  $P(x)$  por  $x^{b_0}$ , pois não se altera a quantidade de raízes positivas (contadas com suas multiplicidades) em  $P(x)$  e nem os sinais dos coeficientes. Sendo assim, sem prejuízo na análise a função pode ser expressa na forma:  $P(x) = a_0 + a_1x^{B_1} + a_2x^{B_2} + \dots + a_nx^{B_n}$ , onde  $B_i = b_i - b_0$ .

(i) Suponha sem perda de generalidade que  $a_0 > 0$  e  $a_n < 0$ , assim, da **Proposição 1.0.5** temos  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = -\infty$ .

Denotando por  $x_1$  uma raiz em  $P(x)$  e sua respectiva multiplicidade por  $m_1$ . Pelo **Lema 2.0.8**, se  $m_1$  for par, então a curva permanece no mesmo lado que já estava antes de interceptar o eixo das abscissas no ponto  $(x_1, 0)$ . Porém se  $m_1$  é ímpar, a curva passa para o outro lado do eixo após interceptar o ponto  $(x_1, 0)$ . A análise está sendo feita para  $a_0 > 0$  e  $x \in (0, +\infty)$ , pois estamos interessados apenas nas raízes positivas. Então a observação da curva começa a partir do ponto  $(0, a_0)$  e assim a curva começa acima do eixo das abscissas. Observe que se tivermos uma quantidade par de raízes positivas que apresentam a multiplicidade ímpar, então a curva vai "atravessar" o eixo das abscissas uma quantidade par de vezes, ou seja, o gráfico terminará



no mesmo lado onde iniciamos a análise, acima do eixo das abscissas. Isto é um absurdo, pois  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = -\infty$ . Logo existe uma quantidade ímpar de raízes com multiplicidade ímpar gerando assim como soma total da quantidade de raízes positivas, um número ímpar.

A demonstração é análoga para  $a_0 < 0$  e  $a_n > 0$ , pois basta multiplicar  $P(x)$  por  $-1$  que  $z(P)$  e  $v(P)$  não se alteram.

(ii) Suponha sem perda de generalidade que  $a_0 > 0$  e  $a_n > 0$ , assim da **Proposição 1.0.5** temos  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = +\infty$ .

Como a análise esta sendo feita para  $a_0 > 0$  e  $x \in [0, +\infty)$ , então a observação da curva começa no ponto  $(0, a_0)$ , ou seja, a curva começa acima do eixo das abscissas. Observe que se tivermos uma quantidade ímpar de raízes positivas que apresentam a multiplicidade ímpar, então o gráfico atravessará o eixo das abscissas uma quantidade ímpar de vezes. Ou seja, a curva terminará do lado oposto ao lado de onde iniciamos a análise, abaixo do eixo  $x$ . Isto é um absurdo, pois  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = +\infty$ . A contradição ocorre na possibilidade da quantidade de raízes com multiplicidade ímpar, ser um número ímpar.

Sendo assim a quantidade de raízes com multiplicidade ímpar, é um número par. Gerando assim um quantitativo par para o total de raízes positivas em  $P(x)$ .

Analogamente este resultado também é encontrado quando  $a_0 < 0$  e  $a_n < 0$ , pois basta multiplicar  $P(x)$  por  $-1$  que  $z(P)$  e  $v(P)$  não se alteram.

## Capítulo 3

# A Regra dos Sinais de Descartes para Funções Polinomiais

A obra *La Géométrie* (A Geometria) de *René Descartes* está dividida em três livros. Estes livros nos trazem ótimas abordagens sobre problemas da geometria plana e resoluções através de construção geométrica.

**Da natureza das Linhas e Curvas:** Dos vários problemas que podem ser encontrados em geometria, Descartes conceituou por *problemas planos* aos que podem ser solucionados com o uso de apenas segmentos de reta e segmentos circulares, todos os segmentos coplanares. Em outras palavras: são os problemas que podem ser expressos na forma  $Z^2 - aZ = \pm b^2$ . Onde  $Z$  é a incógnita(valor desconhecido) e  $a$  e  $b$  são coeficientes reais. Por se tratar de construções geométricas, Descartes desconsiderava as raízes negativas dessas equações.

- as raízes positivas eram chamadas de “verdadeiras”.
- as raízes negativas eram chamadas de “falsas”.

**LIVRO III:** Esta obra foi desenvolvida em meados do *Século XVII*. Abordando também análise da construção de problemas que são sólidos ou mais que sólidos. O Livro III da obra *La Géométrie* nos traz uma análise e interpretação geométrica sobre as raízes de equações e também sobre a construção de problemas do terceiro e do quarto graus através da interseção de uma parábola com um círculo.

Em especial, é neste livro que encontramos uma análise completa da REGRA DOS SINAIS DE DESCARTES, que é o principal objeto de estudos desta Dissertação.

Para motivar o estudo da Regra dos Sinais, vamos ver como ela funciona usando como exemplo o polinômio que Descartes usou para explicar o seu Teorema.

Só em olhar a equação:  $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ , em geral, uma pessoa dificilmente afirmaria a quantidade de raízes reais positivas existem. Graças a esse teorema podemos relacionar a quantidade de raízes positivas de qualquer polinômio olhando apenas para os sinais de seus coeficientes. Usando resultados como esses, podemos obter informações sobre as raízes positivas de polinômios sem necessariamente ter que calculá-las. A seguir mostraremos, de posse da REGRA DOS SINAIS, que a equação  $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$  possui apenas uma raiz positiva.

Agora, vamos enunciar e demonstrar o Teorema para funções polinomiais, como visto em [8].

**Teorema 3.0.1.** *Seja  $P(x) = a_0x^{B_0} + a_1x^{B_1} + a_2x^{B_2} + \dots + a_nx^{B_n}$ , um polinômio com coeficientes reais não nulos e cujos expoentes satisfazem  $B_0 < B_1 < \dots < B_n$ . Então o número de raízes positivas de  $P(x)$  (mesmo contadas com suas multiplicidades) é menor ou igual à quantidade de mudanças de sinais na sequência de coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . Além disso, a diferença entre a quantidade de mudança de sinais e a quantidade de raízes positivas de  $P(x)$  é um número par.*

**Demonstração.** Primeiro, de posse do Lema 2.0.4 podemos supor sem perda de generalidade que  $P(x) = a_0 + a_1x^{b_1} + a_2x^{b_2} + \dots + a_nx^{b_n}$ , com  $b_i \in \mathbb{N}$ , de forma que  $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ , uma vez que não temos alterações na quantidade de raízes positivas e nem no número de mudança dos sinais de  $P(x)$ . Agora, vamos usar indução em  $n$  para mostrar o resultado.

Se  $n = 1$ , então  $P(x) = a_0 + a_1x^{b_1}$

Vamos dividir em 2 casos:

(i) Se  $a_0 \cdot a_1 < 0$ , então teremos a raiz positiva  $x = \left(-\frac{a_0}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1}}$ . É uma mudança de sinal, uma vez que os sinais de  $a_0$  e  $a_1$  são distintos. Assim  $v(P) = z(P) = 1$  e o resultado é válido pois  $v(P) \geq z(P)$  e ambos têm a mesma paridade.

(ii) Se  $a_0 \cdot a_1 > 0$ , então não teremos raízes positivas. E nem mudança de sinal, uma vez que os sinais de  $a_0$  e  $a_1$  são iguais. Logo,  $v(P) = z(P) = 0$  e o resultado é válido para  $v(P) \geq z(P)$  e ambos têm a mesma paridade.

Assim, o resultado vale para  $n = 1$ .

Suponha agora que o resultado é válido para  $n - 1$ , isto é, se  $p(x) = c_0x^{D_0} + \dots + c_{n-1}x^{D_{n-1}}$  com  $c_i \neq 0$  para todo  $i = \{0, \dots, n\}$ , então  $z(p) \geq v(p)$  e ambos têm a mesma paridade.

Agora vamos verificar a veracidade para  $n$ . Ou seja, mostrar que  $v(P) \geq z(P)$  e ambos têm a mesma paridade.

Primeiro vamos mostrar que  $v(P)$  e  $z(P)$  tem a mesma paridade.

Vamos analisar por partes, dois casos, se  $a_0 \cdot a_1 > 0$  ou se  $a_0 \cdot a_1 < 0$ .

**1º Caso:**  $a_0 \cdot a_1 > 0$ .

A derivada de  $P(x)$  é dada por  $P'(x) = b_1a_1x^{b_1-1} + b_2a_2x^{b_2-1} + \dots + b_na_nx^{b_n-1}$

Olhando inicialmente para o polinômio  $P(x)$ , note que não há mudança de sinal entre  $a_0$  e  $a_1$ . Observe também que, como no polinômio  $P'(x)$  não existe mais o termo  $a_0$  e como  $b_i > 0$  para todo  $i = \{1, \dots, n\}$ , então os sinais de  $a_1, \dots, a_n$  são respectivamente iguais aos sinais de  $b_1a_1, \dots, b_na_n$  que se encontram em  $P'(x)$ . Portanto podemos afirmar que a quantidade de mudança de sinais em  $P(x)$  é a mesma que em  $P'(x)$ . Assim  $v(P) = v(P')$ .

Além disso, o produto dos coeficientes  $a_0 \cdot a_n$  que se encontram em  $P(x)$  tem o mesmo sinal que o produto dos coeficientes  $(b_1a_1) \cdot (b_na_n)$  que se encontram em  $P'(x)$ , podemos extrair do **Lema 2.0.9**:  $z(P')$  tem a mesma paridade que  $z(P)$ .

Note que  $P'(x)$  tem a forma de  $p(x)$ . Pela hipótese de indução:

$z(P') \leq v(P')$  e  $z(P')$  tem a mesma paridade que  $v(P')$ .

Falta agora concluir que  $v(P)$  e  $z(P)$  têm a mesma paridade.

Temos  $v(P) = v(P')$ , além disso  $z(P')$  tem a mesma paridade que  $v(P')$  e  $z(P')$  tem a mesma paridade que  $z(P)$ . Portanto  $v(P)$  tem a mesma paridade que  $z(P)$ .

Agora falta mostrar que  $v(P) \geq z(P)$ .

Pelo **Lema 2.0.5**, temos a desigualdade  $z(P') \geq z(P) - 1$ .

Note agora que:

$$v(P) = v(P') \quad (1)$$

$$v(P') \geq z(P') \quad (2)$$

$$z(P') \geq z(P) - 1 \quad (3)$$

De (1) e (2) temos:

$$v(P) = v(P') \geq z(P') \text{ portanto } v(P) \geq z(P').$$

De (2) e (3) temos:

$$v(P') \geq z(P') \geq z(P) - 1 \text{ portanto } v(P') \geq z(P) - 1.$$

Como  $v(P) = v(P')$  e a diferença entre  $v(P)$  e  $z(P)$  é par, podemos afirmar que  $v(P) \geq z(P)$ .

**2º caso:** Se  $a_0 \cdot a_1 < 0$ .

A derivada de  $P(x)$  é dada por  $P'(x) = b_1 a_1 x^{b_1-1} + b_2 a_2 x^{b_2-1} + \dots + b_n a_n x^{b_n-1}$ . Ao derivarmos  $P(x)$ , o termo  $a_0$  é anulado e assim em  $P'(x)$  não contaremos mais com a mudança de sinal entre os termos  $a_0$  e  $a_1$ . Além disso, como  $b_i > 0$  para todo  $i = \{1, \dots, n\}$  então os sinais de  $a_1, \dots, a_n$  são respectivamente iguais aos sinais de  $b_1 a_1, \dots, b_n a_n$  que se encontram em  $P'(x)$ .

Podemos então concluir que  $v(P) = v(P') + 1$ . Note que o produto  $a_0 \cdot a_n$  em  $P(x)$  tem sinal oposto ao produto  $(b_1 a_1) \cdot b_n a_n$  em  $P'(x)$ , pois essa diferença entre sinais é determinada apenas pelos termos  $a_0$  e  $a_1$  já que  $b_1$  e  $b_n$  são ambos positivos. Como em  $P(x)$  o produto dos coeficientes extremos tem sinal diferente que o sinal do produto entre os coeficientes extremos de  $P'(x)$ , concluímos a partir do **Lema 2.0.9**:  $z(P)$  e  $z(P')$  têm paridades diferentes. Em outras palavras:  $z(P)$  tem a mesma paridade que  $z(P') + 1$ .

Vamos primeiro mostrar a paridade.

Por hipótese de indução  $z(P')$  tem a mesma paridade que  $v(P')$ .

Então, ao adicionar 1 a cada membro, temos que  $z(P') + 1$  e  $v(P') + 1$  tem mesma paridade. Logo,

$v(P) = v(P') + 1$ , ou seja,  $v(P)$  tem a mesma paridade que  $v(P') + 1$ . Como  $z(P') + 1$  tem mesma paridade que  $v(P') + 1$ , podemos concluir que  $v(P)$  tem a mesma paridade que  $z(P') + 1$ .

Como  $z(P)$  tem a mesma paridade que  $z(P') + 1$  e  $v(P)$  também tem a mesma paridade que  $z(P') + 1$ . Podemos assim concluir que  $v(P)$  e  $z(P)$  têm as mesmas paridades.

Vamos agora mostrar a desigualdade  $v(P) \geq z(P)$ .

Por hipótese de indução  $v(P') \geq z(P')$  e somando 1 aos dois membros da desigualdade:

$$v(P') + 1 \geq z(P') + 1$$

Temos que,

$$v(P) = v(P') + 1$$

Do **Lema 2.0.5**:  $z(P) \leq z(P') + 1$ .

Assim,

Como  $v(P) = v(P') + 1$  e por sua vez  $v(P') + 1 \geq z(P') + 1$ , então  $v(P) \geq z(P') + 1$ .

Sabemos também que  $z(P') + 1 \geq z(P)$ . Podemos assim concluir que,

$$v(P) \geq z(P)$$

Vamos agora analisar a equação proposta por Descartes e verificar como é simples identificar que existe exatamente uma raiz positiva observando apenas os sinais dos coeficientes.

Veja que a equação  $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$  possui apenas uma mudança entre os sinais de seus coeficientes. A mudança encontra-se entre os termos  $+4x^3$  e  $-19x^2$ .

Pela Regra, a quantidade de raízes positivas não pode ser maior que 1. Para decidir se esta quantidade é 0 ou 1, vamos fazer uso da segunda informação no teorema que diz: a diferença entre a quantidade de mudança de sinais e o número de raízes positivas é um valor par. Sendo assim, com base no teorema podemos determinar que a equação tem exatamente uma raiz positiva.

Fica claro este resultado quando observamos esta mesma equação na forma canônica:  
 $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x - 5) = 0$ .

O polinômio  $P(x) = x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120$  possui apenas uma raiz positiva, como previsto pelo teorema.

# Capítulo 4

## Uma Regra para Funções mais Gerais

Veremos agora uma forma de obter a desigualdade entre a quantidade de mudança dos sinais e a quantidade de raízes positivas no caso em que as funções são mais gerais. Este resultado foi apresentada por **Vilmos Komornik** em artigo científico(2006). Apesar de Komornik tratar de funções mais gerais, esta análise não explora a multiplicidade das raízes, pois as funções não serão necessariamente polinomiais. Além disso, essa abordagem não nos traz a informação sobre a paridade entre o número de mudança dos sinais e a quantidade de raízes positivas. Sendo assim, esta não é uma generalização do teorema apresentado por **Xiaoshen Wang** no capítulo anterior.

**Teorema 4.0.1.** *Seja  $P(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + a_2x^{b_2} + \dots + a_nx^{b_n}$ , uma função onde  $a_0, \dots, a_n$  são reais não nulos e com expoentes reais  $b_0, b_1, \dots, b_n$  satisfazendo a sentença  $b_0 > b_1 > \dots > b_n$ . Então  $P(x)$  não pode ter mais raízes positivas que o número de mudanças de sinais na sequência  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ .*

**Demonstração.** Vamos denotar:

$\tilde{z}(P)$  = quantidade de raízes positivas em  $P(x)$ .

$v(P)$  = número de mudanças de sinais em termos consecutivos da sequência dos coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Diferentemente da demonstração apresentada por Wang, vamos mostrar os resultados usando indução em  $v(P)$ .



O caso  $v(P) = 0$ , significa que os termos de  $P(x)$  têm todos os sinais iguais, daí para qualquer valor positivo em  $x$  implicará que  $P(x) \neq 0$ , pois uma soma formada por valores de mesmo sinal sempre é diferente de zero. Assim,  $P(x)$  não possui raízes positivas, isto é,  $\tilde{z}(P) = 0$ . Desta forma o resultado é válido.

Se  $v(P) > 0$ , podemos então afirmar que existe pelo menos uma mudança de sinal. Em outras palavras: existe um  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  de tal forma que  $a_i \cdot a_{i+1} < 0$ .

Sendo assim, podemos analisar a função da seguinte forma:

$$P(x) = a_0x^{b_0} + \dots + a_i x^{b_i} + a_{i+1}x^{b_{i+1}} + \dots + a_n x^{b_n}$$

Observe que do coeficiente  $a_0$  ao coeficiente  $a_i$  ocorre uma quantidade de mudança dos sinais que podemos denotar por  $\Delta v_1$ .

Em quanto que entre os coeficientes  $a_i$  e  $a_{i+1}$  ocorre uma mudança.

Já para os demais coeficientes (de  $a_{i+1}$  até  $a_n$ ) ocorre outra quantidade de mudança dos sinais que podemos denotar por  $\Delta v_2$ . Logo:

$$v(P) = \Delta v_1 + 1 + \Delta v_2$$

Pelo **Lema 2.0.4** podemos dividir  $P(x)$  por uma potência de  $x$  que, tanto  $v(P)$  quanto  $\tilde{z}(P)$  não se alteram. Assim, dividindo  $P(x)$  por  $x^{b_i}$  obtemos:

$$P(x) = a_0x^{b_0-b_i} + a_1x^{b_1-b_i} + \dots + a_i x^{b_i-b_i} + a_{i+1}x^{b_{i+1}-b_i} + \dots + a_n x^{b_n-b_i}$$

Vamos denotar  $b_k - b_i = \beta_k$  para todo  $k = 0 \dots, n$ . Assim, temos que

$$P(x) = a_0x^{\beta_0} + a_1x^{\beta_1} + \dots + a_i + a_{i+1}x^{\beta_{i+1}} + \dots + a_n x^{\beta_n}$$

Diferenciando  $P(x)$ :

$$P'(x) = \beta_0 a_0 x^{\beta_0-1} + \dots + \beta_{i-1} a_{i-1} x^{\beta_{i-1}-1} + 0 + \beta_{i+1} a_{i+1} x^{\beta_{i+1}-1} + \dots + \beta_n a_n x^{\beta_n-1}$$

Agora vamos analisar a mudança dos sinais em  $P'(x)$ , comparando-a com a de  $P(x)$ . Reparem que, do termo  $a_0$  até o termo  $a_{i-1}$  não houve alteração alguma nos sinais dos coeficientes, pois  $\beta_0 > \beta_1 > \dots > \beta_{i-1} > 0$ . Desta forma, temos no máximo  $\Delta v_1$  mudanças dos

sinais em  $P'(x)$ , entre os termos de ordem 0 a  $i - 1$ . Note que a partir do termo de ordem  $i + 1$  todos os coeficientes de  $P'(x)$  trocaram de sinal, pois  $\beta_n < \dots < \beta_{i+2} < \beta_{i+1} < 0$ . Uma vez que  $\beta_{i+1} = b_{i+1} - b_i$  e  $b_i > b_{i+1}$ . Logo, temos mais  $\Delta v_2$  mudanças dos sinais em  $P'(x)$ .

Por fim, vamos analisar a relação entre os sinais dos termos  $\beta_{i-1}a_{i-1}x^{\beta_{i-1}-1}$  e  $\beta_{i+1}a_{i+1}x^{\beta_{i+1}-1}$ , agora consecutivos em  $P'(x)$ , uma vez que o termo de ordem  $i$  não configura em  $P'(x)$ . Vamos dividir em dois casos.

1º caso:  $\beta_{i-1}a_{i-1}x^{\beta_{i-1}-1}$  e  $\beta_{i+1}a_{i+1}x^{\beta_{i+1}-1}$  têm o mesmo sinal em  $P'(x)$ . Ótimo, assim  $v(P') \leq \Delta v_1 + \Delta v_2 < \Delta v_1 + \Delta v_2 + 1 = v(P)$ .

2º caso:  $\beta_{i-1}a_{i-1}x^{\beta_{i-1}-1}$  e  $\beta_{i+1}a_{i+1}x^{\beta_{i+1}-1}$  têm sinais opostos. Como o sinal de  $a_{i+1}x^{\beta_{i+1}}$  em  $P(x)$  é oposto ao de  $\beta_{i+1}a_{i+1}x^{\beta_{i+1}-1}$  em  $P'(x)$  e o sinal de  $a_i x^{\beta_i}$  é oposto ao sinal de  $a_{i+1}x^{\beta_{i+1}}$  em  $P(x)$ , temos que o sinal de  $a_i x^{\beta_i}$  em  $P(x)$  é igual ao sinal de  $\beta_{i+1}a_{i+1}x^{\beta_{i+1}-1}$  em  $P'(x)$ . Como o sinal de  $a_{i-1}x^{\beta_{i-1}}$  é igual ao de  $\beta_{i-1}a_{i-1}x^{\beta_{i-1}-1}$ , teríamos 2 trocas de sinal em  $P(x)$  e uma em  $P'(x)$ , entre os termos de ordem  $i - 1$  e  $i + 1$ . Daí, temos  $v(P') = \Delta v_1 + \Delta v_2 < \Delta v_1 + \Delta v_2 + 1 = v(P)$ .

Desta forma, em ambos os casos temos  $v(P') < v(P)$ .

Assim, por hipótese de indução, o resultado é válido para  $P'(x)$ . Visto que  $P(x)$  satisfaz as hipóteses do **Lema 2.0.3**, podemos afirmar que:  $\tilde{z}(P') \geq \tilde{z}(P) - 1$ .

Por hipótese de indução temos que  $v(P') \geq \tilde{z}(P')$ . Como  $v(P) > v(P')$ , temos que  $v(P) > \tilde{z}(P')$ . Como  $\tilde{z}(P') \geq \tilde{z}(P) - 1$  e  $v(P) > \tilde{z}(P')$ , concluímos que  $v(P) > \tilde{z}(P) - 1$ . Logo  $v(P) \geq \tilde{z}(P)$ , pois  $v(P)$  e  $\tilde{z}(P)$  são números naturais. Isto encerra nossa demonstração.

# Capítulo 5

## Aplicação na Escola

Neste material de pesquisa está sendo realizado um estudo detalhado da Regra dos Sinais de Descartes para funções “polinomiais” com coeficientes (não nulos) e expoentes reais. Os resultados deste teorema podem ser estudados por alunos em escolas do Ensino Médio, ainda que na demonstração sejam necessários conhecimentos de Indução e Cálculo Diferencial, conteúdos que não são contemplados nesse nível de ensino. Entretanto, a demonstração para  $n = 1$  e  $n = 2$  pode ser feita utilizando os conceitos comumente abordados nos anos finais do Ensino Fundamental, tais como Coeficientes de um polinômio, Equação e Função do 1º grau, Raízes de um polinômio. Apresentaremos um roteiro de como inserir o assunto neste contexto, estimamos seu desenvolvimento em 2 aulas. Por exemplo, poderia ser a primeira aula de uma turma do 1º Ano do Ensino Médio, de modo a testar os conhecimentos já adquiridos pelos alunos, ao mesmo tempo que introduzimos um resultado importante de fácil aplicabilidade, mas que não é conteúdo escolar obrigatório.

## 5.1 Roteiro da Aula

### Título: A regra do Sinal de Descartes

Esta aula tratará da contribuição de René Descartes para estimar a quantidade de raízes positivas de polinômios. É natural que alguns alunos já tenham ouvido falar em Descartes, já que nos livros didáticos o plano com um sistema de coordenadas é também chamado de plano cartesiano.

Para facilitar o raciocínio e permitir a participação efetiva dos alunos utilizaremos apenas coeficientes inteiros pois desejamos focar no método, mas o resultado é válido para coeficientes reais.

Podemos começar observando as equações:

$$1 + 6x = 0$$

$$-8 + 10x = 0$$

$$2 - 3x = 0$$

$$-4 - 2x = 0$$

Em seguida, responder as seguintes questões:

1. Quais são as raízes dessas equações?
2. Quais delas possuem raízes positivas?
3. Quais delas possuem raízes negativas?
4. Quais as semelhanças que você identificou entre as equações de raízes positivas?
5. Quais as semelhanças que você identificou entre as equações de raízes negativas?

A partir da discussão gerada, o professor pode ampliar a discussão para o caso geral, realizando a pergunta:

*Sendo  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ , quando a equação  $a + bx = 0$  possui raiz positiva?*

Induzindo assim os alunos a observarem que a resposta depende dos sinais de  $a$  e  $b$ . O esperado é que a partir dos exemplos anteriores eles cheguem a esta conclusão, sem que resolvam efetivamente a equação.

Feito isso, podemos dizer que Descartes observou que para um polinômio de grau  $n$ , a quantidade de suas raízes positivas está relacionada com os sinais de seus coeficientes. Mais precisamente, temos:

**Teorema 5.1.1.** *Seja  $P(x) = a_0x^{B_0} + a_1x^{B_1} + a_2x^{B_2} + \dots + a_nx^{B_n}$ , um polinômio com coeficientes reais não nulos e cujos expoentes satisfazem  $B_0 < B_1 < \dots < B_n$ . Então o número de raízes positivas de  $P(x)$  é menor ou igual à quantidade de mudanças de sinais na sequência de coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . Além disso, a diferença entre a quantidade de mudança de sinais e o número de raízes positivas de  $P(x)$  é um número par.*

Para conferir o que o teorema nos diz, o professor deve utilizar um polinômio para mostrar o significado de troca dos sinais dos coeficientes, ensinar como contar tais trocas e fazer a verificação do resultado. Para isto, podemos usar o exemplo de Descartes descrito no Capítulo 3.

O próximo passo é verificar a validade do Teorema para polinômios genéricos de graus 1 e 2, para que a partir disso, os alunos acreditem<sup>1</sup> que o resultado é válido para um polinômio de grau  $n$ .

### Verificação para $n = 1$ .

Recordando o início da aula, no polinômio  $a + bx = 0$  vimos que:

- Quando os sinais de  $a$  e  $b$  são opostos, temos 1 raiz positiva e uma troca nos sinais dos coeficientes, verificando assim a validade do teorema.
- Quando os sinais de  $a$  e  $b$  são iguais, temos 1 raiz negativa, ou seja, nenhuma raiz é positiva. Nesse ponto vale recordar aos alunos que um polinômio de 1º grau possui apenas uma raiz. Como também não há troca nos sinais dos coeficientes, verificamos a validade do teorema novamente.

---

<sup>1</sup>Com acreditar queremos dizer que o Teorema será utilizado como um Axioma, afinal a verificação não seria tão fácil para polinômios de graus 3 ou 4, e tampouco a demonstração do teorema seria possível nesse nível de ensino.

### Verificação para $n = 2$ .

Veremos a veracidade da Regra dos Sinais de Descartes para polinômios de 2º grau:

A fim de simplificar a análise, vamos mostrar que podemos reduzir nosso problema trabalhando apenas com polinômios mônicos, ou seja,  $P(x) = x^2 + ax + b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Uma vez que se tivermos uma equação do tipo  $mx^2 + nx^2 + o$ ,  $m, n, o \in \mathbb{R}$ ,  $m \neq 0$ , sempre podemos dividi-la por  $m$  que não modificamos suas raízes nem a quantidade de trocas de sinais entre os coeficientes.

Observe que temos os seguintes casos para analisar:

Como o Teorema faz referência à quantidade de raízes positivas do polinômio a ser estudado, faremos essa análise separando-a nos seguintes casos:  $P(x)$  não tem raiz positiva,  $P(x)$  tem exatamente 1 raiz positiva ou  $P(x)$  tem 2 raízes positivas.

- Se  $P(x)$  não tem raízes positivas, então o resultado é válido, pois a quantidade de mudança dos sinais sempre será maior ou igual a zero.
- Se  $P(x)$  tem exatamente 1 raiz positiva, temos dois subcasos:

(i)  $x_1 > 0$  e  $x_2 < 0$

Em consequência de termos uma raiz positivas, devemos ter pelo menos uma mudanças nos sinais.

Note que,  $x_1x_2 < 0$ . Como,

$$P(x) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Sempre haverá uma mudança de sinal, pois se  $-(x_1 + x_2)$  tem sinal positivo, temos a mudança de sinais entre o 2º e o 3º termos do polinômio, se  $-(x_1 + x_2)$  tem sinal negativo, temos a mudança de sinais entre o 1º e o 2º termos do polinômio. No caso de  $-(x_1 + x_2) = 0$ , temos a mudança de sinais entre o 1º e o 3º termos do polinômio.

(ii)  $x_1 > 0$  e  $x_2 = 0$

Novamente, esperamos ter pelo menos uma mudanças nos sinais. Note que, em  $P(x) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$ , temos  $-(x_1 + x_2) = -x_1 < 0$  e  $x_1x_2 = 0$ . Logo,

$$P(x) = x^2 - x_1x$$

Assim  $P(x)$  apresenta uma mudança de sinal, como queríamos.

- Sejam  $x_1, x_2$  as duas raízes positivas  $P(x)$ .

Em consequência de termos duas raízes positivas, devemos ter duas mudanças nos sinais.

Como  $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ , temos:

$$P(x) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Note que,  $-(x_1 + x_2) < 0$  e  $+x_1x_2 > 0$ . Logo,  $P(x) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$  tem a primeira mudança de sinal entre os termos  $+x^2$  e  $-(x_1 + x_2)x$  e a segunda mudança de sinal entre os termos  $-(x_1 + x_2)x$  e  $+x_1x_2$ , contabilizando assim as duas mudanças de sinais desejadas.

## 5.2 Exercícios Resolvidos

Apresentaremos nessa seção uma lista com cinco exercícios comentados que podem ser utilizados pelo professor para fixação dos conteúdos vistos no Roteiro. Propositadamente nós os elaboramos utilizando polinômios de graus maiores que 2, para que as soluções sejam obtidas a partir do exposto em aula, e não por utilização de outros métodos.

1. Considere o polinômio  $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ , utilizando a Regra dos Sinais de Descartes, diga quantas raízes positivas ele possui.

**Resolução:** Observe que existe apenas uma mudança entre os sinais dos coeficientes  $+2x^2$  e  $-x$  de  $P(x)$ . Daí a quantidade de raízes positivas não pode ser maior que 1. Como o Teorema nos diz que a quantidade de raízes positivas e a quantidade de mudança dos sinais devem ter a mesma paridade, podemos concluir que a resposta é 1.

*Observação:* Este polinômio pode ser fatorado como  $P(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$ , podemos com isso conhecer a raiz positiva garantida pelo Teorema, que é  $x = 1$ .

2. A respeito da equação  $7x^6 - 5x^4 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ , marque a alternativa **correta**:
  - (a) Possui exatamente 1 raízes positivas.
  - (b) Possui exatamente 3 raízes positivas.
  - (c) Possui exatamente ou 0 ou 2 raízes.
  - (d) Possui exatamente ou 4 ou 6 raízes.

**Resolução:** Observe que existem apenas duas mudança entre os sinais, elas que ocorrem entre os termos:  $7x^6$  e  $-5x^4$ ,  $-5x^4$  e  $+3x^2$ . Sendo assim, pela Regra dos Sinais de Descartes teremos no máximo 2 raízes positivas. Desta forma, as alternativas (a) e (d) estão automaticamente excluídos. Como o número de raízes positivas tem a mesma paridade que a quantidade de trocas dos sinais, temos que a alternativa (c) é a correta.

3. Determine quantas raízes positivas tem a equação  $ax^5 + \pi x^4 + 3x^2 + x + 1 = 0$ , em que  $a$  é um número real qualquer.

**Resolução:** Devemos observar que se  $a < 0$ , então temos exatamente 1 troca de sinal entre  $ax^5$  e  $+\pi x^4$ . Sendo assim, como no exercício 1, temos exatamente uma raiz positiva.



Se  $a \geq 0$ , todos o sinal de todos os coeficientes é positivo, então não temos mudança de sinal, logo não teremos raízes positivas.

4. Mostre que se a equação  $3x^3 - 5x^2 + 4x + c = 0$  tem 3 raízes positivas, então  $c < 0$ .

**Resolução:** Se  $c \geq 0$ , temos exatamente 2 mudanças de sinais, entre os termos  $3x^3$  e  $-5x^2$ ,  $-5x^2$  e  $4x$ . Contrariando a regra dos sinais de Descartes, uma vez que teríamos 2 mudanças de sinais e 3 raízes positivas. Logo temos que ter  $c < 0$ .

5. Considere a equação  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , onde  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Mostre que se o conjunto  $A = \{i = 0, \dots, n-1 \mid a_i a_{i+1} < 0\}$  tem exatamente 1 elemento, então a equação possui exatamente 1 raiz positiva.

**Resolução:** Note que a número de elementos de  $A$  é exatamente a quantidade de mudanças de sinais. Novamente, pelo argumento do exercício 1, teremos exatamente 1 raiz positiva.

*Observação:* Apesar do enunciado do exercício ser um pouco mais elaborado, o raciocínio para resolvê-lo é análogo ao do primeiro exercício.

# Bibliografia

- [1] Duelci Aparecido de Freitas Vaz, A Matemática e a Filosofia de René Descartes.
- [2] Fundamentos de cálculo, Coleção PROFMAT, SBM.
- [3] Matematica.50webs.com
- [4] Pereira, Paulo César Antunes. O Princípio da Indução Finita. PROFMAT. RJ. 2013.
- [5] R. Descartes, La Géométrie, PROJECT GUTENBER (2008).
- [6] Stewart, James. Cálculo Vol. I. 5 edição. São Paulo: Pioneira Thomson Learning. 2006.
- [7] Vilmos Komornik, Another Short Proof of Descartes's Rule of Signs. AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY (2006).
- [8] Xiaoshen Wang, a Simple Proof of Descartes's Rule of Signs, AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY 111 (2004).